58. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie Z9

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011. pp. 134–138.

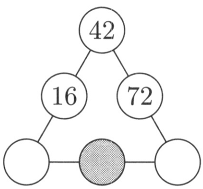
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405178

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

Do tří prázdných polí na obr. 50 patří taková přirozená čísla, aby součin tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný. Jaké nejmenší a jaké



Obr. 50

největší číslo může být za této podmínky vepsáno do šedě vybarveného pole? (*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 2

Alena, Bára, Čeněk a David si společně koupili tandem — jízdní kolo pro dva. Na projížďku vyrážejí vždy ve dvojici. Každý jel s každým už alespoň jednou a nikdo jiný se na tandemu ještě nevezl. Alena byla na projížďce jedenáctkrát, Bára dvacetkrát, Čeněk jen čtyřikrát.

Určete, kolikrát minimálně a kolikrát maximálně mohl být na projížďce David. (*L. Šimůnek*)

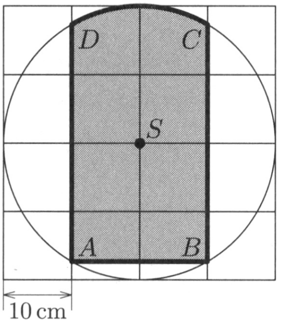
Z9 – I – 3

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky 10 cm (obr. 51), je narýsována kružnice se středem S ve vyznačeném mřížovém bodě a poloměrem 20 cm. Body A, B, C a D jsou průsečíky kružnice se síťovými přímkami. Určete obsah vybarvené plochy $ABCD$. (*L. Šimůnek*)

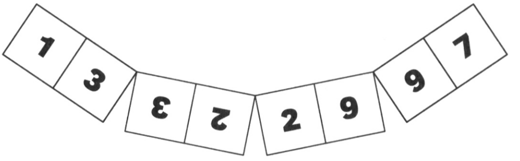
Z9 – I – 4

Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ — každá kostka odpovídala jednomu dvojmístnému prvočíslu tak, že na každé polovině kostky byla jedna číslice tohoto prvočísla. Žádné dvojmístné prvočíslo v dominu nechybělo a žádné prvočíslo nebylo na dvou kostkách.

Dominik se rozhodl, že všechny kostky uspořádá do kružnice tak, aby kostky ležící vedle sebe sousedily stejnou číslicí (obr. 52). Jeho kamarád Bořek mu řekl, že to nelze provést. Měl Bořek pravdu? (*M. Petrová*)



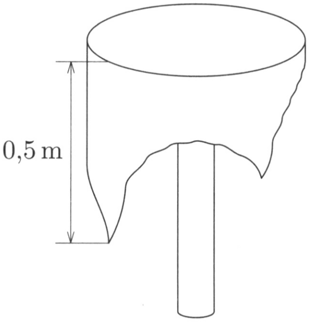
Obr. 51



Obr. 52

Z9 – I – 5

Na stole s kruhovou deskou o průměru 0,6 m je „nakřivo“ položen čtvercový ubrus se stranou 1 m (obr. 53). Jeden cíp ubrusu přečnívá přes hranu desky stolu 0,5 m, sousední cíp 0,3 m. Určete délku přesahu zbylých dvou cípů. (*S. Bednářová*)



Obr. 53

Z9 – I – 6

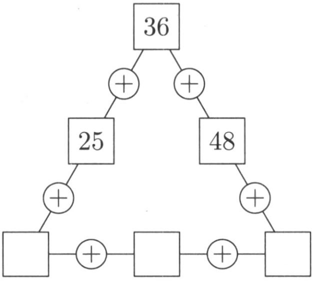
Čtyři tatínkové chtěli dětem sponzorovat lyžařský zájezd.

První slíbil: „Dám 11 500 Kč,“
druhý slíbil: „Dám třetinu toho, co vy ostatní dohromady,“
třetí slíbil: „Já dám čtvrtinu toho, co vy ostatní dohromady,“
čtvrtý slíbil: „A já dám pětinu toho, co vy ostatní dohromady.“

Kolik korun slíbil druhý, třetí a čtvrtý tatínek? (*M. Volfová*)

Z9 – II – 1

Do prázdných čtverců na obr. 54 patří taková přirozená čísla, aby součet tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný. Kolik různých trojic přirozených čísel lze do obrázku doplnit? (*L. Šimůnek*)



Obr. 54

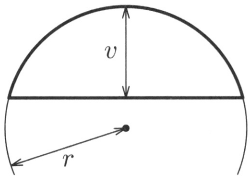
Z9 – II – 2

Noční hlídač si psal pro ukrácení času posloupnost čísel. Začal jistým přirozeným číslem. Každý další člen posloupnosti vytvořil tak, že k předchozímu členu přičetl určité číslo: k prvnímu členu přičetl 1, k druhému 3, ke třetímu 5, ke čtvrtému 1, k pátému 3, k šestému 5, k sedmému 1 a tak dále. Víme, že se v jeho posloupnosti nacházejí čísla 40 a 874.

1. Které číslo následuje v posloupnosti těsně po čísle 40 a které těsně po čísle 874?
2. V posloupnosti najdeme dva těsně po sobě jdoucí členy, jejichž součet je 491. Která dvě čísla to jsou? (*L. Šimůnek*)

Z9 – II – 3

V Kocourkově plánovali postavit přes řeku ozdobný most, jehož oblouk má být částí kružnice. Profil oblouku vymezuje spolu s vozovkou kruhovou úseč (obr. 55). V původním návrhu byla ale výška oblouku mostu příliš velká. Postavili tedy most, jehož výška oblouku byla třikrát menší, tím se však poloměr příslušné kružnice dvakrát zvětšil. V jakém poměru byla výška oblouku mostu a poloměr příslušné kružnice u návrhu a v jakém u postaveného mostu? *(M. Petrová)*



Obr. 55

Z9 – II – 4

Na naši zamyšovanou chalupu jsme přivezli myšilovce kocoura Vildu. V pondělí chytil $\frac{1}{2}$ všech myší, v úterý $\frac{1}{3}$ zbylých, ve středu $\frac{1}{4}$ těch, co zbyly po úterním lovu, a ve čtvrtek už jen $\frac{1}{5}$ zbytku. V pátek se zbylé myši raději odstěhovaly. Kolik bylo myší na chalupě původně, jestliže se v pátek odstěhovalo o dvě myši více, než jich Vilda chytil v úterý? Nezapomeňte ověřit, zda byl každý den uloven celočíselný počet myší. *(M. Volfová, M. Dillingerová)*

Z9 – III – 1

Jirka, Vít a Ota na soutěži získali všechny tři medaile. Nechtěli se chlubit, proto takto žertovali:

Jiří: „Ota získal zlatou!"

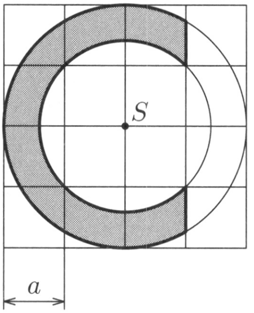
Vít: „Ale ne, Ota získal stříbrnou!"

Ota: „Nedostal jsem ani zlatou ani stříbrnou!"

Tělocvikář prozradil, že nositel zlaté medaile mluvil pravdu a nositel bronzové lhal. Kdo získal jakou medaili? *(M. Volfová)*

Z9 – III – 2

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky a, jsou narýsovány dvě kružnice (obr. 56). Obě mají střed v bodě S a každá prochází čtyřmi mřížovými body. Šedě vybarvený obrazec je vymezen částmi těchto kružnic a jednou síťovou přímkou. Vyjádřete obsah šedého obrazce pomocí délky a. (*L. Šimůnek*)



Obr. 56

Z9 – III – 3

Adam s Evou hráli šachy.

Adam vyhrál a utěšoval Evu: „To víš, já hraji šachy dlouho, dvakrát déle než ty!"

Eva se zlobila: „Ale minule jsi říkal, že je hraješ třikrát déle!"

Adam se divil: „To že jsem říkal? A kdy to bylo?"

„Předloni!"

„No tak to ano, mluvil jsem pravdu — a dnes také."

Jak dlouho hraje Adam šachy? (*M. Volfová*)