Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz? (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC. (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Najděte všechna čtyřmístná čísla n, která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n, je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi. (*Pavel Novotný*)

C – I – 4

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G, aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku. (*Lucie Růžičková*)

C – I – 5

Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.) *(Jaromír Šimša)*

C – I – 6

Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(Jaromír Šimša)

C – S – 1

Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. *(Jaromír Šimša)*

C – S – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB. Průsečík úsečky AB s přímkou, která prochází vrcholem C a středem kružnice vepsané trojúhelníku PBC, označíme D. Dokažte, že úsečky AD a AC jsou shodné. *(Pavel Leischner)*

C – S – 3

Jestliže jistá dvě přirozená čísla ve stejném pořadí sečteme, odečteme, vydělíme a vynásobíme a všechny čtyři výsledky sečteme, dostaneme 2 009. Určete tato dvě čísla. *(Vojtech Bálint)*

C – II – 1

Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
b) Najděte největší hodnotu $V(x)$. *(Aleš Kobza)*

C – II – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE. *(Pavel Leischner)*

C – II – 3

Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.
a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26. *(Jaromír Šimša)*

C – II – 4

Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. *(Peter Novotný)*

Řešení úloh

C – I – 1

Dohromady chlapci dostali $3 + 2 + 1 + 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 42$ Kč. Toto číslo lze jednoznačně vyjádřit jako součet čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel: $42 = 9 + 10 + 11 + 12$. Čtyři chlapci tedy (v nějakém pořadí) vybrali sumy 9, 10, 11 a 12 Kč.

Žádný chlapec nemohl dostat 8 Kč zároveň od druhého i od pátého kolemjdoucího (jinak by měl alespoň 16 Kč, nejvíce však mohl každý z chlapců dostat 12 Kč). Takže od druhého a pátého mají tři chlapci po 8 Kč a jeden od nich nedostal nic. Nejvýše jeden z těchto tří chlapců mohl dostat 4 Kč od čtvrtého kolemjdoucího, jinak by měli už alespoň dva chlapci alespoň 12 Kč. Čtvrtý kolemjdoucí musel tedy dát 4 Kč právě jednomu z nich a 4 Kč zbývajícímu chlapci. Bez peněz prvního a třetího kolemjdoucího tedy mají chlapci vybráno 12, 8, 8 a 4 Kč. Chlapec, který dostal v součtu od druhého, čtvrtého a pátého kolemjdoucího dvanáct korun, už nemohl dostat od prvního a třetího kolemjdoucího nic, neboť by měl více než dvanáct korun. Ten, který dostal v součtu od druhého, čtvrtého a pátého kolemjdoucího 4 Kč, musel dostat od prvního a třetího v součtu maximální možnou částku, tj. $3+2 = 5$ Kč, jinak by měl celkově méně než 9 Kč (dostal tedy právě 9 Kč a má nejméně). Takže nejméně vybral Honza, neboť on dostal od prvního kolemjdoucího 3 Kč, a nejvíc Petr, který od prvního kolemjdoucího nedostal nic.

Úvahy snadno dokončíme a ukážeme, že popsané rozdělení *je* vskutku *možné*. Jak už víme, Honza vybral 9 Kč a Petr 12 Kč, Jirka, který dostal 2 Kč od prvního, nemohl dostat od třetího nic, takže dostal celkem 10 Kč, a Martin 11 Kč. Všechny úvahy můžeme přehledně uspořádat do tabulky, kterou postupně doplňujeme:

1	2	3	4	5	Σ
	8		0	0	
	0		0	8	
0	0	0	4	8	$12 \to$ P
3	0	2	4	0	$\leqq 9 \to$ H
1+2+3	1×8	2×2	2×4	2×8	

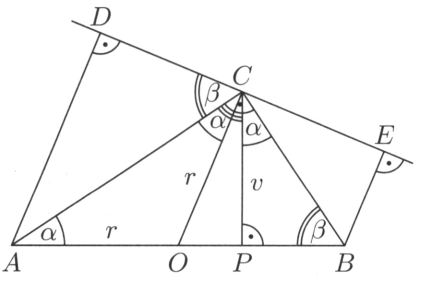
C – I – 2

Označme odvěsny trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a, b a protilehlé úhly α, β. Střed přepony AB (střed opsané kružnice) označíme O (obr. 1).

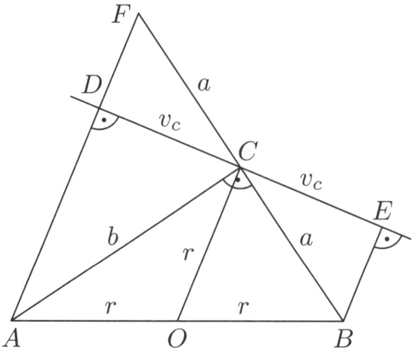
Výška $v = CP$ rozděluje trojúhelník ABC na trojúhelníky ACP a CBP podobné trojúhelníku ABC podle věty uu ($\alpha + \beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navíc $|OC| = |OA| = r$ (poloměr opsané kružnice). Odtud $|\sphericalangle OCA| = |\sphericalangle OAC| = \alpha$ a $|\sphericalangle DCA| = 90° - |\sphericalangle OCA| = \beta$.

Pravoúhlé trojúhelníky ACP a ACD se společnou přeponou AC se tudíž shodují i v úhlech při vrcholu C. Jsou proto shodné, dokonce souměrně sdružené podle přímky AC. Analogicky jsou trojúhelníky CBP a CBE souměrně sdružené podle BC. Je tedy $|CD| = |CE| = v$, tudíž $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, neboť z dvojího vyjádření dvojnásobku obsahu trojúhelníku ABC plyne $v = ab/|AB|$, přičemž $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Místo dvojího vyjádření obsahu můžeme k výpočtu výšky CP využít podobnost trojúhelníků CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



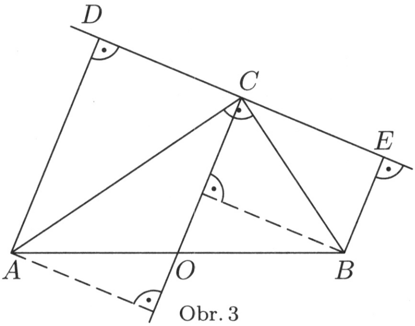
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Úsečka OC je střední příčkou lichoběžníku $DABE$, neboť je rovnoběžná se základnami a prochází středem O ramene AB. Je proto D obrazem bodu E v souměrnosti podle středu C. Obraz F bodu B v téže souměrnosti leží na polopřímce AD za bodem D (obr. 2). Je $|CF| = |BC| = a$, úhel ACF je pravý, trojúhelníky AFC a ABC jsou tedy shodné. Vidíme, že CD je výška v trojúhelníku AFC shodná s výškou v_c trojúhelníku ABC, a DE je jejím dvojnásobkem. Velikost výšky v_c dopočítáme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Úsečky CD a CE (obr. 3) jsou shodné s výškami rovnoramenných trojúhelníků ACO, BCO na společnou stranu OC. Protože tyto dva trojúhelníky mají ve srovnání s třetím trojúhelníkem ABC poloviční obsah a i jejich společná strana OC je oproti přeponě AB poloviční, jsou obě výšky na stranu OC trojúhelníků ACO, BCO shodné s výškou na stranu AB trojúhelníku ABC. Jeho výšku dopočítáme jako v prvním řešení.



Obr. 3

Odpověď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

C – I – 3

V řešení budeme $\bar{n}$ značit číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n. Rozlišíme tři případy.

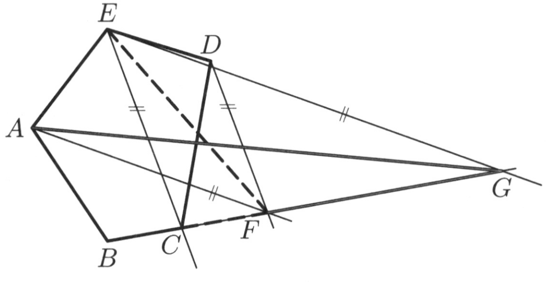
(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b jsou různé cifry. Je tedy $n = 1\,100a + 11b$ a $\bar{n} = 1\,100b + 11a$. Číslo 7 má dělit jak n, tak $\bar{n}$, tedy i jejich rozdíl $n - \bar{n} = 1\,089(a-b)$ a součet $n + \bar{n} = 1\,111(a+b)$. Protože ani číslo 1 089, ani číslo 1 111 nejsou násobkem sedmi a sedm je prvočíslo, tak $7 \mid a-b$ i $7 \mid a+b$. Použijeme-li stejnou úvahu ještě jednou, vidíme, že $7 \mid (a-b)+(a+b) = 2a$ a $7 \mid (a+b)-(a-b) = 2b$, tedy $7 \mid a$ a $7 \mid b$, neboli $a, b \in \{0, 7\}$. Číslice a, b jsou navzájem různé, proto jedna z nich musí být 0. Ale potom jedno z čísel $aabb$, $bbaa$ není čtyřmístné. Hledané číslo n tedy nemůže být uvedeného tvaru.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1\,010a + 101b$ a rovněž $7 \mid \bar{n} = 1\,010b + 101a$. Podobně jako v předchozím případě odvodíme, že $7 \mid n - \bar{n} = 909(a-b)$ a $7 \mid n + \bar{n} = 1\,111(a+b)$, a ze stejných důvodů jako v předchozím případě zjišťujeme, že $7 \mid a$, $7 \mid b$. Některá z číslic by tedy musela být 0. Číslo n tak nemůže být ani tvaru $abab$.

(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom obrácením pořadí číslic vznikne totéž číslo, takže máme jedinou podmínku $7 \mid 1\,001a + 110b$. Protože $7 \mid 1\,001$ a $7 \nmid 110$, je tato podmínka ekvivalentní s podmínkou $7 \mid b$. Proto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všech 17 čísel, která právě uvedené podmínky splňují: 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

C – I – 4

Rozbor: Nejprve uvažme bod F, který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s EC jdoucí bodem D (protože $E \notin BC$, jsou EC a BC různoběžky, obr. 4). Obsahy trojúhelníků ECD a ECF jsou shodné (mají společnou stranu EC a shodnou výšku na tuto stranu), obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je tedy shodný s obsahem čtyřúhelníku $ABFE$.



Obr. 4

Dále uvažme bod G, který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s AF jdoucí bodem E. Potom jsou opět obsahy trojúhelníků AFE a AFG shodné, a jsou proto shodné i obsahy čtyřúhelníku $ABFE$ a trojúhelníku ABG. Bod G tak má požadovanou vlastnost.

Hledaný bod je na polopřímce BC jediný, neboť pro různé body X, Y na polopřímce BC mají trojúhelníky ABX a ABY různé výšky na společnou stranu AB, mají tedy různé obsahy.

Popis konstrukce:

1. p; $p \parallel EC$, $D \in p$;
2. F; $F \in p \cap BC$;
3. q; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné řešení.

C – I – 5

Čísla od 1 do 99 rozdělíme podle jejich zbytku při dělení číslem 11 do jedenácti devítiprvkových skupin T_0, T_1, ..., T_{10}:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{11, 22, 33, \dots, 99\}, \\ T_1 &= \{\ 1, 12, 23, \dots, 89\}, \\ &\ \vdots \\ T_{10} &= \{10, 21, 32, \dots, 98\}. \end{aligned}$$

Vybereme-li jedno číslo z T_0 (víc jich ani vybrat nesmíme) a všechna čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5, dostaneme vyhovující výběr $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel, neboť součet dvou čísel z 0, 1, 2, 3, 4, 5 je dělitelný 11 jedině v případě $0 + 0$, z množiny T_0 jsme však vybrali pouze jedno číslo.

Na druhou stranu v libovolném vyhovujícím výběru je nejvýše jedno číslo ze skupiny T_0 a nejvýše 9 čísel z každé ze skupin

$$T_1 \cup T_{10},\ T_2 \cup T_9,\ T_3 \cup T_8,\ T_4 \cup T_7,\ T_5 \cup T_6,$$

neboť při výběru 10 čísel z některé skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by mezi vybranými bylo některé číslo ze skupiny T_i i některé číslo ze skupiny T_{11-i}; jejich součet by pak byl dělitelný 11. Celkem je tedy ve výběru nejvýše $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel.

C – I – 6

Levou nerovnost dokážeme ekvivalentními úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \qquad \Big| \cdot 6(a+b) \\ 3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2), \\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost vzhledem k předpokladu $a \neq b$ platí. Také pravou nerovnost ze zadání budeme ekvivalentně upravovat, začneme umocněním každé strany na druhou:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad \Big| \cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je součtem nerovností $2a^2b^2 < a^4 + b^4$ a $4a^2b^2 < < 2a^3b + 2ab^3$, které obě platí, neboť po převodu členů z levých stran na pravé dostaneme po rozkladu už zřejmé nerovnosti $0 < (a^2 - b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a - b)^2$.

C – S – 1

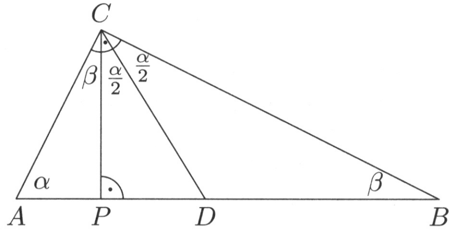
Roznásobením a dalšími ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} ab + b^2c + a^2c + abc^2 &\geqq abc^2 + 2abc + ab, \\ b^2c + a^2c &\geqq 2abc, \\ (a-b)^2c &\geqq 0. \end{aligned}$$

Podle zadání platí $c \geqq 0$ a druhá mocnina reálného čísla $a - b$ je rovněž nezáporná, takže je nezáporná i levá strana upravené nerovnosti. Rovnost v ní (stejně jako v původní nerovnosti) nastane, právě když $a - b = 0$ nebo $c = 0$, tedy právě když je splněna aspoň jedna z podmínek $a = b$, $c = 0$.

C – S – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB pro velikosti α, β úhlů při vrcholech A, B platí $\alpha + \beta = 90°$, proto je $|\sphericalangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$, neboť přímka CD je osa úhlu BCP (obr. 5). Pro vnější úhel ADC trojúhelníku BCD tak zřejmě platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DCA|$.



Obr. 5

Zjistili jsme, že trojúhelník ADC má u vrcholů C, D shodné vnitřní úhly, je tedy rovnoramenný, a proto $|AD| = |AC|$.

C – S – 3

Pro hledaná přirozená čísla x a y lze podmínku ze zadání vyjádřit rovnicí

$$(x+y)+(x-y)+\left(\frac{x}{y}\right)+(x\cdot y)=2\,009, \tag{1}$$

ve které jsme dílčí výsledky jednotlivých operací uzávorkovali.

Vyřešme rovnici (1) vzhledem k neznámé x (v níž je, na rozdíl od neznámé y, rovnice *lineární*). Vyjde

$$x=\frac{2\,009y}{(y+1)^2}. \tag{2}$$

Hledáme právě ta přirozená čísla y, pro která má nalezený zlomek celočíselnou hodnotu, což lze vyjádřit vztahem $(y+1)^2 \mid 2\,009y$. Protože čísla y a $y+1$ jsou nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla y a $(y+1)^2$, takže musí platit $(y+1)^2 \mid 2\,009 = 7^2 \cdot 41$. Protože $y+1$ je celé číslo větší než 1 (a činitelé 7, 41 jsou prvočísla), poslední podmínce vyhovuje pouze hodnota $y=6$, které po dosazení do (2) odpovídá $x=246$. (Protože rovnice (1) a (2) jsou v oboru přirozených čísel ekvivalentní, není zkouška nezbytná.)

Hledaná čísla v uvažovaném pořadí jsou 246 a 6.

Poznámka. Úvaze o nesoudělnosti čísel y a $y+1$ se lze vyhnout: z rovnice (1) plyne, že podíl x/y je celé číslo. Dosadíme-li do ní $x=ky$, kde k je vhodné přirozené číslo, dostaneme po úpravě $k(y+1)^2=2\,009$, odkud podle rozkladu čísla 2 009 na prvočinitele zjistíme, že může být jedině $k=41$ a $y+1=7$, tedy $y=6$ a $x=ky=246$.

C – II – 1

Výraz V je zřejmě definován pro všechna reálná čísla x.

a) Protože $x^4+1>0$ pro každé x, je nerovnost $V(x) \geqq 3$ ekvivalentní nerovnosti $5x^4-4x^2+5 \geqq 3(x^4+1)$ neboli $2x^4-4x^2+2 \geqq 0$. Výraz na levé straně je roven $2(x^2-1)^2$, takže je nezáporný pro každé x.

b) Využijme následující úpravu:

$$V(x)=\frac{5x^4-4x^2+5}{x^4+1}=\frac{5(x^4+1)}{x^4+1}-\frac{4x^2}{x^4+1}=5-\frac{4x^2}{x^4+1}.$$

Protože zlomek $4x^2/(x^4+1)$ je díky sudým mocninám proměnné x pro libovolné reálné číslo x nezáporný, nabývá výraz V své největší hodnoty

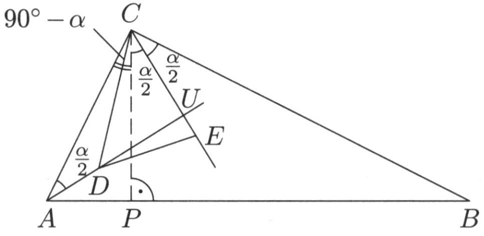
$V_{\max}$, právě když $4x^2/(x^4+1) = 0$, tedy právě když $x = 0$. Dostáváme tak $V_{\max} = V(0) = 5$.

C – II – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme α velikost vnitřního úhlu při vrcholu A, zřejmě pak platí $|\sphericalangle ACP| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle PCB| = \alpha$. Střed D kružnice vepsané trojúhelníku APC leží na ose úhlu PAC, takže $|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobně i $|\sphericalangle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtud pro velikost úhlu AUC v trojúhelníku AUC, kde U je průsečík polopřímek AD a CE (obr. 6), vychází

$$|\sphericalangle AUC| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha = 90^\circ.$$

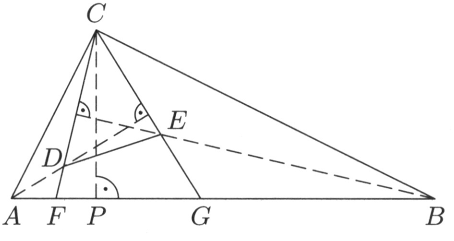
To znamená, že polopřímka AD je kolmá na CE, úsečka DU je tudíž výška v trojúhelníku DEC. Úplně stejně zjistíme, že i polopřímka BE



Obr. 6

(jinak osa úhlu ABC) je kolmá na CD. Dostáváme tak, že průsečík polopřímek AD a BE, což je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, je zároveň i průsečíkem výšek trojúhelníku DEC.

Jiné řešení. Označme F a G odpovídající průsečíky přímek CD a CE se stranou AB (obr. 7). Podle tvrzení úlohy C–S–2 je trojúhelník CAG



Obr. 7

rovnoramenný se základnou CG. Osa AD úhlu CAG rovnoramenného trojúhelníku CAG je tudíž i jeho osou souměrnosti, a je proto kolmá na základnu CG, tedy i na CE. Podobně zjistíme, že i trojúhelník CBF je rovnoramenný se základnou CF, takže osa BE úhlu FBC je kolmá na CF, tedy i na CD. Průsečík obou os AD a BE je tak nejen středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, ale i průsečíkem výšek trojúhelníku CDE, což jsme měli dokázat.

C – II – 3

Podle zbytků při dělení devíti rozdělíme všech 99 uvažovaných čísel do devíti jedenáctiprvkových tříd $T_0, T_1, \dots, T_8$ (do třídy T_i patří všechna čísla se zbytkem i):

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \{9, 18, 27, \dots, 99\},\\
T_1 &= \{1, 10, 19, \dots, 91\},\\
&\ \vdots\\
T_8 &= \{8, 17, 26, \dots, 98\}.
\end{aligned}
$$

a) Naším úkolem je dokázat, že v $T_0 \cup T_3 \cup T_6$ leží nejvýše čtyři vybraná čísla. Z každé ze tříd T_0, T_3, T_6 mohou pocházet nejvýše dvě z vybraných čísel (součet libovolných tří čísel z jedné takové třídy už totiž dělitelný devíti je). Protože součet libovolných tří čísel, která po jednom leží ve třídách T_0, T_3 a T_6, je devíti dělitelný, aspoň jedna z těchto tříd žádné vybrané číslo neobsahuje. Z obou vyslovených závěrů plyne dokazované tvrzení: vybraných čísel dělitelných třemi je totiž nejvýše $2 + 2 + 0 = 4$.

b) Ukažme, že vyhovující výběr může obsahovat 26 čísel. Vybereme po dvou číslech z T_0, T_3 a po 11 číslech (tedy všechna čísla) z T_1 a T_2. Dostaneme tak celkem $2 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 26$ čísel; přitom součet libovolných tří z nich dává při dělení devíti zbytek alespoň $0 + 0 + 1 = 1$, nejvýše však $2 + 3 + 3 = 8$, takže devíti dělitelný být nemůže.

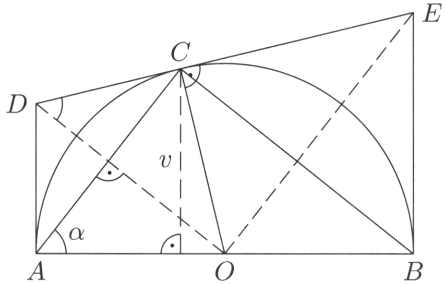
C – II – 4

Označme O střed opsané kružnice, tedy střed přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC, a v velikost jeho výšky na přeponu (obr. 8). Trojúhelník EDO je zřejmě rovněž pravoúhlý, protože jeho strany DO a EO jsou kolmé na odvěsny trojúhelníku ABC; přitom jeho výškou na přeponu je úsečka OC (o velikosti $\frac{1}{2}c$). Vzhledem k souměrnosti úsečky AC podle osy OD platí pro jeho úhel při vrcholu D, že $|\sphericalangle CDO| = 90° - |\sphericalangle COD| = 90° - |\sphericalangle AOD| = \alpha$. Trojúhelníky EDO a ABC jsou tudíž podobné (uu). Koeficient k této podobnosti je dán poměrem délek odpovídajících výšek na přepony, takže $k = |OC|/v = \frac{1}{2}c/v$, a protože $vc = 2S$, je

$$k = \frac{c^2}{4S}.$$

V uvedené podobnosti odpovídá přeponě AB přepona DE, proto pro její velikost platí

$$|DE| = kc = \frac{c^3}{4S}.$$



Obr. 8

Jiné řešení. Ze souměrnosti tečen z bodu ke kružnici plyne, že oba trojúhelníky ACD i BCE jsou rovnoramenné, $|AD| = |DC|$, $|BE| = |CE|$. Rovnoramenné jsou i trojúhelníky ACO a BCO, kde O je střed přepony AB (ramena obou trojúhelníků mají velikost poloměru kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, což je $\frac{1}{2}c$). Ukážeme, že jde o dvě dvojice podobných trojúhelníků $ACD \sim BCO$ a $ACO \sim BCE$. K tomu si stačí všimnout, že ve čtyřúhelníku $AOCD$, který je složen ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, platí $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$. Rovnoramenné trojúhelníky ACD a BCO jsou tedy podobné podle věty uu. Z této podobnosti plyne rovnost $|CD| : |CA| = |CO| : |CB|$, takže při běžném označení odvěsen dostáváme $|CD| = \frac{1}{2}cb/a$, a z podobnosti trojúhelníků ACO a BCE pak $|CE| = \frac{1}{2}ca/b$. Celkem tak je

$$|DE| = |DC| + |CE| = \frac{cb}{2a} + \frac{ca}{2b} = \frac{cb^2 + ca^2}{2ab} = \frac{c(a^2 + b^2)}{2 \cdot 2S} = \frac{c^3}{4S}.$$

Poznámky. Podobnost zmíněných rovnoramenných trojúhelníků můžeme odvodit také tak, že si všimneme rovnosti odpovídajících úhlů ACO a BCE při základnách: oba totiž doplňují úhel OCB do pravého úhlu (ACB, resp. OCE). Proto $ACO \sim BCE$.

Další možnost skýtá objevení rovnosti $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (ramena jednoho úhlu jsou kolmá na ramena druhého). Z pravoúhlého trojúhelníku ODA tak máme $|AO| : |AD| = \operatorname{tg} |\sphericalangle ADO| = \operatorname{tg} \alpha = a : b$, takže $|CD| = |AD| = \frac{1}{2}cb/a$, a analogicky pro pravoúhlý trojúhelník OEB.