58. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011. pp. 49–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405171

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli.

(*Peter Novotný*)

B – I – 2

Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF a AFD měly stejné obsahy. (*Jaroslav Zhouf*)

B – I – 4

Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. (*Ján Mazák*)

B – I – 5

Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné. *(Leo Boček)*

B – I – 6

Najděte všechny dvojice celých čísel (m, n), pro něž je hodnota výrazu

$$\frac{m+3n-1}{mn+2n-m-2}$$

celé kladné číslo. *(Vojtech Bálint)*

B – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y &= 2, \\ x - y &= 2a, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

o neznámých x a y a reálném parametru a. *(Jaroslav Švrček)*

B – S – 2

Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC. Sestrojte takový bod P, pro který přímka CP půlí úsečku KL. *(Pavel Calábek)*

B – S – 3

Číslo nazveme *magickým*, právě když se dá vyjádřit jako součet trojmístného čísla m a trojmístného čísla m' zapsaného stejnými číslicemi v opačném pořadí. Některá magická čísla lze takto vyjádřit více způsoby; například $1554 = 579 + 975 = 777 + 777$. Určete všechna magická čísla, která mají takových vyjádření $m + m'$ co nejvíce. (Na pořadí m a m' nebereme zřetel.) *(Aleš Kobza)*

B – II – 1

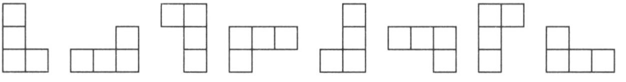
V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y = 1,$$
$$x - y = a,$$
$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

o neznámých x, y, z a reálném parametru a. (*Jaroslav Švrček*)

B – II – 2

Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů



Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.

a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.

b) Zdůvodněte, že žádných sedm otázek takovou jistotu nedává.

(*Ján Mazák*)

B – II – 3

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, který není rovnoramenný. Označme K průsečík osy úhlu ACB s osou strany AB. Přímka CK protne výšky z vrcholů A a B v bodech, které označíme po řadě P a Q. Předpokládejme, že trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah. Určete velikost úhlu ACB. (*Ján Mazák*)

B – II – 4

K libovolnému přirozenému číslu určíme jeho zbytky při dělení každým z deseti přirozených čísel $2, 3, 4, \ldots, 11$ a těchto deset zbytků (některé mohou být nulové) sečteme. Určete všechna taková čísla menší než 25 000, která mají uvedený součet co nejmenší. (Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.) (*Jaromír Šimša*)

B – I – 1

Označme n trojmístné číslo určené prvním trojčíslím (zleva) hledaného čtyřmístného čísla, které se pak rovná $10n + 8$. Podle zadání úlohy platí

$$8 \mid 10n + 8, \tag{1}$$

$$9 \mid 10n + 7, \tag{2}$$

$$7 \mid 10n + 9. \tag{3}$$

Ze vztahu (1) plyne $8 \mid 10n$ neboli $4 \mid 5n$. Čísla 4 a 5 jsou nesoudělná, proto $4 \mid n$ neboli $n = 4k$, kde k je přirozené číslo. Dosazením $n = 4k$ do vztahu (2) dostaneme $9 \mid 40k + 7$ neboli $9 \mid 4k + 7$. Z tabulky zbytků čísel $4k + 7$ při dělení devíti

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4k+7$	7	2	6	1	5	0	4	8	3

vidíme, že toto číslo je dělitelné devíti, právě když číslo k při dělení devíti dává zbytek 5. Proto $k = 9l+5$, kde l je celé číslo, takže $n = 4k = 36l+20$. Dosazením takového n do vztahu (3) dostaneme $7 \mid 360l + 209$ neboli $7 \mid 3l - 1$. Opět sestavíme tabulku zbytků, tentokrát při dělení čísla $3l - 1$ sedmi:

l	0	1	2	3	4	5	6
$3l-1$	6	2	5	1	4	0	3

Vidíme, že $7 \mid 3l - 1$, právě když $l = 7m + 5$, kde m je celé číslo. Odtud dostáváme, že všechna celočíselná n splňující trojici podmínek (1)–(3) jsou tvaru $n = 36l + 20 = 252m + 200$.

Dodejme, že namísto sestavování tabulek jsme mohli využít úprav

$$40k + 7 = 36k + 4(k - 5) + 27,$$

$$360l + 209 = 357l + 3(l - 5) + 224,$$

z nichž bychom jako dříve dostali $9 \mid k - 5$ a $7 \mid l - 5$.

Číslo $n = 252m + 200$ je trojmístné jedině pro $m \in \{0, 1, 2, 3\}$; hledané n je proto z množiny $\{200, 452, 704, 956\}$ a na tabuli bylo napsáno jedno z čísel 2 008, 4 528, 7 048, 9 568. Zkouškou (která ovšem při našem postupu není nutná) můžeme ověřit, že každé z těchto čtyř čísel vyhovuje zadání úlohy.

Jiné řešení. Při druhém postupu budeme úvahy o dělitelnosti výhodně zapisovat kongruencemi.[1] Zápis $a \equiv b \pmod{m}$ (čteme „a je kongruentní s b podle modulu m“) znamená, že čísla a, b dávají při dělení číslem m stejné zbytky neboli $m \mid a - b$.

Označme N hledané čtyřmístné číslo končící číslicí 8. Protože při její záměně číslicí 7, resp. 9 dostaneme číslo $N - 1$, resp. $N + 1$, všechny podmínky ze zadání úlohy lze vyjádřit čtyřmi kongruencemi

$$N \equiv 8 \pmod{10}, \tag{4}$$
$$N \equiv 0 \pmod{8}, \tag{5}$$
$$N - 1 \equiv 0 \pmod{9}, \tag{6}$$
$$N + 1 \equiv 0 \pmod{7}. \tag{7}$$

Ze vztahu (5) plyne $N = 8k$, kde k je celé číslo. Dosazením do vztahu (4) dostaneme $8k \equiv 8 \pmod{10}$ neboli $4k \equiv 4 \pmod{5}$, což po dělení číslem 4 (nesoudělným s číslem 5) vede k podmínce $k \equiv 1 \pmod{5}$. Proto $k = 5l + 1$, kde l je celé číslo. Dosazením $N = 8k = 40l + 8$ do vztahu (6) obdržíme podmínku $40l + 7 \equiv 0 \pmod{9}$. Její úpravou dostaneme

$$40l \equiv -7 \equiv -7 + 9 \cdot 23 = 200 \pmod{9}$$

a po vydělení číslem 40 (nesoudělným s číslem 9) dojdeme k podmínce $l \equiv 5 \pmod{9}$. Existuje tedy celé číslo m tak, že $l = 9m + 5$. Dosazením $N = 40l + 8 = 360m + 208$ do vztahu (7) dostaneme $360m + 209 \equiv 0 \pmod{7}$ neboli $3m \equiv 1 \pmod{7}$. Úpravou

$$3m \equiv 1 \equiv 1 + 2 \cdot 7 = 15 \pmod{7}$$

po vydělení číslem 3 vyjde $m \equiv 5 \pmod{7}$, takže $m = 7n + 5$, kde n je celé číslo. Hledané N je proto tvaru $N = 360m + 208 = 2\,520n + 2\,008$. Takové N je čtyřmístné, právě když $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Na tabuli proto mohlo být napsáno kterékoliv číslo z množiny $\{2\,008, 4\,528, 7\,048, 9\,568\}$ a žádné jiné.

---

[1] S tímto způsobem počítání se zbytkovými třídami se lze seznámit v brožuře Aloise Apfelbecka: *Kongruence*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1968.

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme po úpravě

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Jsou proto možné dva případy, které rozebereme samostatně.

a) *Případ* $z - x = 0$. Dosazením $z = x$ do první rovnice soustavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$ neboli $y(x - y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ nebo $x = y$. V prvním případě dostáváme trojice $(x, y, z) = (x, 0, x)$, ve druhém $(x, y, z) = (x, x, x)$; takové trojice jsou řešeními dané soustavy pro libovolné reálné číslo x, jak snadno ověříme dosazením (i když taková zkouška při našem postupu vlastně není nezbytná).

b) *Případ* $2z + 2x + y = 0$. Dosazením $y = -2x - 2z$ do první rovnice soustavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2 \quad \text{neboli} \quad 5(x + z)^2 = 0.$$

Poslední rovnice je splněna, právě když $z = -x$, tehdy ovšem $y = -2x - 2z = 0$. Dostáváme trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, které jsou řešeními dané soustavy pro každé reálné x, jak ověříme dosazením. (O takové zkoušce platí totéž co v případě a).)

Odpověď. Všechna řešení (x, y, z) dané soustavy jsou trojice tří typů:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je libovolné reálné číslo.

Jiné řešení. Obě rovnice soustavy sečteme. Po úpravě dostaneme rovnici

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opět rozlišíme dvě možnosti.

a) *Případ* $y = 0$. Z první rovnice soustavy ihned vidíme, že $x^2 = z^2$, neboli $z = \pm x$. Zkouškou ověříme, že každá z trojic $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pro libovolné reálné x řešením.

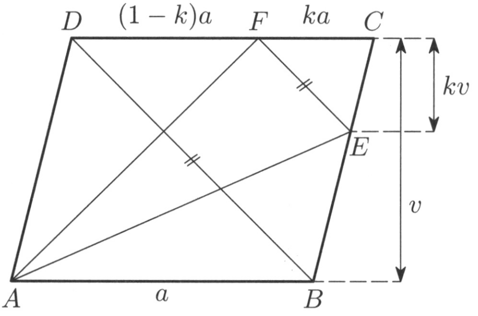
b) *Případ* $x + z - 2y = 0$. Dosazením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do první rovnice soustavy dostaneme

$$x^2 + \frac{x(x + z)}{2} = \frac{(x + z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úpravě} \quad x^2 = z^2.$$

Platí tedy $z = -x$ nebo $z = x$. Dosazením do rovnosti $x + z - 2y = 0$ v prvním případě dostaneme $y = 0$, ve druhém případě $y = x$. Odpovídající trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) jsou řešeními pro každé reálné x (první z nich jsme ovšem našli již v části a)).

B – I – 3

Označme a velikost stran AB a CD a v vzdálenost jejich přímek, která je zároveň rovna výšce trojúhelníku AFD z vrcholu A (obr. 9). Z podmínky $EF \parallel BD$ podle věty uu vyplývá, že trojúhelníky BCD a ECF jsou podobné; označme $k \in (0,1)$ koeficient jejich podobnosti. Jakmile ho vypočteme, bude úloha vyřešena.



Obr. 9

Protože $|FC| = ka$, $|FD| = (1-k)a$ a výšky trojúhelníků ECF, ABE ze společného vrcholu E mají velikosti kv, resp. $(1-k)v$, pro obsahy trojúhelníků AFD a ABE platí

$$S_{AFD} = \frac{(1-k)av}{2} = \frac{a(1-k)v}{2} = S_{ABE},$$

takže oba obsahy se rovnají pro libovolné $k \in (0,1)$. Protože obsah trojúhelníku ECF má hodnotu $S_{ECF} = \frac{1}{2}ka \cdot kv = \frac{1}{2}k^2av$ a obsah celého rovnoběžníku $ABCD$ je dán vzorcem $S_{ABCD} = av$, můžeme obsah trojúhelníku AEF vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ECF} - S_{AFD} = \\ &= av\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-k) - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}(1-k)\right) = av\left(k - \tfrac{1}{2}k^2\right). \end{aligned}$$

Obsahy trojúhelníků ABE, AFD proto budou shodné s obsahem trojúhelníku AEF, právě když bude platit

$$\tfrac{1}{2}(1-k) = k - \tfrac{1}{2}k^2 \quad \text{neboli} \quad k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má kořeny

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

z nichž podmínce $k \in (0,1)$ vyhovuje pouze kořen $k = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Dodejme, že pro takové k platí

$$1 - k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{k}{1 - k}.$$

Odpověď. Hledané body E, F jsou určeny poměry

$$|CE| : |EB| = |CF| : |FD| = \left(\sqrt{5} - 1\right) : 2.$$

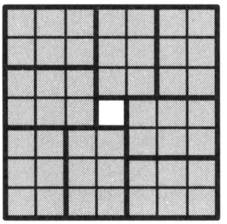
Poznámka. Rovnost $(1-k) : 1 = k : (1-k)$ ze závěru řešení znamená, že body E, F dělí příslušné strany rovnoběžníku v tzv. *zlatém poměru.* Vyjadřují to rovnosti

$$|CE| : |EB| = |EB| : |BC| \quad \text{a} \quad |CF| : |FD| = |FD| : |DC|.$$

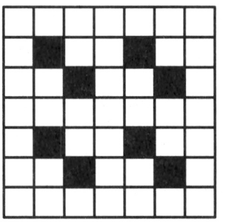
B – I – 4

Podle obr. 10 můžeme na desku umístit 8 disjunktních obdélníků 2×3 (střední políčko desky zůstane prázdné). Abychom jistě zasáhli loď, musíme se zeptat na alespoň jedno políčko v každém z osmi vyznačených obdélníků, proto je nutný počet otázek alespoň 8.

Na obr. 11 je uveden příklad výběru osmi polí, na která se stačí ptát, aby se už mimo ně nedala na desku umístit žádná loď 2×3. Proto těchto 8 otázek k zasažení lodě vždy stačí.



Obr. 10



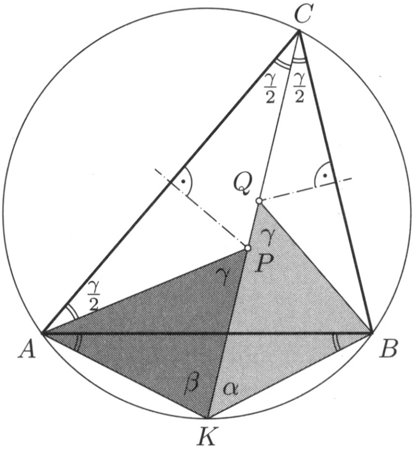
Obr. 11

Z obou uvedených úvah plyne následující závěr.

Odpověď. Nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli, je právě 8.

B – I – 5

Označme α, β, γ obvyklým způsobem velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (obr. 12). Bod K leží na ose úsečky AB, proto $|AK| = |KB|$. Trojúhelník AKB je rovnoramenný se základnou AB, jeho vnitřní úhly



Obr. 12

při vrcholech A a B jsou tudíž shodné. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné i úhly BCK a BAK, resp. ACK a ABK, jsou proto shodné i úhly BCK a ACK. Polopřímka CK je tudíž osou úhlu ACB:

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Protože bod P leží na ose strany AC, je trojúhelník ACP rovnoramenný a jeho vnitřní úhly při základně AC mají velikost $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vnější úhel APK při vrcholu P má velikost $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Stejně tak z rovnoramenného trojúhelníku BCQ usoudíme, že i velikost úhlu BQK je γ. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné úhly ABC a AKC, tedy úhel AKC (neboli úhel AKP) má velikost β a — zcela analogicky — úhel BKQ má velikost α.

V každém z trojúhelníků AKP a BKQ již známe velikosti dvou vnitřních úhlů (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zbývající úhly KAP a KBQ mají velikosti α, resp. β.

Z předchozího plyne, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, neboť mají shodné strany AK a KB i obě dvojice k nim přilehlých vnitřních úhlů.

K uvedenému postupu dodejme, že výpočet úhlů KAP a KBQ přes úhly APK a BQK lze obejít takto: shodnost úhlů KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) plyne ze shodnosti úhlů KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

B – I – 6

Nejprve si všimneme, že jmenovatel zlomku lze postupným vytýkáním rozložit na součin $(m+2)(n-1)$. Proto bude výhodné položit $a = m+2$, $b = n-1$ a pro nová neznámá (nenulová!) celá čísla a, b zkoumat, kdy je hodnota daného výrazu

$$V = \frac{m+3n-1}{mn+2n-m-2} = \frac{(a-2)+3(b+1)-1}{ab} = \frac{a+3b}{ab}$$

(jak vyžaduje zadání) *celé kladné* číslo (používejme dále obvyklý termín *přirozené číslo*). Uveďme dva možné přístupy k řešení takové otázky.

Při prvním způsobu využijeme rozkladu

$$V = \frac{a+3b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{3}{a}$$

a zřejmých odhadů

$$0 < \left|\frac{1}{b}\right| \leqq 1, \qquad 0 < \left|\frac{3}{a}\right| \leqq 3.$$

Kdyby platilo $a < 0$, bylo by $3/a < 0$, a tudíž $V < 1/b \leqq 1$, tedy V by nebylo přirozené číslo. Proto nutně platí $a > 0$.

Pro $a > 6$ je $3/a < \frac{1}{2}$, a tedy $V < 1/b + \frac{1}{2}$, takže nerovnost $V \geqq 1$ platí, jedině když $1/b > \frac{1}{2}$, což splňuje jediné celé b, totiž $b = 1$, pro které pak ovšem je $1 < V < \frac{3}{2}$. Proto musí platit $1 \leqq a \leqq 6$. Těchto šest možností jednotlivě rozebereme:

- ▷ $a = 1$. Číslo $V = 3 + 1/b$ je celé jedině pro $b = \pm 1$, kdy je i kladné. V původních neznámých dostáváme dvě řešení $(m,n) = (-1,2)$ a $(m,n) = (-1,0)$.
- ▷ $a = 2$. Číslo $V = \frac{3}{2} + 1/b$ je přirozené, právě když $b = \pm 2$; odpovídající řešení jsou $(m,n) = (0,3)$ a $(m,n) = (0,-1)$.
- ▷ $a = 3$. Číslo $V = 1 + 1/b$ je přirozené, právě když $b = 1$, tehdy $(m,n) = (1,2)$.

▷ $a = 4$. Číslo $V = \frac{3}{4} + 1/b$ je přirozené, právě když $b = 4$, tehdy $(m, n) = (2, 5)$.

▷ $a = 5$. Číslo $V = \frac{3}{5} + 1/b$ zřejmě není celé pro žádné celé b.

▷ $a = 6$. Číslo $V = \frac{1}{2} + 1/b$ je přirozené, právě když $b = 2$, tehdy $(m, n) = (4, 3)$.

Odpověď. Existuje právě 7 dvojic celých čísel (m, n), pro které je hodnota daného výrazu V celým kladným číslem, jsou to dvojice

$$(m, n) \in \{(-1, 2), (-1, 0), (0, 3), (0, -1), (1, 2), (2, 5), (4, 3)\}.$$

Jiné řešení. Hledáme nenulová celá a, b, pro něž $a + 3b = kab$ pro vhodné přirozené k. Označme $d \geqq 1$ největší společný dělitel takových čísel a, b. Pak $a = xd$ a $b = yd$ pro celá nesoudělná čísla x, y, jež splňují rovnici $(x + 3y)d = kxyd^2$ neboli $x + 3y = kxyd$. Odtud plyne, že číslo y dělí nesoudělné číslo x. To je možné, jedině když $y = \pm 1$.

V případě $y = 1$ máme rovnici $x + 3 = kxd$ neboli $3 = x(kd - 1)$. Protože platí $kd \geqq 1$ (čísla k, d jsou přirozená), je buď $x = 1$ a $kd - 1 = 3$ (pak $kd = 4$, a tedy $d \in \{1, 2, 4\}$, takže $(a, b) = (d, d)$ je jedna z dvojic $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$), nebo je $x = 3$ a $kd - 1 = 1$ (pak $kd = 2$, a tedy $d \in \{1, 2\}$, takže $(a, b) = (3d, d)$ je jedna z dvojic $(3, 1)$, $(6, 2)$).

V případě $y = -1$ máme rovnici $x - 3 = -kxd$ neboli $3 = x(1 + kd)$, což vzhledem k nerovnosti $1 + kd \geqq 2$ znamená, že $x = 1$ a $1 + kd = 3$, takže je $kd = 2$, a tedy $d \in \{1, 2\}$, proto $(a, b) = (d, -d)$ je jedna z dvojic $(1, -1)$, $(2, -2)$.

Zjistili jsme, že existuje sedm vyhovujících dvojic (a, b), vypsat odpovídající řešení $(m, n) = (a - 2, b + 1)$ je už nasnadě (viz odpověď výše).

B – S – 1

Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $2x = 2a + 1$, odečtením druhé rovnice od třetí $2y = -2a + 1$. Odtud vyjádříme

$$x = a + \tfrac{1}{2}, \quad y = -a + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

a dosadíme do první rovnice původní soustavy. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$a^2 - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{2} = 0, \tag{2}$$

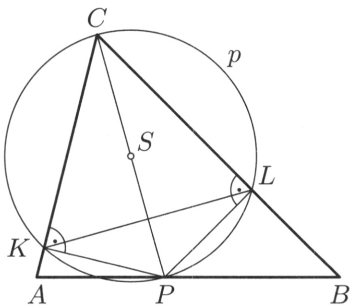
která má kořeny $a_1 = -1$ a $a_2 = \frac{3}{2}$. Pro každou z těchto dvou (jedině možných) hodnot parametru a již snadno stanovíme neznámé x a y dosazením do vzorců (1).

Daná soustava rovnic má řešení pouze pro dvě hodnoty parametru a, jednak pro $a = -1$, kdy je jejím jediným řešením $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, jednak pro $a = \frac{3}{2}$, kdy $(x, y) = (2, -1)$.

Zkouška dosazením je snadná, lze ji vynechat takovým zdůvodněním: Soustava dvou rovnic, kterou jsme dostali (a vyřešili) sečtením a odečtením druhé a třetí rovnice, je s touto dvojicí původních rovnic ekvivalentní. Zbylá (první) rovnice soustavy je pak ekvivalentní s kvadratickou rovnicí (2), jejímž řešením jsme našli možné hodnoty parametru a.

B – S – 2

Označme S střed úsečky CP. Podle Thaletovy věty leží body K a L na kružnici p sestrojené nad průměrem CP. Předpokládejme, že bod P má požadovanou vlastnost, tj. že průměr CP půlí tětivu KL (obr. 13).



Obr. 13

Průměr libovolné kružnice půlí každý jiný průměr téže kružnice a také všechny tětivy k němu kolmé. A žádnou jinou tětivu půlit nemůže: když totiž prochází dvěma *různými* body její osy souměrnosti (totiž středem tětivy a středem kružnice), musí být — stejně jako tato osa — k dané tětivě kolmý.

Tětiva KL ovšem nemůže být průměrem kružnice p, protože podle Thaletovy věty by byl úhel KCL (a tedy i úhel ACB) pravý, což odporuje zadání, proto je tětiva KL k průměru CP kolmá. V tomto případě jsou trojúhelníky CKP a CLP souměrně sdruženy podle přímky CP, odkud již plyne, že úhly KCP a LCP jsou shodné. Polopřímka CP je tedy osou úhlu ACB.

Je-li naopak polopřímka CP osou úhlu ACB, shodují se pravoúhlé trojúhelníky CKP a CLP ve společné přeponě CP a ve dvou vnitřních úhlech, takže body K a L jsou souměrně sdruženy podle přímky CP. Proto tětiva CP půlí úsečku KL.

Odpověď. Existuje právě jeden vnitřní bod strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC, pro který úsečka CP půlí úsečku KL. Je to průsečík osy vnitřního úhlu při jeho vrcholu C se stranou AB.

B – S – 3

Každé trojmístné číslo má vyjádření $m = 100a+10b+c$, kde $a, b, c, a \neq 0$, jsou jeho číslice. Trojmístné číslo zapsané stejnými číslicemi v opačném pořadí má pak vyjádření $m' = 100c + 10b + a$, $c \neq 0$. Protože na pořadí čísel m a m' není brán zřetel, pro určitost předpokládejme, že $m \leqq m'$ neboli $a \leqq c$, kde $a, c \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Pro magické číslo x podle zavedeného označení číslic platí

$$x = m + m' = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že hodnota x nezáleží tolik na jednotlivých číslicích a a c jako na jejich součtu $s = a + c$, který může nabývat hodnot $s \in \{2, 3, \ldots, 18\}$. Dále už budeme pracovat pouze s vyjádřením $x = 101s + 20b$.

Předpokládejme na okamžik, že se jako součet $101s + 20b$ dá některé magické číslo x zapsat dvěma různými způsoby:

$$x = 101s + 20b = 101s' + 20b'. \tag{1}$$

Z rovnosti $101(s - s') = 20(b - b')$ a nesoudělnosti čísel 101 a 20 vyplývá, že číslo 101 musí dělit číslo $b - b'$. Protože však b a b' jsou číslice, platí $-9 \leqq b - b' \leqq 9$. V tomto intervalu najdeme jediné číslo dělitelné číslem 101, a to číslo 0. Je proto $b - b' = 0$ neboli $b = b'$, a tudíž i $s = s'$. To však odporuje předpokladu, že číslo x má dvě různá vyjádření tvaru (1). Znamená to, že ve vyjádření $x = 101s + 20b$ má každé magické číslo x jednoznačně určenou číslici b i jednoznačně určený součet s.

Počet způsobů, kterými lze magické číslo vyjádřit jako součet $m + m'$ neboli $101s + 20b$, se proto rovná počtu způsobů, kterými lze vyjádřit odpovídající hodnotu s jako součet dvou číslic a a c, kde $1 \leqq a \leqq c \leqq 9$. V množině $\{2, 3, \ldots, 18\}$ má největší počet takových vyjádření číslo $s =$ $= 10$, jež se dá vyjádřit právě pěti vyhovujícími součty:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ostatní čísla mají takových vyjádření méně.

Skutečně: v případě $s \leqq 9$ z rovnosti $a + c \leqq 9$ a předpokladu $a \leqq c$ plyne $a \leqq 4$, takže menší číslice a nabývá nejvýše čtyř hodnot stejně jako větší číslice c v případě $s \geqq 11$, kdy ze vztahů $a + c \geqq 11$ a $a \leqq c$ plyne $c \geqq 6$.

Nejvíce (pěti) součty $m + m'$ se dají vyjádřit magická čísla tvaru $101 \cdot 10 + 20b$, kde $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, jedná se tedy o čísla z desetiprvkové množiny

$$\{1\,010, 1\,030, 1\,050, \ldots, 1\,190\}.$$

B – II – 1

Sečtením první a druhé rovnice dané soustavy dostaneme $2x = 1 + a$, odečtením druhé rovnice od první $2y = 1 - a$. Odtud

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \qquad y = \frac{1}{2}(1 - a). \tag{1}$$

Dosadíme-li za x a y do třetí rovnice původní soustavy, dostaneme rovnici

$$-2a(1 + a) + 2(1 - a) = z^2 + 4 \quad \text{neboli} \quad z^2 + 2a^2 + 4a + 2 = 0,$$

kterou upravíme na tvar

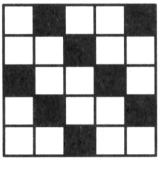
$$z^2 + 2(a + 1)^2 = 0.$$

Oba sčítanci na levé straně poslední rovnice jsou nezáporná čísla. Jejich součet je 0, právě když $z = 0$, $a = -1$. Dosazením těchto hodnot do (1) dostaneme $x = 0$, $y = 1$.

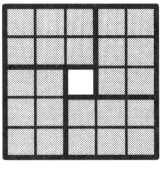
Závěr: Daná soustava rovnic má řešení pouze pro $a = -1$, a to $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Zkouška při tomto postupu není nutná.

B – II – 2

a) Stačí se otázat například na černá pole v obr. 14: v každém řádku i sloupci jsou vedle sebe nejvýše dvě bílá pole, zatímco každá z lodí zabere v jednom z obou směrů právě tři po sobě stojící pole. Aspoň jedno z nich tedy bude černé.



Obr. 14

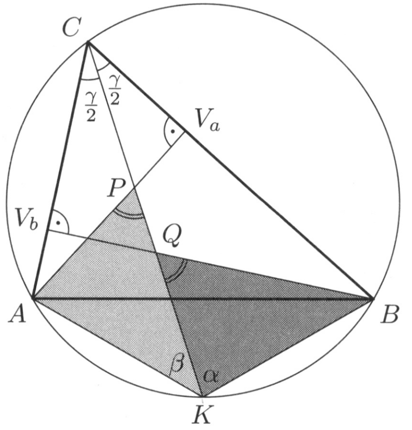


Obr. 15

b) K zásahu lodě na desce o rozměrech 3×2 jsou potřeba alespoň dvě otázky, protože žádné její pole neleží ve všech lodích, které na tuto desku můžeme umístit. Na desce 5×5 můžeme vymezit čtyři nepřekrývající se oblasti 3×2 (obr. 15). I kdyby loď byla umisťována pouze do těchto čtyř oblastí, sedm otázek na její zásah nestačí — podle předchozí úvahy totiž potřebujeme aspoň $4 \times 2 = 8$ otázek.

B – II – 3

Označme vnitřní úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Ze shodnosti obvodových úhlů ACK a BCK v kružnici opsané trojúhelníku ABC plyne shodnost odpovídajících tětiv AK a BK, takže bod K půlí ten z oblouků AB, který leží proti vrcholu C (obr. 16). Podle věty o obvodových úhlech jsou velikosti úhlů AKC a BKC po řadě rovny β a α. Označme V_a, V_b paty výšek příslušných vrcholům A, B trojúhelníku ABC. Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, jsou body V_a a V_b vnitřní body odpovídajících stran. Velikost úhlu APK je shodná s velikostí vnitřního úhlu při vrcholu P v pravoúhlém trojúhelníku CPV_a, je tedy rovna $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Stejnou velikost má analogicky i úhel BQK.



Obr. 16

Trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah, shodné strany AK a BK, a tudíž i výšky na ně, a navíc se shodují i v úhlu proti nim. Z konstrukce trojúhelníku podle dané strany, výšky na tuto stranu a protilehlého vnitřního úhlu a ze souměrnosti sestrojených řešení plyne, že trojúhelník AKP je shodný buď s trojúhelníkem KBQ, anebo s trojúhelníkem BKQ. Jelikož trojúhelník ABC není rovnoramenný (tj. $\alpha \neq \beta$), je trojúhelník AKP shodný s trojúhelníkem KBQ. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku PAK je $180° - \beta - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = 90° - \beta + \frac{1}{2}\gamma$, takže z uvedené shodnosti plyne

$$90° - \beta + \frac{\gamma}{2} = \alpha \qquad \text{neboli} \qquad 90° + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Odtud dostáváme $\gamma = 60°$. Naopak pokud $\gamma = 60°$, je $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle BQK| = 60°$ a trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, mají tedy stejný obsah.

Závěr: Úhel ACB má velikost $60°$.

B – II – 4

Uvažujme přirozené číslo $n < 25\,000$ a označme $r_2, r_3, \ldots, r_{11}$ odpovídající mu zbytky po dělení čísly $2, 3, \ldots, 11$. Jako součet nezáporných zbytků je příslušný součet $z = r_2 + r_3 + \ldots + r_{11}$ rovněž nezáporný. V daném případě však nemůže být roven 0, protože to by znamenalo, že číslo n je dělitelné každým z prvků množiny $\mathsf{M} = \{2, 3, 4, \ldots, 11\}$, jejichž nejmenší společný násobek je $27\,720 > 25\,000$.

Ukážeme, že nejmenší možný součet je 1, a zároveň najdeme i všechna čísla n menší než 25 000 s touto vlastností.

Je-li příslušný součet roven 1, jsou všechny zbytky r_k s výjimkou jednoho rovny 0, a existuje tedy právě jedno $d \in \mathsf{M}$ tak, že $r_d = 1$. Ukážeme, že $d = 7$ nebo $d = 11$. Nemůže zřejmě být $d \leqq 5$, to by totiž nenulový zbytek odpovídal i číslu $2d \in \mathsf{M}$. Kdyby zbytek 1 odpovídal jednomu z čísel $d = 6, 8, 9, 10$, odpovídal by nutně i jednomu z čísel 2 nebo 3.

Pokud $d = 7$, musí být hledané číslo násobkem všech čísel z $\mathsf{M} \setminus \{7\}$, tedy násobkem čísla 3 960. Toto číslo dává při dělení 7 zbytek 5, zbytek 1 dává jeho trojnásobek $n = 3 \cdot 3\,960 = 11\,880$, který vyhovuje podmínkám úlohy, a obecně každý $(3 + 7a)$-násobek; ovšem další násobek $10 \cdot 3\,960$ s vyhovujícím zbytkem je už větší než 25 000.

Pokud $d = 11$, musí být hledané číslo násobkem všech čísel z $\mathsf{M} \setminus \{11\}$, tedy násobkem čísla 2 520. Protože toto číslo dává při dělení 11 zbytek 1, vyhovuje pro $d = 11$ jedině ono (další násobek $(1+11) \cdot 2\,520$ s vyhovujícím zbytkem je totiž už větší než 25 000).

Závěr: Hledaná čísla jsou dvě, a to 11 880 a 2 520.