Přípravná soustředění před 50. MMO

V průběhu 58. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 20. do 24. dubna 2009 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Josef Tkadlec	8/8 G J. Keplera, Praha 6	105
Samuel Říha	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	81
David Klaška	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	78
Jan Matějka	8/8 G České Budějovice, Jírovcova	78
Tomáš Zeman	6/8 G J. Keplera, Praha 6	72
Josef Ondřej	7/8 G Rožnov pod Radhoštěm	68
Jan Vaňhara	8/8 G L. Jaroše, Holešov	62
Hana Šormová	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	61
Miroslav Olšák	7/8 G Praha 5, Buďánka	49

Vzhledem k uvedeným výsledkům bylo do reprezentačního družstva České republiky pro 50. MMO v Brémách vybráno prvních šest studentů bez Tomáše Zemana, který odmítl účast na další přípravě v Uherském Hradišti a na střetnutí s družstvy Slovenska a Polska z důvodu studia v zahraničí, takže byl jmenován náhradníkem.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (20. 4.),
dr. *Jaroslav Zhouf* (21. 4.),
Mgr. *Martin Panák* (22. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (23. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (24. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Uvažujme krychli $1 \times 1 \times 1$ a označme O a A dva její vrcholy takové, že OA tvoří stěnovou úhlopříčku. Zjistěte, co je větší: počet cest délky 1 386 začínajících i končících ve vrcholu O, nebo počet cest délky 1 386 začínajících ve vrcholu O a končících ve vrcholu A? (Cesta délky n na uvažované krychli je posloupnost $n+1$ jejích vrcholů, z nichž každé dva po sobě jdoucí mají vzdálenost 1.)

2. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, jež mají vnější dotyk v bodě P. Z libovolného bodu A kružnice k_1 sestrojme obě tečny ke kružnici k_2 a označme M, M' příslušné body dotyku. Jestliže další průsečík přímky AM, resp. AM' s kružnicí k_1 označíme N, resp. N', platí

$$|PN| \cdot |M'N'| = |PN'| \cdot |MN|.$$

Dokažte.

3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme M střed přepony BC. Na polopřímce AC zvolme bod D tak, že $|AD| = |AM|$. Druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AMC a BDC označme P. Dokažte, že bod P leží na ose úhlu ACB.

4. Je dána konečná množina P prvočísel. Dokažte, že existuje číslo x, jež se dá pro zvolené prvočíslo p vyjádřit jako součet $x = a^p + b^p$ s vhodnými přirozenými čísly a, b, právě když $p \in \mathsf{P}$.

5. Na kružnici stojí 2 009 dětí a každé má jeden míček. Každou minutu každé dítě hodí míček, pokud nějaký má, některému ze dvou nejbližších sousedů. Pokud se u některého dítěte sejdou dva míčky, jeden z nich odloží. Za jakou nejmenší dobu může v kruhu zůstat jen jeden míček?

6. Je dán trojúhelník ABC. Na straně AC je libovolně zvolen bod P a na polopřímkách AB, CB jsou sestrojeny po řadě body N, M tak, aby velikosti úhlů APN, CPM a ABC byly stejné. Označme Q průsečík polopřímek AM a CN. Dokažte, že všechny přímky PQ procházejí týmž bodem.

7. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je splněna rovnost

$$y(x+y)f(x)\sin x + x(x+y)f(y)\sin y = xyf(-x-y)\sin(x+y).$$

8. Mnohočlen $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ stupně $n > 1$ má n různých reálných kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mnohočlen $Q(x) = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}$ stupně $n-1$ má reálné kořeny $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Dokažte nerovnost

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

9. Řekneme, že dvě kladná celá čísla a, b jsou vzdálena o jeden krok, jestliže $ab + 1$ je čtvercem přirozeného čísla. Řekneme, že dvě přirozená čísla jsou vzdálena o n kroků, jestliže existuje posloupnost kladných celých čísel $a = c_0$, c_1, …, $c_n = b$ taková, že každé dva její sousední členy jsou vzdáleny o jeden krok a přitom neexistuje taková posloupnost kratší délky než n.

a) Ukažte, že libovolná dvě kladná celá čísla jsou vzdálena o konečný počet kroků.

b) Určete, o kolik kroků jsou vzdálena kladná celá čísla m a $m+1$ (v závislosti na m)

10. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že

$$(x+y)f\big(f(x)y\big) = x^2 f\big(f(x) + f(y)\big).$$

11. Nechť a, c jsou celá kladná čísla a b celé. Dokažte, že existuje kladné celé x tak, že

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

12. Nechť ϱ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c jsou poloměry kružnic vně připsaných jeho stranám. Určete obsah trojúhelníku ABC, jestliže ϱ_a, ϱ_b a ϱ_c jsou přirozená čísla a $\varrho = 1$.

13. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ jsou celá čísla s vlastností: Každých $2n$ čísel z nich je možno rozdělit do dvou skupin o n číslech tak, že součet čísel v obou skupinách je stejný. Dokažte, že $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1}$.

14. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť S je průsečík jeho úhlopříček. Paty kolmic z bodu S k přímkám AB a CD označme po řadě E a F. Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a AD.

15. Uvažujme libovolnou n-prvkovou množinu B bodů v rovině a označme S množinu středů všech úseček s krajními body v B. V závislosti na čísle n určete nejmenší možný počet prvků množiny S.

16. Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice

$$x^2 - ax + b - 1 = 0$$

má v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice

$$x^2 - ax + b + 1 = 0.$$

Najděte nejmenší možné a.

17. Určete největší možný počet různých čísel, které lze vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 1\,000\}$ tak, aby součet žádných tří vybraných čísel nebyl násobkem devíti.

18. Na stranách daného trojúhelníku ABC jsou vybrány body K, L a M tak, že $\boldsymbol{AK} = \frac{1}{3}\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BL} = \frac{1}{3}\boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{CM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{CA}$. Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC tvoří obsah trojúhelníku vymezeného úsečkami AL, BM a CK.