Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2\sin x\cos(x+y)+\sin y=1,$$
$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 2

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 3

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo. (*Ján Mazák*)

A – I – 4

Uvažujme nekonečnou aritmetickou posloupnost

$$a, a+d, a+2d, \ldots, \qquad (*)$$

kde a, d jsou přirozená (tj. kladná celá) čísla.

a) Najděte příklad posloupnosti (*), která obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel pro všechna $k=2,3,\ldots$

b) Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla pro žádné $k = 2, 3, \ldots$

c) Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečně mnoho třetích mocnin přirozených čísel.

d) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Posloupnost $(*)$ buď neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla, anebo obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel.

(*Jaroslav Zhouf*)

A – I – 5

V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:

a) na 8 hromádek po 251 minci,

b) na 251 hromádek po 8 mincích. (*Radek Horenský*)

A – I – 6

Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB. (*Ján Mazák*)

A – S – 1

Zjistěte, pro které dvojice kladných celých čísel m a n platí

$$\sqrt{m^2 - 4} < 2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2 - 2}.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – S – 2

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 45°. Označme D patu výšky z vrcholu C. Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD. Dokažte tvrzení: Přímky AP a BC jsou navzájem kolmé, právě když úsečky AP a BC jsou shodné.

(*Jaroslav Švrček*)

A – S – 3

Určete všechna celá čísla větší než 1, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru

$$\frac{3p-q}{5p+2q},$$

kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. (*Vojtech Bálint*)

A – II – 1

Jisté čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Zapíšeme-li jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší čtyřmístné číslo, které je rovněž dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo. (*Jaromír Šimša*)

A – II – 2

Na odvěsnách délek a, b pravoúhlého trojúhelníku leží po řadě středy dvou kružnic k_a, k_b. Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a, ϱ_b. Určete největší kladné reálné číslo p takové, že nerovnost

$$\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky. (*Jaroslav Švrček*)

A – II – 3

Určete velikosti vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku, pro něž platí

$$2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha=1,$$
$$2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)-\cos\beta=0.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – II – 4

Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolme bod D a uvnitř úsečky AD bod P tak, aby neležel na těžnici z vrcholu C. Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku CPD v bodě, který označíme K ($K \neq C$). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKP prochází kromě bodu A dalším pevným bodem, který na výběru bodů D a P nezávisí. (*Tomáš Jurík*)

A – III – 1

Jsou-li všechna čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, je číslo $6p+11$ složené. Dokažte. (*Pavel Novotný*)

A – III – 2

Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. (*Tomáš Jurík*)

A – III – 3

Najděte nejmenší kladné číslo x, pro něž platí: Jsou-li a, b, c, d libovolná kladná čísla, jejichž součin je 1, potom

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(*Pavel Novotný*)

A – III – 4

Zkoumejme, pro která přirozená čísla n existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že číslo $n+k$ je dělitelem čísla $n+k^2$.

a) Ukažte, že vyhovuje $n = 58$, a najděte příslušná čtyři k.

b) Dokažte, že sudé $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje, právě když p i $2p+1$ jsou prvočísla.

(Nulu mezi přirozená čísla nepočítáme.) (*Jaromír Šimša*)

A – III – 5

V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí.

(*Radek Horenský*)

A – III – 6

V rovině ω jsou dány dva různé body O a T. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O. (*Jaromír Šimša*)

Řešení úloh

A – I – 1

Použitím známých vzorců

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

dostaneme úpravou levé strany první rovnice

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos(x+y) + \sin y &= 2\sin x(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \sin y = \\ &= 2\sin x \cos x \cos y + (1 - 2\sin^2 x)\sin y = \\ &= \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y = \\ &= \sin(2x+y). \end{aligned}$$

Podobně je levá strana druhé rovnice rovna $\sin(2y+x)$. Daná soustava je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} \sin(2x+y) &= 1, \\ \sin(2y+x) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože funkce sinus nabývá hodnotu 1 právě v bodech tvaru $\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo, budou řešením soustavy právě ty dvojice (x, y), pro něž existují celá čísla k, l taková, že

$$2x + y = \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi, \qquad 2y + x = \tfrac{1}{2}\pi + 2l\pi. \tag{2}$$

Odtud buď odečtením vhodných násobků rovnic (např. od dvojnásobku první odečteme druhou), anebo přímým vyjádřením jedné proměnné z první rovnice a dosazením do druhé rovnice po úpravě dostaneme

$$x = \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2}{3}(2k - l)\pi, \qquad y = \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2}{3}(2l - k)\pi.$$

Řešením soustavy jsou tedy dvojice $\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2k-l)\pi, \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2l-k)\right)$, kde k, l jsou libovolná celá čísla. Není nutné dělat zkoušku, neboť z uvedeného postupu vyplývá, že takovéto dvojice (x, y) splňují vztahy (2), a tedy i soustavu (1), která je zadané soustavě ekvivalentní.

Poznámka. Uvedený výsledek se dá zapsat i jinak. Vzhledem k tomu, že $y - x = \frac{1}{3}(6l - 6k)\pi = 2(l-k)\pi$, můžeme pro $m = l - k$, $n = 2k - l$ psát

$x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}n\pi$, $y = x + 2m\pi$, řešením jsou tedy dvojice $(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}n\pi, \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}n\pi + 2m\pi)$, kde m, n jsou libovolná celá čísla. (Pokud k, l probíhají všechny možné dvojice celých čísel, platí to i pro čísla m, n.)

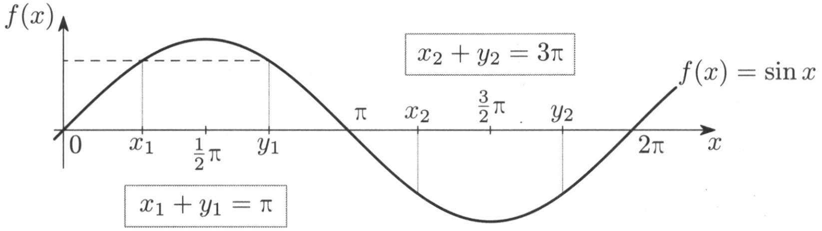
Jiné řešení. Pokud je řešením dané soustavy dvojice (x, y), jsou díky periodicitě funkcí sinus a kosinus s periodou 2π zřejmě řešením i všechny dvojice $(x + 2k\pi, y + 2l\pi)$ (k, l jsou libovolná celá čísla). Budeme tedy soustavu řešit jen v oboru $\langle 0, 2\pi)$ a na konci nalezená řešení „posuneme“ o $(2k\pi, 2l\pi)$, abychom získali obecné řešení.

Odečtením rovnic soustavy získáme po rozkladu levé strany na součin rovnici

$$(\sin x - \sin y)\bigl(2\cos(x + y) - 1\bigr) = 0.$$

Rozlišíme dva případy podle toho, který z činitelů je nulový.

I. Jestliže $\sin x = \sin y$, máme vzhledem k podmínce $x, y \in \langle 0, 2\pi)$ tři možnosti: buď $x = y$, anebo $x + y = \pi$, anebo $x + y = 3\pi$ (obr. 17).



Obr. 17

Pro $x = y$ po dosazení do původní soustavy získáme jedinou rovnici

$$2\sin x \cos 2x + \sin x = 1.$$

Z ní použitím vzorce $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ a po substituci $\sin x = t$ ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sin x &= 1,\\ 2t(1 - 2t^2) + t &= 1,\\ 4t^3 - 3t + 1 &= 0,\\ (t + 1)(2t - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Při poslední úpravě jsme „uhodli“ kořen $t = -1$ a rozklad na součin získali vydělením mnohočlenu $4t^3 - 3t + 1$ kořenovým činitelem $t + 1$.

Vzhledem k použité substituci $t = \sin x$ jsou řešením poslední rovnice ta $x \in \langle 0, 2\pi)$, pro která buď $\sin x = -1$, anebo $\sin x = \frac{1}{2}$, takže $x \in \in \{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\}$. Ve zkoumaném oboru jsou řešením dané soustavy dvojice $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ a $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Pro $x + y = \pi$ či $x + y = 3\pi$ máme $\cos(x + y) = -1$. Dosazením do původní soustavy (vzhledem k předpokladu $\sin x = \sin y$) získáme jedinou rovnici $\sin x = -1$, a tedy i $\sin y = -1$. Ve zkoumaném oboru tak dostáváme jediné řešení $x = y = \frac{3}{2}\pi$, které jsme našli už prve.

II. Jestliže $2\cos(x + y) - 1 = 0$ neboli $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, je $x + y = = \pm\frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ pro nějaké celé k a některé znaménko. Po dosazení do původní soustavy dostaneme jedinou rovnici $\sin x + \sin y = 1$, která díky periodě 2π funkce sinus a následujícímu užití známého vzorce $\sin(a \pm b) = = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$, podle něhož

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin(\pm\tfrac{1}{3}\pi + 2k\pi - x) = \sin(\pm\tfrac{1}{3}\pi - x) = \\ &= \sin(\pm\tfrac{1}{3}\pi)\cos x - \cos(\pm\tfrac{1}{3}\pi)\sin x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x, \end{aligned}$$

přejde do tvaru (zmíněný vzorec uplatníme ještě jednou)

$$1 = \sin x + \sin y = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x = \sin(x \pm \tfrac{1}{3}\pi).$$

Ve zkoumaném oboru tak dostáváme $x \pm \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi$, takže buď (při „horním“ znaménku) $x = \frac{1}{6}\pi$, což vzhledem k rovnosti $y = \frac{1}{3}\pi - x + 2k\pi$ dá jedině $y = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi$), nebo (při „dolním“ znaménku) $x = \frac{5}{6}\pi$ a analogicky dostaneme jediné $y = \frac{5}{6}\pi$. V případě II tedy neexistují jiná řešení než ta, jež jsme objevili už v případě I.

Závěr. Řešením v oboru $\langle 0, 2\pi)$ jsou dvojice $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. V oboru reálných čísel to pak jsou dvojice

$$(\tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi, \tfrac{1}{6}\pi + 2l\pi), \quad (\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, \tfrac{5}{6}\pi + 2l\pi), \quad (\tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, \tfrac{3}{2}\pi + 2l\pi),$$

kde k a l jsou libovolná celá čísla.

Poznámka. Naznačme ještě jeden možný začátek řešení založený na tom, že z rovnic zadané soustavy vyloučíme společný „složitý“ člen $\cos(x + y)$. Dosáhneme toho, když první rovnici vynásobíme $\sin y$, druhou rovnici vynásobíme $\sin x$ a vzniklé rovnice odečteme. Dostaneme tak rovnici

$$\sin^2 y - \sin^2 x = \sin y - \sin x,$$

po úpravě

$$(\sin x - \sin y)(1 - \sin x - \sin y) = 0.$$

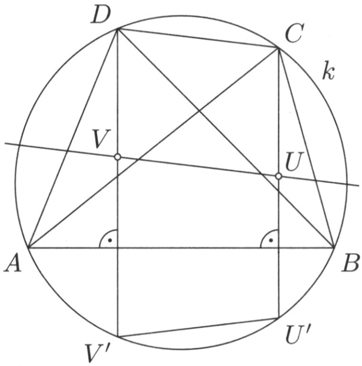
Musí tedy platit $\sin x = \sin y$ nebo $\sin x + \sin y = 1$. V prvním případě dále postupujeme jako v předchozím řešení, ve druhém případě po dosazení $\sin y = 1 - \sin x$ do první rovnice dané soustavy dostaneme první z rovnic

$$\bigl(2\cos(x+y) - 1\bigr)\sin x = 0, \qquad \bigl(2\cos(x+y) - 1\bigr)\sin y = 0,$$

druhou pak odvodíme obdobně. Protože aspoň jeden sčítanec v rovnosti $\sin x + \sin y = 1$ musí být nenulový, vedou předchozí rovnice k závěru, že $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$, takže opět můžeme postupovat stejně jako v předchozím řešení.

A – I – 2

Označme k kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Průsečíky výšek trojúhelníků ABC a ABD označme postupně U a V (obr. 18).



Obr. 18

Je známo, že *obraz průsečíku výšek v osové souměrnosti podle strany daného trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.* To znamená, že obraz U' bodu U v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k, která je trojúhelníku ABC opsána. (To platí i pro tupoúhlý trojúhelník ABC.) Podobně leží na kružnici k i obraz V' bodu V v téže osové souměrnosti.

Předpokládejme, že trojúhelníky ABC a ABD jsou ostroúhlé. Body U a V tedy leží v polorovině ABC. Obě kolmice CU' a DV' na stranu

AB jsou rovnoběžné, takže čtyřúhelník $CU'V'D$ je tětivový lichoběžník, který je nutně rovnoramenný. Odtud a z vlastností osové souměrnosti dostáváme rovnosti

$$|\sphericalangle CDV'| = |\sphericalangle U'V'D| = |\sphericalangle UVV'|.$$

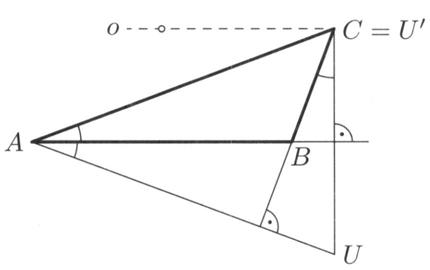
Protože body C a U leží v téže polorovině vzhledem k přímce $V'D$, jsou přímky CD a UV rovnoběžné, což jsme měli dokázat. (V poslední úvaze jsme využili, že body D, V, V' leží na přímce v tomto pořadí.)

V případě, kdy je aspoň jeden z trojúhelníků ABC a ABD tupoúhlý, je argumentace velmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoří rovnoramenný lichoběžník, i když ne nutně s vrcholy v uvedeném pořadí.

Jiné řešení. Pokud je AB průměrem kružnice k opsané danému tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$, jsou zřejmě oba trojúhelníky ABC a ABD pravoúhlé, takže platí $U = C$, $V = D$ a není co dokazovat.

V opačném případě uvažme osu o kružnice k rovnoběžnou se stranou AB, $o \neq AB$. Jak už víme, obrazy U' a V' bodů U a V v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k opsané oběma trojúhelníkům ABC a ABD. Obě tětivy CU' i DV' jsou kolmé na osu o, takže body C a D jsou obrazy bodů U' a V' v osové souměrnosti podle osy o. To znamená, že úsečka CD je obrazem úsečky UV ve složení obou uvedených osových souměrností. Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je ovšem posunutí, takže $CD \parallel UV$. Tím je tedy tvrzení úlohy dokázáno.

Jsou to opravdu tětivy? Pokud je příslušný trojúhelník ABC či ABD ostroúhlý, není o tom pochyb. Podobně i v případě tupého úhlu při vrcholu C (a tedy i D); v obou případech jsou body C, U' i D, V' odděleny přímkou AB. Zbývá možnost, kdy je tupý úhel při jednom z vrcholů A nebo B (s ohledem na symetrii rozebereme pouze druhou možnost, obr. 19). Je-li $C = U'$, je trojúhelník UCA souměrný podle přímky AB,



Obr. 19

takže $|\sphericalangle BCU| = |\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle CAB|$. Z rovnosti obvodového (CAB) a úsekového (BCU) úhlu tětivy BC nyní plyne, že výška CU je tečnou opsané kružnice, bod $C = U'$ tak leží na ose o (je samodružným bodem zmíněné osové souměrnosti) a postup popsaný v předchozím odstavci je naprosto korektní.

Jiné řešení. Uvažujme tětivu AB dané kružnice k. Pro libovolný bod C na jednom z oblouků AB kružnice k označme U průsečík výšek příslušného trojúhelníku ABC. Ukážeme, že délka úsečky CU nezávisí na poloze bodu C na zvoleném oblouku AB.

Pokud je AB průměr dané kružnice, je $C = U$ a uvedené tvrzení zřejmě platí. V opačném případě je $U \neq C$. Označme K patu výšky z vrcholu A na stranu BC a L patu výšky z vrcholu C na stranu AB. Výšky AK a CL zřejmě svírají stejný úhel jako přímky BC a AB, k nimž jsou kolmé. To znamená, že úhly CUK a ABC mají stejný sinus. Z pravoúhlých trojúhelníků UKC a AKC tak máme (při označení velikostí stran a úhlů obvyklým způsobem)

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin|\sphericalangle CUK|} = \frac{b|\cos\gamma|}{\sin\beta} = \frac{c|\cos\gamma|}{\sin\gamma},$$

přičemž poslední rovnost plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC. Délka úsečky CU tedy závisí jen na délce úsečky AB a na velikosti příslušného obvodového úhlu ACB. Protože úsečka AB i oblouk kružnice jsou dány, délka úsečky CU se nemění.

Vrcholy C a D daného čtyřúhelníku leží na témže oblouku AB opsané kružnice. Podle předchozí úvahy jsou tedy úsečky CU a DV stejně dlouhé. Coby výšky na tutéž stranu jsou navíc rovnoběžné, a to souhlasně (podle toho, zda je úhel γ ostrý nebo tupý, má vektor $\boldsymbol{CU}$ stejný směr jako $\boldsymbol{CL}$ či opačný). Čtyřúhelník $CDVU$ je tedy rovnoběžník, což znamená, že přímky CD a VU jsou rovnoběžné.

A – I – 3

Předpokládejme, že přirozená čísla x, y a prvočíslo p vyhovují rovnici

$$\frac{xy^2}{x+y} = p. \tag{1}$$

Největší společný dělitel čísel x, y označme d. Potom $x = da$ a $y = db$, kde přirozená čísla a, b jsou (již) nesoudělná. Po dosazení do rovnosti (1), odstranění zlomku násobením a po vydělení kladným číslem d dostaneme

$$d^2ab^2 = p(a + b). \tag{2}$$

Čísla a a b jsou nesoudělná, proto jsou taková i čísla b^2, $a + b$ z různých stran rovnosti (2). To podle známého pravidla[1] znamená, že $b^2 \mid p$. Prvočíslo p má pouze dva dělitele: čísla 1 a p, druhé z nich však není druhou mocninou, proto nutně platí $b = 1$. Po dosazení do (2) obdržíme

$$d^2a = p(a + 1). \tag{3}$$

Zopakujme podobnou úvahu jako dříve. Protože a dělí levou stranu rovnosti (3), dělí i její pravou stranu, což vzhledem ke zřejmé nesoudělnosti čísel a, $a + 1$ vede k závěru, že $a \mid p$. Platí proto buď $a = 1$, nebo $a = p$. Oba případy nyní posoudíme odděleně.

Po dosazení $a = 1$ do (3) dostaneme $d^2 = 2p$. Protože p je prvočíslo, číslo $2p$ je druhou mocninou jedině v případě $p = 2$. Potom rovněž platí $d = 2$ a výsledek vede k první vyhovující dvojici $x = da = 2$, $y = db = 2$.

Po dosazení $a = p$ do (3) a vydělení kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$ neboli $p = (d + 1)(d - 1)$. Takový rozklad prvočísla p na dva činitele $(d - 1 < d + 1)$ je jediný: $d - 1 = 1$ a $d + 1 = p$. Odtud dostáváme $d = 2$, $p = 3$, takže druhá vyhovující dvojice je $x = da = dp = 6$ a $y = db = 2$.

I když můžeme provést zkoušku obou řešení snadným dosazením do rovnice (1), při našem postupu taková kontrola není nezbytná, neboť jsme rovnici v daném oboru upravovali ekvivalentně.

Odpověď: Úloze vyhovují právě dvě dvojice (x, y), a to $(2, 2)$ a $(6, 2)$.

A – I – 4

a) Položme například $a = 1$, $d = 1$. Posloupnost

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, \tag{$*$}$$

pak má tvar

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

tj. obsahuje všechna přirozená čísla. Mezi nimi je samozřejmě nekonečně mnoho k-tých mocnin pro každé k. (Vyhovující a, d v této triviální části úlohy je možné zvolit i mnohými jinými způsoby.)

---

[1] Jsou-li k, l nesoudělná a $k \mid lm$, pak $k \mid m$.

b) Položme například $a = 2$, $d = 4$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$2, 6, 10, 14, \ldots,$$

tj. je tvořena sudými čísly tvaru $4n + 2$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$ Tato posloupnost proto určitě neobsahuje žádnou k-tou mocninu *lichého* čísla. Všimněme si, že k-tá mocnina libovolného *sudého* čísla je dělitelná číslem 2^k, tedy i číslem 4 (uvažujeme pouze exponenty $k \geqq 2$), tuto vlastnost však nemá žádné číslo tvaru $4n+2$. Zvolená posloupnost proto neobsahuje k-tou mocninu žádného přirozeného čísla, ať je $k = 2, 3, \ldots$ zvoleno jakkoli.

(Podobně můžeme zdůvodnit, že úloze b) vyhovuje každá posloupnost, kterou dostaneme volbou $a = p$, $d = p^2$ pro libovolné prvočíslo p; popsaný případ odpovídá hodnotě $p = 2$.)

c) Položme například $a = 8$, $d = 16$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$8, 24, 40, 56, \ldots,$$

tj. je tvořena lichými násobky osmi tvaru $8(2n + 1)$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vysvětlíme, proč zvolená posloupnost neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla. Každý její člen $8(2n + 1)$ má totiž prvočíslo 2 ve svém rozkladu na prvočinitele zastoupeno třikrát ($8 = 2^3$ a číslo $2n + 1$ je liché), zatímco každá druhá mocnina má ve svém rozkladu *sudý* počet výskytů jakéhokoli prvočísla.

Na druhé straně, ve zvolené posloupnosti jsou zastoupeny všechny třetí mocniny $8 \cdot 1^3, 8 \cdot 3^3, 8 \cdot 5^3, \ldots$, protože třetí mocnina lichého čísla je opět číslo liché, tedy tvaru $2n + 1$, a všechna čísla tvaru $8(2n + 1)$ naše posloupnost obsahuje.

Zvolená posloupnost tedy úloze c) vyhovuje. (Opět jsme mohli čísla a a d zvolit jinak, např. obecněji $a = p^3$ a $d = p^4$, kde p je libovolné prvočíslo.)

d) Předpokládejme, že pro dané $k > 1$ se v posloupnosti $(*)$ vyskytuje aspoň jedna k-tá mocnina, řekněme číslo m^k, kde m je přirozené. Ze vzorce pro obecný člen aritmetické posloupnosti pak plyne, že pro některé celé nezáporné číslo n platí rovnost $m^k = a + nd$. Ukažme, že pak v posloupnosti $(*)$ leží (spolu s mocninou m^k) všechny mocniny $(m + d)^k$, $(m + 2d)^k$, $(m + 3d)^k$, $\ldots$ (kterých je nekonečně mnoho).

Vezměme rovnou obecný člen z vypsaných k-tých mocnin, tedy mocninu $(m+td)^k$, kde t je celé kladné číslo. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}(m+td)^k &=\\ &= m^k + km^{k-1}td + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d^2 + \ldots + kmt^{k-1}d^{k-1} + t^kd^k =\\ &= m^k + d\bigl(km^{k-1}t + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d + \ldots + kmt^{k-1}d^{k-2} + t^kd^{k-1}\bigr) =\\ &= m^k + d\cdot M = (a+nd) + dM = a + d(n+M).\end{aligned}$$

Protože M (výraz ve velké závorce) je zřejmě přirozené číslo, hodnota $(m+td)^k = a+d(n+M)$ je členem posloupnosti $(*)$ pro každé přirozené t. Tím je požadovaná vlastnost naší posloupnosti dokázána.

Poznamenejme, že namísto binomické věty jsme v posledním odstavci mohli využít kongruence[2]. Každá aritmetická posloupnost $(*)$ je totiž tvořena právě těmi celými čísly x, pro něž platí $x \equiv a \pmod d$ a $x \geqq a$. Jak je známo, platí implikace: jestliže $x \equiv y \pmod d$, pak $x^k \equiv y^k \pmod d$ pro každé přirozené k. Díky tomuto *pravidlu o umocnění* můžeme celé řešení úlohy d) pojmout takto: má-li pro dané k kongruence $x^k \equiv a \pmod d$ nějaké řešení $x = m$ s vlastností $m \geqq a$, je jejím řešením i každé takové x, pro něž $x \equiv m \pmod d$. (V původním řešení bychom mohli tedy vzít i např. mocninu $(m-d)^k$, kdyby platilo $a + d \leqq m$.)

A – I – 5

Očíslujme vrcholy daného mnohoúhelníku po řadě čísly 1, 2, ..., 2 008.

a) Popíšeme rovnou jeden z postupů jak přesouvat mince, abychom je dostali na 8 hromádek po 251 mincích.

Nejprve mince z prvních 251 vrcholů s čísly $1, 2, \ldots, 251$ postupně shromáždíme na jedné hromádce ve vrcholu s číslem 251, přitom jejich pohyb budeme vyvažovat zřejmým „symetrickým“ přesouváním mincí z posledních 251 vrcholů s čísly $1\,758, 1\,759, \ldots, 2\,008$ do vrcholu s číslem 1 758. Takto vytvoříme první dvě požadované hromádky. Podobným způsobem pak shromáždíme mince z vrcholů 252 až 502 na jedné hromádce ve vrcholu s číslem 502. Jejich pohyb opět symetricky vyvážíme vytvořením stejně početné hromádky ve vrcholu s číslem rovným rozdílu $1\,757-250$, tedy s číslem 1 507. Postup zopakujeme ještě dvakrát; poslední

[2] S tímto způsobem počítání se zbytkovými třídami se lze seznámit v brožuře Aloise Apfelbecka: *Kongruence*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1968.

dvě hromádky s 251 mincemi dostaneme v sousedních vrcholech s čísly 1 004 a 1 005.

b) Dokážeme, že žádný postup ke kýženému cíli nevede.

Přiřaďme každé minci číslo vrcholu, v němž se (aktuálně) nachází. Všimněme si, jak se změní součet S všech 2 008 čísel přiřazených jednotlivým mincím, když povoleným způsobem přesuneme libovolnou dvojici mincí. Nenastane-li přitom přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008, hodnota součtu S se zřejmě nezmění, neboť jedné z přesouvaných mincí se přiřazené číslo o 1 zvětší, druhé přesouvané minci se přiřazené číslo o 1 zmenší (čísla přiřazená ostatním mincím, jež zůstaly na místě, se nezmění). Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008 nastane a nejde-li přitom o bezvýznamnou výměnu mince z vrcholu 1 za minci z vrcholu 2 008 a naopak, součet S se změní na hodnotu $S \pm 2008$, neboť čísla přiřazená přesouvaným mincím se buď obě zvětší, nebo obě zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a 2 007.

Naše úvahy o aktuálních hodnotách součtu S přiřazených všem mincím můžeme shrnout takto: po libovolném počtu přesunů dvojic mincí se hodnota S z počáteční hodnoty $S_0 = 1 + 2 + \ldots + 2\,008$ dostane na hodnotu $S = S_0 + 2\,008k$, kde k je vhodné celé číslo. Snadno určíme hodnotu $S_0 = 1\,004 \cdot 2\,009$. Kdybychom připustili, že po určitém počtu přesunů dvojic mincí vznikne 251 hromádek po 8 mincích ve vrcholech, jejichž čísla označíme $v_1, v_2, \ldots, v_{251}$, musela by platit rovnost

$$1\,004 \cdot 2\,009 + 2\,008k = 8(v_1 + v_2 + \ldots + v_{251}),$$

kterou však nesplňuje žádné celé číslo k, neboť její pravá strana je násobkem osmi, zatímco levá strana nikoliv (číslo $2\,008k$ násobkem osmi je, číslo $1\,004 \cdot 2\,009$ nikoliv). Tím je tvrzení o neexistenci hledaného postupu dokázáno.

Dodejme pro zajímavost, že úvaha o součtu S není v rozporu s výsledkem části a). Postupu popsanému v řešení a) odpovídá rovnice

$$1\,004 \cdot 2\,009 + 2\,008k = 251(v_1 + v_2 + \ldots + v_8),$$

a to dokonce s hodnotou $k = 0$ (žádný přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008 jsme neprovedli). Z uvedené rovnice s hodnotou $k = 0$ plyne, že čísla vrcholů osmi konečných hromádek musejí splňovat rovnici

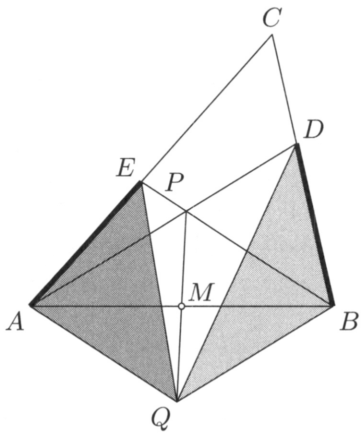
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_8 = 4 \cdot 2\,009,$$

ať volíme jakýkoli postup bez přesunu mince mezi vrcholy 1 a 2 008. Při našem postupu za rostoucího pořadí čísel v_i platí

$$v_1 + v_8 = v_2 + v_7 = v_3 + v_4 = v_5 + v_6 = 2\,009.$$

A – I – 6

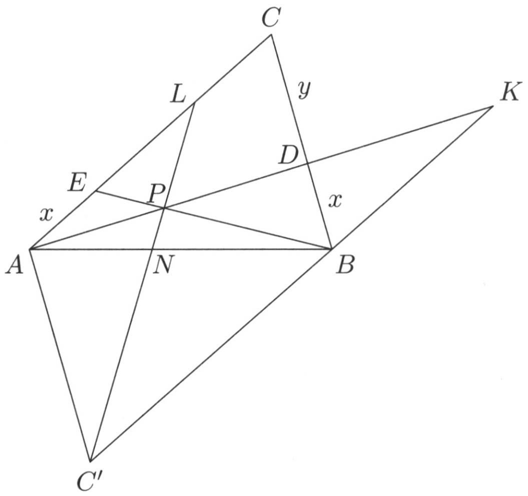
Označme Q obraz bodu P ve středové souměrnosti se středem M. Bod Q bude ležet na ose úhlu ACB, právě když bude mít stejnou vzdálenost od obou přímek AC a BC. Vzhledem k tomu, že úsečky AE a BD mají stejnou délku, vidíme, že bod Q bude stejně vzdálen od přímek AC a BC, právě když trojúhelníky AEQ a BDQ budou mít stejný obsah (obr. 20). Rovnost jejich obsahů teď dokážeme.



Obr. 20

Z konstrukce bodu Q plyne, že $AQBP$ je rovnoběžník, tj. přímka QB je rovnoběžná s přímkou AD, proto mají trojúhelníky QBD a QBA stejný obsah (mají shodné výšky na společnou základnu QB). Podobně z rovnoběžnosti přímek QA a BE plyne rovnost obsahů trojúhelníků QAE a QAB. Tím je rovnost obsahů trojúhelníků AEQ a BDQ dokázána, a tudíž je dokázáno i tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme C' obraz bodu C a Q obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu M. Dále označme K průsečík přímek $C'B$ a AD. Průsečíky přímky $C'P$ s přímkami AB a AC označme N a L (obr. 21).



Obr. 21

Máme dokázat, že bod Q leží na ose úhlu ACB, což je díky vlastnostem středové souměrnosti ekvivalentní tomu, že bod P leží na ose úhlu $AC'B$ (vnitřního úhlu v trojúhelníku $AC'B$). Je známo, že toto nastane, právě když bod N rozdělí úsečku AB v poměru délek úseček AC' a BC'. Pokusíme se tedy určit poměr $|AN| : |BN|$.

Označme $|BD| = |AE| = x$, $|CD| = y$ a $|AC| = b$. Trojúhelníky ADC a KDB jsou podobné, proto

$$\frac{|BK|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{x}{y}, \quad \text{takže} \quad \frac{|BK|}{|BC'|} = \frac{x}{y}.$$

Ze stejnolehlosti se středem v bodě P tak plyne

$$\frac{|AE|}{|EL|} = \frac{|BK|}{|BC'|} = \frac{x}{y}, \quad \text{takže } |EL| = y \text{ a } |AL| = x + y = |BC| = |AC'|.$$

Konečně z podobnosti trojúhelníků ANL a BNC' dostáváme

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AL|}{|BC'|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}.$$

To, jak jsme před výpočtem poměru $|AN| : |BN|$ zmínili, znamená, že přímka $C'N = C'P$ je osou úhlu $AC'B$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

A – S – 1

Splňují-li přirozená čísla m, n zadané nerovnosti, musí zřejmě platit

$$m \geqq 2 \quad \text{a} \quad 2\sqrt{n} - m > 0, \tag{1}$$

jinak by zastoupené odmocniny nebyly definovány, resp. prostřední výraz $2\sqrt{n}-m$ by byl nekladný, a tak by nemohl být větší než nezáporný výraz $\sqrt{m^2-4}$.

Předpokládejme, že podmínky (1) jsou splněny a každou ze zadaných nerovností v jednom sloupci *ekvivalentně* upravme (při každém ze čtyř umocňování jsou obě strany definovány a mají nezáporné hodnoty, stejně tak obě dělení *kladným* číslem n jsou v pořádku):

$$\begin{array}{rcl|l}
2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2-2} & \quad & \sqrt{m^2-4} < 2\sqrt{n} - m & ^2 \\
4n - 4m\sqrt{n} + m^2 < m^2 - 2 & & m^2 - 4 < 4n - 4m\sqrt{n} + m^2 & \\
n + \frac{1}{2} < m\sqrt{n} & & m\sqrt{n} < n + 1 & ^2 \\
n^2 + n + \frac{1}{4} < m^2 n & & m^2 n < n^2 + 2n + 1 & :n \\
n + 1 + \dfrac{1}{4n} < m^2 & & m^2 < n + 2 + \dfrac{1}{n} &
\end{array}$$

Poslední dvě nerovnosti platí, právě když číslo m^2 leží v otevřeném intervalu

$$\left(n + 1 + \frac{1}{4n}, n + 2 + \frac{1}{n}\right).$$

Ten s ohledem na zřejmé nerovnosti $0 < \frac{1}{4}n^{-1} \leqq \frac{1}{4}$ a $0 < n^{-1} \leqq 1$ obsahuje jediné celé číslo $n+2$. Za předpokladu (1) proto přirozená čísla m, n splňují původní nerovnosti, právě když platí $m^2 = n + 2$.

Zbývá zjistit, která přirozená čísla m, n vázaná vztahy $n = m^2 - 2$ splňují za předpokladu $m \geqq 2$ i druhou z podmínek (1). Proveďme její ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{m^2-2} - m &> 0, \\
2\sqrt{m^2-2} &> m, \quad \Big|^2 \\
4(m^2-2) &> m^2, \\
3m^2 &> 8.
\end{aligned}$$

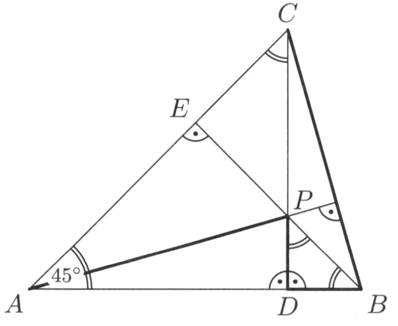
Poslední nerovnost je ovšem pro každé $m \geqq 2$ už splněna.

Odpověď. Hledané dvojice jsou právě ty tvaru $(m,n)=(m,m^2-2)$, kde $m \geqq 2$ je libovolné přirozené číslo.

A – S – 2

Nejdřív dokážeme první implikaci. Nechť $AP \perp BC$, bod P je pak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Chceme dokázat, že úsečky AP a BC jsou shodné, najdeme proto dva shodné trojúhelníky, v nichž si tyto úsečky jako strany odpovídají.

Označme E průsečík přímky BP se stranou AC, tj. patu výšky z vrcholu B. Z pravoúhlého trojúhelníku ABE a dané velikosti úhlu BAC snadno dopočítáme, že $|\sphericalangle PBD| = 45°$. Trojúhelník PDB je tedy pravoúhlý a rovnoramenný, takže $|DP| = |DB|$ (obr. 22). Podobně trojúhelník ADC je pravoúhlý a vzhledem k velikosti úhlu při vrcholu A i rovnoramenný, proto $|DA| = |DC|$. Podle věty *sus* jsou pak pravoúhlé trojúhelníky APD a CBD shodné a jejich přepony AP, BC proto mají stejnou délku.



Obr. 22

Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme, že $|AP| = |BC|$. Protože ADC je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, platí $|AD| = |CD|$, takže trojúhelníky PAD a BCD jsou shodné podle věty *Ssu*. Máme tak $|PD| = |BD|$, proto $|\sphericalangle ABP| = 45°$. Označme opět E průsečík přímky BP se stranou AC. V trojúhelníku ABE vychází, že úhel BEA je pravý, takže přímka BP je výškou trojúhelníku ABC (obr. 22) a bod P je tak jeho průsečík výšek. Odtud plyne, že AP je výška na stranu BC, tudíž je na ni kolmá.

Jiné řešení. Je-li $AP \perp BC$, je bod P průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 45°$. Podobně jako v jednom z řešení úlohy A–I–2 můžeme odvodit, že

$$|AP| = \frac{|BC| \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = |BC| \cdot \operatorname{cotg}\alpha = |BC| \cdot \operatorname{cotg} 45° = |BC|.$$

Nechť naopak $|AP| = |BC|$. Označme Q průsečík výšek trojúhelníku ABC. Z právě dokázané implikace víme, že $|AQ| = |BC|$. Všechny body výšky CD mají ovšem navzájem různou vzdálenost od vrcholu A, proto může uvnitř úsečky CD ležet nejvýše jeden bod P s vlastností $|AP| = |BC|$, a tento bod musí být totožný s bodem Q. Je tedy $AP \perp BC$.

A – S – 3

Zlomek lze krátit celým číslem $d > 1$, právě když je číslo d společným dělitelem čitatele i jmenovatele uvažovaného zlomku. Předpokládejme tedy, že platí $d \mid 3p-q$ a zároveň $d \mid 5p+2q$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. Sčítáním vhodných násobků dvojčlenů $3p-q$ a $5p+2q$ dostaneme

$$2(3p-q) + (5p+2q) = 11p \quad \text{a} \quad 3(5p+2q) - 5(3p-q) = 11q.$$

Protože obě čísla $3p-q$ a $5p+2q$ jsou dle předpokladu násobky čísla d, jsou jeho násobky i sestavená čísla $11p$ a $11q$. Jinak řečeno, číslo d je společným dělitelem čísel $11p$ a $11q$. Čísla p a q jsou však nesoudělná a číslo 11 je prvočíslo, takže čísla $11p$ a $11q$ mají jediného společného dělitele většího než 1, a tím je číslo 11. Musí tedy platit $d = 11$.

Řešení ještě není u konce: musíme ukázat, že číslem 11 lze skutečně některé z uvažovaných zlomků krátit. Jak tedy najít dvojici nesoudělných čísel p a q tak, aby platilo $11 \mid 3p-q$ a zároveň $11 \mid 5p+2q$? S trochou trpělivosti objevíme takové hodnoty p a q zkusmým dosazováním; stačí však vypsat soustavu rovnic

$$3p - q = 11m \quad \text{a} \quad 5p + 2q = 11n,$$

najít její řešení $(p,q) = (2m+n, 3n-5m)$ a pak pohodlně dosazovat: dvojici nesoudělných čísel p a q určitě dostaneme, když bude $q = 3n - 5m = 1$, tedy např. pro $n = 2$ a $m = 1$, kdy $(p,q) = (4,1)$ a uvažovaný zlomek je $11/22$.

Odpověď. Jediné celé číslo větší než 1, kterým lze krátit některý z uvedených zlomků, je číslo 11.

A – II – 1

Označme hledané číslo $n = \overline{abcd} = 1000a+100b+10c+d$ a číslo s opačným pořadím číslic $k = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Protože obě čísla k, n dávají stejný zbytek při dělení číslem 37, je jejich rozdíl

$$\begin{aligned} k - n &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 999(d-a) + 90(c-b) = 37 \cdot 27(d-a) + 90(c-b) \end{aligned} \tag{1}$$

dělitelný číslem 37, odkud $37 \mid 90(c-b)$. Jelikož 37 je prvočíslo a číslo 90 není jeho násobkem, musí platit $37 \mid c - b$. To je pro číslice b, c možné jedině v případě, kdy $b = c$. Naopak, je-li $b = c$, plyne z vyjádření (1), že bez ohledu na hodnoty číslic a, d je rozdíl $k - n$ dělitelný číslem 37, takže čísla n a k skutečně dávají při dělení 37 stejný zbytek. Můžeme tedy předpokládat, že $n = \overline{abbd}$ a $k = \overline{dbba}$, a dále se už zabývat pouze podmínkami úlohy o dělitelnosti sedmi.

Z podmínek $7 \mid n$, $7 \mid k$ plyne

$$7 \mid k - n = 37 \cdot 27(d-a)$$

(do vyjádření (1) jsme dosadili $b = c$), odkud vzhledem k nesoudělnosti čísla 7 se součinem $37 \cdot 27$ dostáváme, že $7 \mid d - a$. Protože podle zadání platí $k > n$, platí rovněž $d > a$; takové číslice d, a splňují podmínku $7 \mid d - a$ jedině v případě, kdy $d - a = 7$. Konkrétně je tedy buď $a = 1$ a $d = 8$, nebo $a = 2$ a $d = 9$. (Možnost $a = 0$, $d = 7$ je vyloučena, protože a je první číslicí čtyřmístného čísla n.)

V případě $a = 1$, $d = 8$ budou čísla

$$\begin{aligned} n &= \overline{1bb8} = 1\,008 + 110b = 7 \cdot (144 + 15b) + 5b, \\ k &= \overline{8bb1} = 8\,001 + 110b = 7 \cdot (1\,143 + 15b) + 5b \end{aligned}$$

dělitelná sedmi, právě když bude platit $7 \mid 5b$ neboli $b \in \{0, 7\}$. Dostáváme tak první dvě řešení $n = 1\,008$ a $n = 1\,778$.

Rovněž v případě $a = 2$ a $d = 9$, kdy

$$\begin{aligned} n &= \overline{2\,bb9} = 2\,009 + 110b = 7 \cdot (287 + 15b) + 5b, \\ k &= \overline{9\,bb2} = 9\,002 + 110b = 7 \cdot (1\,286 + 15b) + 5b, \end{aligned}$$

vyjde stejná podmínka $7 \mid 5b$, která vede ke zbylým dvěma řešením $n = 2\,009$ a $n = 2\,779$.

Hledané čtyřciferné číslo je kterékoli z čísel 1 008, 1 778, 2 009, 2 779 (a žádné jiné).

Jiné řešení. Zachovejme označení čísel n, k a jejich číslic z původního řešení. Začneme-li řešení analýzou podmínek $7 \mid n$ a $7 \mid k$, zjistíme s ohledem na zbytky řádů 10^3, 10^2, 10^1, 10^0 při dělení sedmi (jež jsou po řadě 6, 2, 3, 1), že tyto podmínky lze zjednodušit do tvaru

$$7 \mid 6a + 2b + 3c + d, \quad \text{resp.} \quad 7 \mid 6d + 2c + 3b + a.$$

Sečtením obou výrazů dostaneme $7 \mid 5(b + c)$ neboli $7 \mid b + c$. Zjistíme-li stejně jako v původním řešení, že platí $37 \mid k - n \Leftrightarrow b = c$, z podmínky $7 \mid b + c$ vyplyne $b = c \in \{0, 7\}$; z obou zbylých podmínek $7 \mid 6a + d$ a $7 \mid 6d + a$, jež jsou obě ekvivalentní jednomu vztahu $7 \mid d - a$, pak s ohledem na $d > a > 0$ najdeme obě vyhovující dvojice číslic $(a, d) = (1, 8)$ a $(a, d) = (2, 9)$.

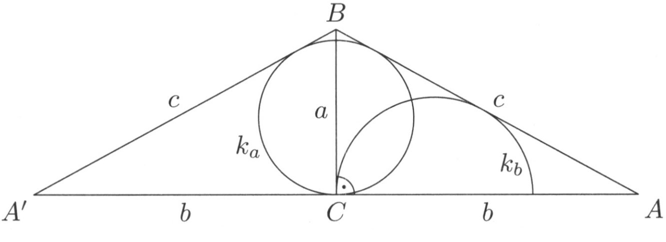
A – II – 2

Označme vrcholy daného trojúhelníku A, B, C tak, aby vrcholy A, B ležely postupně proti odvěsnám délek a, b.

Nejdříve vypočítáme velikosti poloměrů obou kružnic k_a a k_b. Označme A' obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky BC. Kružnice k_a je vepsána trojúhelníku $A'AB$ (obr. 23). Rovnoramenný trojúhelník ABA' má obvod $o = 2(b + c)$ a obsah $S = ab$, pro poloměr ϱ_a kružnice k_a tak podle známého vztahu vychází

$$\varrho_a = \frac{2S}{o} = \frac{ab}{b + c}.$$

Podobně vypočítáme i poloměr kružnice k_b: vyjde $\varrho_b = ab/(a + c)$.



Obr. 23

Pro číslo p a pro libovolný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c má platit

$$p \leqq \frac{\dfrac{1}{\varrho_a}+\dfrac{1}{\varrho_b}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \frac{\dfrac{b+c}{ab}+\dfrac{a+c}{ab}}{\dfrac{a+b}{ab}} = \frac{a+b+2c}{a+b} = 1+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Protože v případě $a = b$ má poslední výraz hodnotu $1+\sqrt{2}$, musí každé vyhovující číslo p splňovat nerovnost $p \leqq 1+\sqrt{2}$. Ukážeme-li nyní, že pro libovolné dvě kladné hodnoty a, b platí

$$\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \geqq \sqrt{2}, \tag{1}$$

bude výše odvozená nerovnost znamenat, že $p = 1+\sqrt{2}$ je hledané reálné číslo (a úloha tak bude vyřešena).

Nerovnost (1) pro libovolná kladná a, b snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost, která zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{a^2+b^2} &\geqq \sqrt{2}(a+b),\\
4(a^2+b^2) &\geqq 2(a+b)^2,\\
4a^2+4b^2 &\geqq 2a^2+4ab+2b^2,\\
2(a-b)^2 &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Místo takové prověrky bylo možné využít Cauchyovu nerovnost $2(a^2 + b^2) \geqq (a+b)^2$ nebo nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqq \frac{a+b}{2}.$$

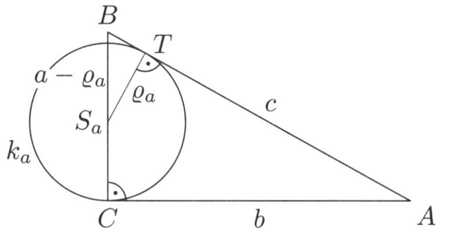
Obě tyto klasické nerovnosti jsou zřejmě pouze obměněnými zápisy nerovnosti (1).

Odpověď. Hledané číslo p má hodnotu $1+\sqrt{2}$.

Poznámka. Velikost poloměrů ϱ_a a ϱ_b je možné vypočítat i jinak: Dvojím vyjádřením sinu úhlu ABC z pravoúhlých trojúhelníků S_aBT a ABC (obr. 24) dostaneme

$$\frac{\varrho_a}{a-\varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkud plyne $\varrho_a = ab/(b+c)$. Analogicky vypočítáme i ϱ_b.



Obr. 24

A – II – 3

Z rovnosti $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ a ze známých goniometrických vzorců dostáváme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma,$$
$$\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma.$$

Dosaďme tato vyjádření hodnot $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos\alpha$ do první rovnice ze zadání a výsledek upravme:

$$2\sin\beta\sin\gamma - (-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) = 1,$$
$$\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = 1,$$
$$\cos(\beta-\gamma) = 1.$$

Poslední rovnost nastane, právě když $\beta = \gamma$, neboť rozdíl dvou vnitřních úhlů trojúhelníku leží v intervalu $(-\pi, \pi)$, v němž má funkce kosinus hodnotu 1 jedině v bodě nula. Tak jsme ukázali, že první zadaná rovnice je pro vnitřní úhly trojúhelníku splněna, právě když $\beta = \gamma$.

Nyní snadno vyřešíme i druhou ze zadaných rovnic, když do ní za γ dosadíme β:

$$2\sin\beta\sin 2\beta - \cos\beta = 0,$$
$$4\sin^2\beta\cos\beta - \cos\beta = 0,$$
$$(4\sin^2\beta - 1)\cos\beta = 0.$$

Je tedy buď $\cos\beta = 0$, nebo $\sin\beta = \pm\frac{1}{2}$. Rovnost $\beta = \gamma$ však pro úhly trojúhelníku znamená, že úhel β je ostrý, takže $\cos\beta > 0$, a proto musí platit $\sin\beta = \frac{1}{2}$ (hodnota $\sin\beta = -\frac{1}{2}$ je pro úhel β z intervalu $(0, \pi)$ vyloučena). Tak docházíme k jediným možným hodnotám $\beta = \gamma = 30°$, z nichž snadno dopočteme $\alpha = 120°$. Při uvedeném postupu není zkouška nutná: první zadaná rovnice platí díky rovnosti $\beta = \gamma$ a druhou rovnici jsme za předpokladu $\beta = \gamma$ řešili ekvivalentními úpravami.

Jiné řešení. Podobně jako při řešení úlohy domácího kola využijeme známé goniometrické vzorce k odvození rovnosti

$$\begin{aligned}2\sin y\sin(x+y) - \cos x &= 2\sin y(\sin x\cos y + \cos x\sin y) - \cos x = \\ &= 2\sin y\cos y\sin x + (2\sin^2 y - 1)\cos x = \\ &= \sin 2y\sin x - \cos 2y\cos x == -\cos(x+2y)\end{aligned}$$

pro libovolná reálná čísla x, y. Díky tomu můžeme soustavu rovnic ze zadání přepsat do tvaru

$$\cos(\alpha + 2\beta) = -1, \tag{1}$$

$$\cos(\beta + 2\gamma) = 0. \tag{2}$$

Vnitřní úhly libovolného trojúhelníku leží v intervalu $(0, \pi)$, z čehož plynou nerovnosti $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$.[3] Z nich plyne, že rovnice (1) je splněna, právě když $\alpha + 2\beta = \pi$. Porovnáním s obecně platnou rovností $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dostáváme ekvivalentní podmínku $\gamma = \beta$, za níž (2) přejde do tvaru

$$\cos 3\beta = 0. \tag{3}$$

Protože úhel β je ostrý (neboť je shodný s úhlem γ a trojúhelník nemůže mít dva pravé nebo dva tupé vnitřní úhly), platí nerovnosti $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$, při kterých je rovnice (3) splněna, právě když $3\beta = \frac{1}{2}\pi$ neboli $\beta = \gamma = \frac{1}{6}\pi$. Stejně jako v prvním řešení dopočítáme $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{2}{3}\pi$. Zkouškou (ani při tomto postupu však není nutná) snadno ověříme, že nalezená trojice úhlů α, β, γ splňuje všechny podmínky zadání úlohy.

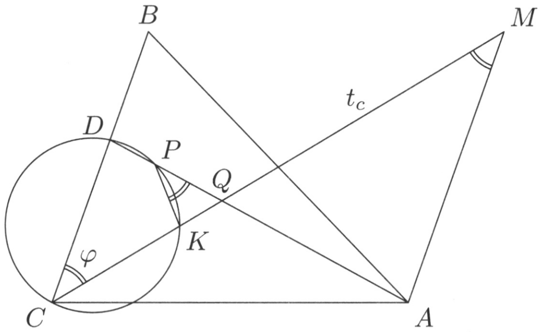
Podmínkám úlohy vyhovují pouze trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají velikosti $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$.

A – II – 4

Označme φ velikost úhlu, který svírá přímka t_c, na níž leží těžnice z vrcholu C, s přímkou strany BC daného trojúhelníku. Vzhledem k definici bodu K budou stejný úhel φ svírat i přímky KP a AD. To však znamená, že na kružnici opsané trojúhelníku AKP bude ležet i takový bod M

[3] Platí dokonce $\alpha + 2\beta < 2\pi$, neboť $\alpha + 2\beta < 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi$.

přímky t_c, v němž přímka AM protne přímku t_c pod úhlem φ. Takovou vlastnost zřejmě má bod M souměrně sdružený s bodem C podle středu strany AB (který na volbě bodů D a P rovněž nezávisí, obr. 25).



Obr. 25

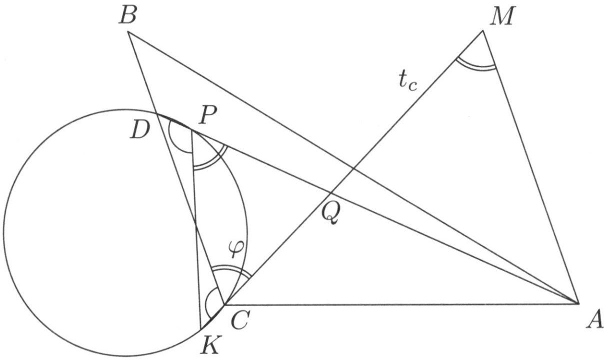
Dokážeme nyní shora uvedené skutečnosti podrobněji. Označme Q průsečík těžnice t_c s úsečkou AD (Q je tedy „zakázaná“ poloha bodu P). Bod P leží buď uvnitř úsečky DQ, nebo uvnitř úsečky QA.

V prvním případě leží bod Q vně kružnice opsané trojúhelníku CPD, bod K tedy padne dovnitř polopřímky QC. Pokud bod K leží uvnitř úsečky QC, jsou body C a P protilehlými vrcholy tětivového čtyřúhelníku $CDPK$, a tudíž $|\sphericalangle APK| = \varphi$. Navíc body P a M leží vzhledem k přímce AK v téže polorovině, takže ze shodnosti úhlů AMK a APK vyplývá, že čtyřúhelník $AMPK$ je tětivový, proto bod M skutečně leží na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

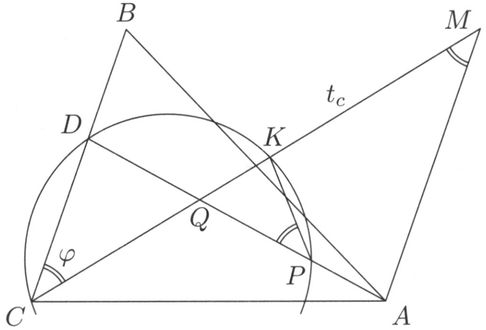
Pokud bod K uvnitř úsečky QC neleží a je $K \neq C$ (obr. 26), je $|\sphericalangle KPD| = |\sphericalangle KCD| = 180° - \varphi$, takže $|\sphericalangle KPA| = \varphi = |\sphericalangle KMA|$. (Poslední rovnost samozřejmě platí i pro $K = C$.) Protože body P a M leží v téže polorovině určené přímkou KA, leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

Ve druhém případě leží bod K uvnitř polopřímky QM. Pokud bod K leží uvnitř úsečky QM (obr. 27), leží body P a M v opačných polorovinách vzhledem k přímce AK a z rovnosti obvodových úhlů DCK a DPK nad tětivou DK plyne $|\sphericalangle DPK| = \varphi = |\sphericalangle AMK|$, což zaručuje, že čtyřúhelník $AMKP$ je tětivový, takže bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

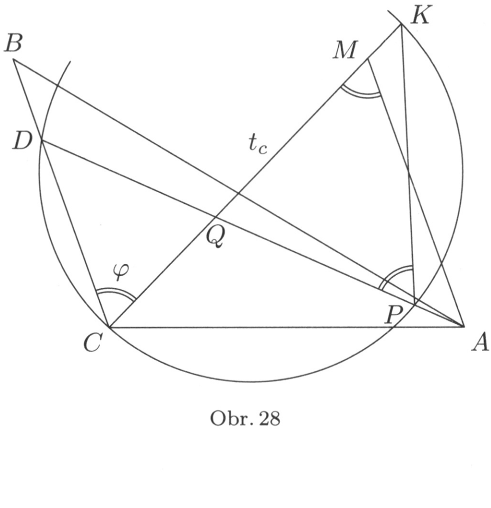
Pokud bod K uvnitř úsečky QM neleží (obr. 28), vychází $|\sphericalangle KPA| = |\sphericalangle KMA| = 180° - \varphi$. Protože body P a M leží v téže polorovině



Obr. 26



Obr. 27



Obr. 28

určené přímkou KA, leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

Jiné řešení. Označme body Q a M stejně jako v prvním řešení. Pro mocnost bodu Q ke kružnici opsané bodům C, P, D, K (bez ohledu na polohu bodu P) platí $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, takže $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojúhelníků QDC a QAM, jež plyne z rovnoběžnosti přímek BC a AM, dostáváme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí tedy

$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|},$$

takže

$$|QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|. \tag{1}$$

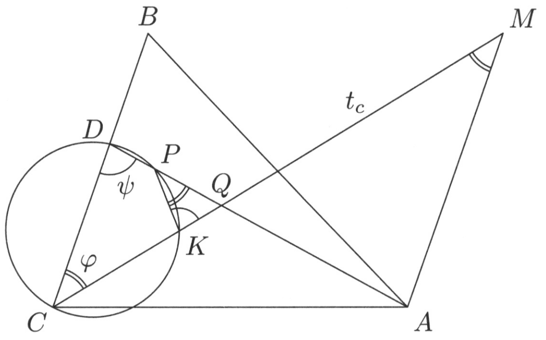
Jak už víme, leží bod Q buď uvnitř, anebo vně obou úseček AP a KM, proto z právě získané rovnosti vyplývá, že bod M leží na kružnici určené body A, P, K. Označíme-li totiž M' druhý průsečík přímky QK s touto kružnicí ($M' \neq K$), plyne z mocnosti bodu Q vůči této kružnici rovnost $|QK| \cdot |QM'| = |QP| \cdot |QA|$, takže podle (1) je $|QM'| = |QM|$, a musí tudíž být $M' = M$.

Poznámky. V žádném z obou řešení jsme nevyužili předpoklad, že daný trojúhelník ABC je ostroúhlý. Za tohoto předpokladu leží bod K vždy uvnitř úsečky CM. Lze to ukázat úvahami o obvodových úhlech podobně, jako jsme ukázali, že tvrzení úlohy platí i v případech, kdy bod K padne mimo tuto úsečku. Jiný důkaz dostaneme následující úvahou:

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, platí $\psi > \varphi$, kde jsme jako ψ označili velikost úhlu CDA. Tato nerovnost $\psi > \varphi$ plyne ze zřejmé nerovnosti $\psi = \beta + |\sphericalangle DAB| > \beta$ a z nerovnosti $\beta > \varphi$, která je ekvivalentní nerovnosti $t_c > \frac{1}{2}|AB|$ (proti větší straně trojúhelníku leží větší úhel), což je nerovnost $|CM| > |AB|$ mezi délkami úhlopříček rovnoběžníku $CAMB$, jehož vnitřní úhel při vrcholu C je dle předpokladu ostrý (tuto nerovnost získáme snadno použitím kosinové věty: $|AB|^2 < |AC|^2 + |CB|^2 = |AC|^2 + |AM|^2 < |CM|^2$).

Z nerovnosti $\psi > \varphi$ pak pro bod P uvnitř úsečky DQ pro délky stran trojúhelníků QPK, QCD (obr. 29) vychází, že $|QK| < |QP| < |QD| < |QC|$ (proti většímu úhlu v trojúhelníku leží větší strana), takže bod K leží uvnitř úsečky QC. Podobně pro bod P uvnitř úsečky QA dostaneme $|QK| < |QP| < |QA| < |QM|$, takže bod K leží uvnitř úsečky QM.

Budeme-li úhel φ chápat jako orientovaný úhel dvou přímek (tj. úhel, o který musíme první přímku otočit, aby splynula nebo byla rovnoběžná



Obr. 29

s druhou přímkou), vyplyne tvrzení úlohy z úvah v úvodním odstavci a z následující charakterizace kružnice: *Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když se orientovaný úhel ACB rovná orientovanému úhlu ADB.*

A – III – 1

Předpokládejme, že všechna čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ jsou prvočísla. Zkoumejme, jaký zbytek při dělení pěti může dávat prvočíslo p, tj. pro jaká l z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a nezáporné celé číslo k může platit $p = 5k + l$.

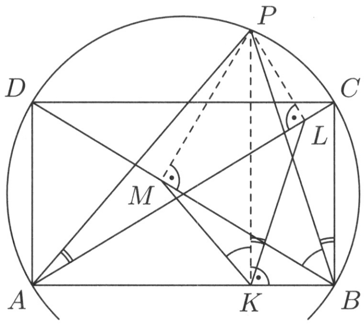
- ▷ Je-li $p = 5k$ prvočíslo, pak $p = 5$, tehdy ovšem $11p + 10 = 65$ není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p = 5k+1$, pak $3p+2 = 5(3k+1)$ je prvočíslem jedině pro $k = 0$, tehdy ovšem platí $p = 1$, což není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p = 5k + 2$, pak $7p + 6 = 5(7k + 4)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geqq 0$.
- ▷ Je-li $p = 5k + 3$, pak $9p + 8 = 5(9k + 7)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geqq 0$.

Prvočíslo p tedy musí být tvaru $5k + 4$. Pak ovšem $6p + 11 = 5(6k + 7)$ je složené číslo pro každé celé $k \geqq 0$.

Poznámka. Nejmenší prvočíslo p, pro něž jsou i všechna čísla $3p + 2$, $5p + 4$, $7p + 6$, $9p + 8$ a $11p + 10$ prvočísla, je $p = 2\,099$.

A – III – 2

Ukážeme, že úhel LKM má stejnou velikost jako úhel CBD (obr. 30). Odtud dané tvrzení triviálně plyne (úhel CBD má velikost $45°$, právě když $|BC| = |CD|$, tj. když $ABCD$ je čtverec).



Obr. 30

Body B, K, M, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem BP. Pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PM tedy platí $|\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle PBM|$. Podobně body A, K, L, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem AP a pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PL máme $|\sphericalangle LKP| = |\sphericalangle LAP|$. Z obvodových úhlů nad tětivou CP kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ tak dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplývá

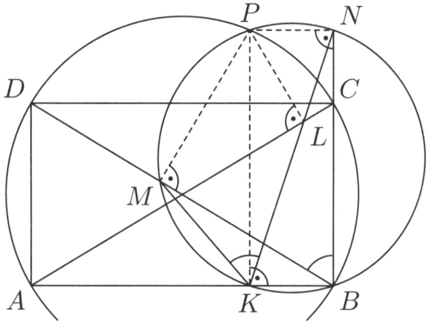
$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle LKP| + |\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle LAP| + |\sphericalangle PBM| =$$
$$= |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBD|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Uvedený postup se dá použít i v triviálním případě, kdy $P = C$ anebo $P = D$; tehdy mají některé z uvažovaných úhlů nulovou velikost.

Jiné řešení. Opět dokážeme, že úhly LKM a CBD mají stejnou velikost. Označme N patu kolmice z bodu P na přímku BC. Body K, L, N leží na Simsonově přímce příslušející bodu P a trojúhelníku ABC (obr. 31). Na Thaletově kružnici nad průměrem PB leží body K, M i N. Z obvodových úhlů nad tětivou MN téže kružnice tak máme

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|.$$



Obr. 31

A – III – 3

Nechť a, b, c, d jsou libovolná kladná čísla, jejichž součin se rovná 1. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel a^x, b^x, c^x pro libovolné $x > 0$ máme

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \geqq \sqrt[3]{a^x b^x c^x} = \sqrt[3]{\frac{1}{d^x}}.$$

Volbou $x = 3$ dostáváme nerovnost $\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) \geqq 1/d$. Analogicky platí

$$\tfrac{1}{3}(a^3 + b^3 + d^3) \geqq 1/c, \quad \tfrac{1}{3}(a^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/b, \quad \tfrac{1}{3}(b^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/a.$$

Sečtením uvedených čtyř nerovností dostaneme

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

takže pro $x = 3$ nerovnost ze zadání úlohy vždy platí.

Ukážeme, že $x = 3$ je hledanou nejmenší hodnotou, tedy že pro každé kladné $x < 3$ daná nerovnost pro některou z uvažovaných čtveřic (a, b, c, d) neplatí. Najdeme takovou čtveřici ve tvaru $a = b = c = t$ a $d = 1/t^3$ pro vhodné $t > 1$ (závislé na daném $x < 3$). Pro taková kladná a, b, c, d jistě platí $abcd = 1$,

$$a^x + b^x + c^x + d^x = 3t^x + \frac{1}{t^{3x}} < 4t^x \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{t} + t^3 > t^3.$$

Bude-li proto navíc platit $4t^x < t^3$, nebude nerovnost ze zadání úlohy splněna. S ohledem na podmínku $x < 3$ je nerovnost $4t^x < t^3$ ekvivalentní s nerovností

$$t > 4^{\frac{1}{3-x}},$$

která je pro dostatečně velké t skutečně splněna.

Závěr. Hledané nejmenší kladné číslo je $x = 3$.

Poznámka. Požadovanou vlastnost má nejen $x = 3$, ale každé $x \geqq 3$ (a rovněž každé $x \leqq -1$). Vysvětlíme to tak, že jedničky ve jmenovatelích zlomků na pravé straně uvažované nerovnosti zaměníme výrazem $(abcd)^{\frac{x+1}{4}}$; dostaneme tak homogenní nerovnost

$$\begin{aligned} &a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \\ &\geqq a^{\frac{x-3}{4}}(bcd)^{\frac{x+1}{4}} + b^{\frac{x-3}{4}}(acd)^{\frac{x+1}{4}} + c^{\frac{x-3}{4}}(abd)^{\frac{x+1}{4}} + d^{\frac{x-3}{4}}(abc)^{\frac{x+1}{4}}, \end{aligned}$$

což je Muirheadova nerovnost pro čtveřice exponentů

$$(x, 0, 0, 0) \quad \text{a} \quad \left(\frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x-3}{4}\right),$$

jejíž uplatnění je v případě $x > 0$ vázáno jedinou podmínkou $\frac{1}{4}(x-3) \geqq 0$ neboli $x \geqq 3$ (zatímco v případě $x < 0$ vychází jediná podmínka $\frac{1}{4}(x+1) \leqq 0$ neboli $x \leqq -1$).

A – III – 4

Z rovnosti $n + k^2 = (k+n)(k-n) + n(n+1)$ vidíme, že $n + k \mid n + k^2$ platí, právě když $n + k \mid n(n+1)$. Počet čísel k s touto vlastností je tedy rovný počtu těch dělitelů čísla $D = n(n+1)$, které jsou větší než n.

a) V případě $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele příslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že dělitelé čísla D, jež jsou větší než 58, jsou právě čtyři: 59, $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1\,711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3\,422$. To jsou hodnoty $58 + k$, takže příslušná hledaná k jsou o 58 menší, jsou to tudíž postupně čísla $k = 1$, $k = 60$, $k = 1\,653$ a $k = 3\,364 = 58^2$. (Dodejme, že obě čísla $k = 1$ a $k = n^2$ splňují podmínku $n + k \mid n + k^2$ pro každé n.)

b) Pro sudé $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, platí $D = 2p(2p+1)$, takže snadno vypíšeme čtyři dělitele čísla D, které jsou větší než dané $n = 2p$:

$$2p + 1 < 2(2p+1) < p(2p+1) < 2p(2p+1). \tag{1}$$

Jsou-li obě čísla p, $2p+1$ prvočísla, žádné jiné takové dělitele číslo D zřejmě nemá, tudíž číslo $n = 2p$ má požadovanou vlastnost.

Je-li naopak aspoň jedno z čísel p, $2p+1$ složené a platí-li předpoklad $p \geqq 3$ ze zadání úlohy, ukážeme, že příslušné D pak má kromě dělitelů vypsaných v (1) ještě aspoň jednoho dalšího dělitele většího než $2p$. Rozlišíme přitom dva případy podle toho, které z čísel p, $2p+1$ je složené.

(i) Je-li složené číslo p, je toto číslo dělitelné některým q, $2 \leqq q \leqq \frac{1}{2}p$, a číslo D má pak dělitele $2q(2p+1)$, který s výjimkou případu $q = \frac{1}{2}p$ leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsaným v (1):

$$2(2p+1) < 2q(2p+1) < p(2p+1).$$

Nemá-li však číslo p jiného netriviálního dělitele kromě $q = \frac{1}{2}p$, platí nutně $p = 4$. Tehdy ani druhé číslo $2p+1 = 9$ není prvočíslo, takže pátého dělitele čísla D (většího než $2p$) najdeme v části (ii).

(ii) Je-li složené (liché) číslo $2p+1$, je toto číslo dělitelné některým q, $3 \leqq q < p$, a číslo D má pak dělitele $2pq$, který leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsaným v (1):

$$2(2p+1) < 2pq < p(2p+1), \quad \text{neboť} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \quad \text{a} \quad q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalence z části b) úlohy je tak dokázána.

Jiné řešení části b). Označme $D = 2p(2p+1)$. Protože $2p < \sqrt{D} < 2p+1$, má D právě čtyři dělitele větší než $2p$, právě když má zároveň právě čtyři dělitele menší než $\sqrt{D}$, celkem tedy právě osm dělitelů. Číslo D má aspoň dva prvočinitele, takže je buď součinem tří různých prvočísel (to zřejmě nastane, právě když p a $2p+1$ jsou prvočísla), nebo tvaru $q^3 r$, kde q, r jsou různá prvočísla. Druhý případ však nemůže nastat, protože $D = 2p(2p+1)$ je sudé, má lichého dělitele $2p+1$ a ještě dělitele p nesoudělného s $2p+1$, muselo by proto být $p = 2^2$, odkud $r = 2p+1 = 9$, což ovšem není prvočíslo. Tím je požadovaná ekvivalence v části b) dokázána.

A – III – 5

Přiřaďme každé minci index i vrcholu A_i, na kterém leží (tedy číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$) a po každém přemístění dvojice mincí čísla přiřazená mincím aktualizujme. Sledujme nejprve, jak se změní součet S všech n čísel přiřazených jednotlivým mincím po jednom přemístění.

Nepřemisťujeme-li žádnou z obou mincí mezi vrcholy A_1 a A_n, součet S se nezmění, protože jedno z čísel mincí se o 1 zmenší, druhé se o 1 zvětší (a ostatní se nezmění). Stejně tak se součet S zřejmě nezmění, přemístíme-li jednu minci z A_1 do A_n a současně druhou z A_n do A_1. Přemístíme-li jednu minci z A_1 do A_n a druhou z A_i do A_{i+1} (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), součet S vzroste o $(n-1)+1=n$. Konečně přemístíme-li jednu minci z A_n do A_1 a druhou z A_i do A_{i-1} (kde $2 \leqq i \leqq n$), součet S klesne o n. Z uvedeného úplného rozboru plyne, že *zbytek součtu S po dělení číslem n se nikdy nezmění.*

Součet S ve výchozí pozici má hodnotu

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

zatímco v kýžené cílové pozici by měl mít hodnotu

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1) \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$
$$= \frac{1}{2} n(n+1)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

(využili jsme známé vzorce pro součet prvých a druhých mocnin čísel prvních n přirozených čísel). Aby bylo možné zamýšleného cíle dosáhnout, musí dvě určené hodnoty S dávat po dělení číslem n stejný zbytek, neboli jejich rozdíl $\frac{1}{6} n(n+1)(n-1)$ musí být násobkem čísla n. Číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ proto musí být celé. Dosazením všech jednotlivých zbytků 0 až 5 modulo 6 snadno zjistíme, že nalezená podmínka je splněna, právě když číslo n dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5. V další části řešení ukážeme, že pro všechna taková n lze skutečně kýžené cílové pozice dosáhnout.

Popíšeme jeden z možných postupů. (Jedinou) minci, která je na počátku ve vrcholu A_1, označme M. Všechny mince s výjimkou M budeme neustále přemisťovat ve stejném společném směru. V opačném směru se tedy bude přemísťovat jediná mince M, aniž bychom se o její pozici nějak průběžně „starali“. Její konečnou polohu určíme pomocí dříve odvozené vlastnosti součtu S: index i vrcholu A_i, ve kterém se mince M nakonec ocitne, je jednoznačně určen tím, že konečná hodnota součtu S dává po dělení číslem n stejný zbytek jako hodnota výchozí — indexy všech vrcholů totiž tvoří úplnou soustavu zbytků modulo n.

Navrženým postupem permanentního přemisťování mince M můžeme kteroukoliv ze zbylých mincí (nezávisle na ostatních zbylých mincích) přemístit do libovolného vrcholu, který si zamaneme. Po konečném počtu vhodných přemístění tedy zřejmě dosáhneme toho, aby všechny mince různé od M byly v každém vrcholu A_i s indexem $i > 1$ v počtu, jaký nám předepisuje zadání úkolu, tedy $n+1-i$. Je celkem lhostejno, že je to právě $n+1-i$, důležité však je, že celkové počty mincí ve výchozí pozici i kýžené cílové pozici jsou zřejmě stejné, takže po zmíněném „zajištění" vrcholů $A_2, A_3, \ldots, A_n$ mincemi různými od M bude zbylých $n-1$ mincí různých od M ve vrcholu A_1 a poslední mince M se ocitne v některém, prozatím nezjištěném vrcholu. Kdy to bude vrchol A_1, a tudíž cíle bude dosaženo? Právě tehdy, když počet vrcholů n bude takový, že součet S pro výchozí pozici dává při dělení n stejný zbytek jako součet pro cílovou pozici, o kterou přemisťováním usilujeme. A všechna taková n jsme již našli.

Odpověď. Požadovaného cíle je možné dosáhnout, právě když číslo n dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5.

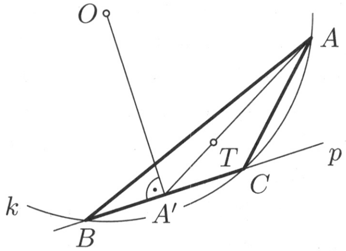
Poznámka. Popsaný způsob řešení vede k následujícímu závěru: Jsou-li dána dvě rozmístění stejného počtu mincí ve vrcholech n-úhelníku, pak jedno z nich lze převést na druhé popsaným přemisťováním mincí, právě když oba součty S, které odpovídají těmto rozmístěním, dávají po dělení číslem n stejný zbytek.

A – III – 6

Vezměme nějaký bod A z roviny ω. Aby mohl být vrcholem trojúhelníku popsaného v zadání, musí být různý od bodů O a T. Nejprve popíšeme obecnou konstrukci trojúhelníku ABC, v němž jsou dány vrchol A, střed O opsané kružnice a těžiště T (pro trojici navzájem různých bodů A, O, T). Teprve pak zjistíme, pro které body A takový trojúhelník sestrojit nelze.

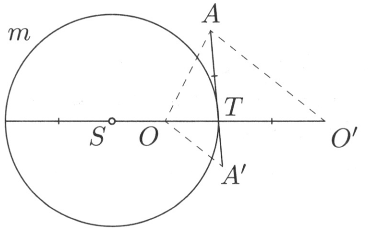
Označme A' střed strany BC. Bod A' je obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pokud $A' \neq O$, leží body B a C na kolmici p vedené bodem A' k přímce OA' a zároveň na opsané kružnici k se středem O a poloměrem $|OA|$ (obr. 32).

K danému bodu A dokážeme vždy sestrojit jeho obraz A' v uvedené stejnolehlosti. Předpokládejme nejprve, že $A' \neq O$. Abychom dostali dva různé body B a C, musí být přímka p sečnou kružnice k. To nastane, právě když $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O ve stejnolehlosti

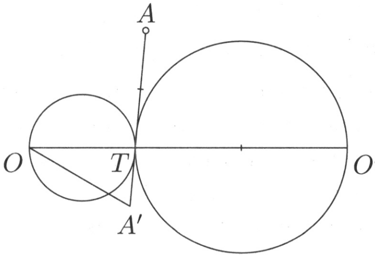


Obr. 32

se středem T a koeficientem -2. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, proto konstrukční podmínku můžeme zapsat ve tvaru $|O'A| < 2|OA|$. Bod A proto musí ležet mimo kruh určený Apollóniovou kružnicí[4] $m(S; |ST|)$, kde S je bod souměrně sdružený s bodem T podle bodu O (obr. 33).



Obr. 33



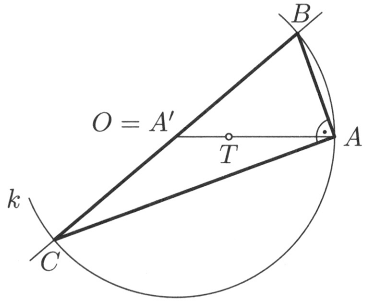
Obr. 34

Pokud tedy $A' \neq O$ neboli $A \neq O'$, dostaneme konstrukcí tři body A, B, C. Ty budou vrcholy vyhovujícího trojúhelníku, pokud neleží v přímce. Na přímce leží, když je přímka BC totožná s přímkou AT, tj. když přímka OA' je kolmá na AT. Bod A' proto nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem OT a (po „zobrazení“ této podmínky ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2) bod A nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$ (obr. 34).

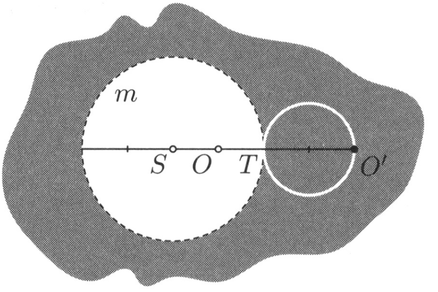
V případě, že bod A je totožný s bodem O', tj. $A' = O$, namísto kolmice p můžeme vzít libovolnou přímku (různou od AT) procházející bodem O (obr. 35). Dostaneme tak nekonečně mnoho různých trojúhel-

---

[4] Pro dané dva různé body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnice množina bodů X, pro něž platí $|PX| = k|QX|$. Střed Apollóniovy kružnice leží na přímce PQ stejně jako dva body kružnice, které dovedeme pro dané k jednoduše sestrojit.



Obr. 35



Obr. 36

níků ABC s pravým úhlem při vrcholu A, které splňují všechny podmínky zadání.

Závěr. Hledanou množinou bodů je vnější oblast kružnice m kromě bodů ležících na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$, přičemž bod O' do hledané množiny též patří (obr. 36).