59. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 33–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405191

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „1+2“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla $0+3$, $0+2$, $1+2$, $2+0$ a $1+2$. Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet. (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Vrcholem C pravoúhelníku $ABCD$ veďte přímky p a q, které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C, přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB, AD trojúhelník co nejmenšího obsahu. (*Leo Boček*)

C – I – 3

Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x, tzv. dolní celou část reálného čísla x.) (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Kružnice $k(S;r)$ se dotýká přímky AB v bodě A. Kružnice $l(T;s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C, D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r, s. Dokažte dále, že průsečík M přímek CD, AB je středem úsečky AB.

(*Leo Boček*)

C – I – 5

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.

(*Ján Mazák*)

C – I – 6

Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší. (*Jaromír Šimša*)

C – S – 1

Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l.

(*Pavel Leischner*)

C – S – 2

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. (*Ján Mazák*)

C – S – 3

Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti. (*Vojtech Bálint*)

C – II – 1

Dokažte, že pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnost

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geqq 4,$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 2

Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný.

(*Tomáš Jurík*)

C – II – 3

Určete všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic

$$\lfloor x + y \rfloor = 2\,010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

jestliže a) $p = 2$, b) $p = 3$.

Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než dané reálné číslo x (tzv. dolní celá část reálného čísla x). (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 1

Slova ZÁPAL a STRUK nemají společná písmena. Proto se, jak plyne z odpovědí 1+2 a 0+2, mezi jejich písmeny, jež dohromady tvoří množinu $\mathsf{M} = \{Z, \acute{A}, P, A, L, S, T, R, U, K\}$, nachází všech pět písmen hledaného slova. Ve slově SKOBA mají být právě tři z hledaných písmen. Jsou to tedy písmena S, K, A. (Zbývající písmena B a O totiž do množiny M nepatří.) Ve slově CESTA mají být jen dvě z hledaných písmen, a obě na správné pozici. Jsou to již nalezená S a A, která tedy patří na třetí, resp. páté místo hledaného slova (a písmeno T lze z množiny M „vyloučit“). Písmeno K nemůže být ani na prvním, ani druhém místě, jak plyne z odpovědí pro slova KABÁT $(0 + 3)$ a SKOBA $(1 + 2)$. Je tedy na čtvrtém místě a zbývá určit první dvě písmena. Ve slově STRUK jsou jen dvě z hledaných písmen (musí to tedy být S a K), obě v nesprávných pozicích. Proto z množiny M „vyloučíme“ i písmena R, U (a T, pokud jsme to dosud neučinili). Zbývající dvě hledaná písmena proto patří do množiny $\{Z, \acute{A}, P, L\}$. Z podmínek pro slovo KABÁT plyne, že jedno z nich je Á. Ve slově ZÁPAL je právě jedno písmeno ve správné pozici. Kdyby to bylo Z, neměli bychom kam umístit písmeno Á. Je tedy Á na druhém místě a navíc lze vyloučit písmeno Z. Na prvním místě hledaného slova může být L nebo P. Snadno se přesvědčíme, že nalezená slova LÁSKA i PÁSKA vyhovují všem podmínkám úlohy.

C – I – 2

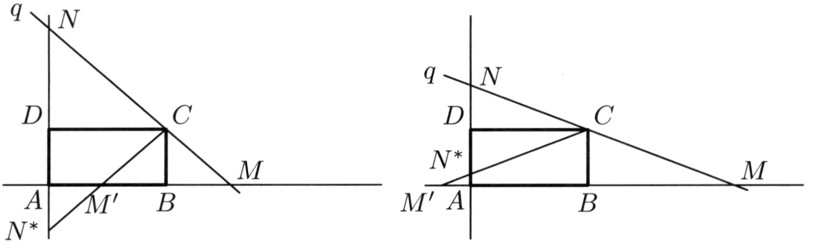
Pata P kolmice z bodu A na přímku p procházející bodem C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC. Vzdálenost bodu A od přímky p, tj. délka úsečky AP, je tedy nejvýše rovna velikosti průměru AC. Přitom rovnost nastane, právě když je přímka p kolmá na úhlopříčku AC. Přitom je zřejmé, že taková přímka p má s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C.

Zvolme nyní libovolnou přímku q tak, aby měla s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod C. Její průsečíky s přímkami AB, AD označme M a N (v uvedeném pořadí). Dále označme M' obraz bodu M v souměrnosti podle přímky BC a N^* obraz bodu N v souměrnosti podle přímky CD. Protože $|\sphericalangle NCD| + |\sphericalangle MCB| = 180^\circ - |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$, plyne z právě uvedených souměrností rovnost $|\sphericalangle MCM'| = 2|\sphericalangle MCB| =$

$= 2(90° - |\sphericalangle NCD|) = 180° - 2|\sphericalangle NCD| = 180° - |\sphericalangle NCN^*|$. Body C, M' a N^* leží tudíž na téže polopřímce s počátkem C. Pro obsah trojúhelníku AMN tak vždy platí (obr. 11)

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= S_{ABCD} + S_{BMC} + S_{DCN} = \\ &= S_{ABCD} + S_{M'BC} + S_{DN^*C} \geqq 2S_{ABCD}, \end{aligned}$$

s rovností, právě když polopřímka $CM' = CN^*$ bude procházet vrcholem A daného pravoúhelníku, tj. právě když $M' = A = N^*$ (pak budou BC a CD středními příčkami trojúhelníku AMN).



Obr. 11

Závěr. Přímku q, pro kterou je obsah trojúhelníku AMN minimální, sestrojíme jako přímku CM, kde M je obraz bodu A v osové souměrnosti s osou BC. Přímka p s největší možnou vzdáleností od bodu A je za daných podmínek kolmice na úsečku AC sestrojená v bodě C.

Jiné řešení. Označme P patu kolmice z bodu A na hledanou přímku p a φ velikost odchylky přímek p a AC. Pro vzdálenost d přímky p od bodu A platí $d = |AP| = |AC| \sin\varphi \leqq |AC|$. Přímka p má tedy největší možnou vzdálenost od bodu A, právě když je kolmá na AC.

Uvažujme libovolnou přímku q, která má s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod C, a budeme hledat, za jakých podmínek ohraničuje spolu s přímkami AB a AD trojúhelník nejmenšího obsahu. Použijeme označení z obr. 11 a zavedeme $a = |AB| = |DC|$, $x = |BM|$, $b = |AD| = |BC|$ a $y = |DN|$. Pomocí těchto veličin vyjádříme obsah trojúhelníku AMN a odhadneme jej užitím A-G nerovnosti:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab + xy + ay + bx) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}\left(ab + xy + 2\sqrt{ab \cdot xy}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Z podobnosti trojúhelníků BMC a DCN dostáváme $|DN|/|BC| = |DC|/|BM|$, což vzhledem ke zvolenému označení dává $xy = ab$. Po dosazení do (1) a po jednoduché úpravě tak dostaneme $S_{AMN} \geqq 2ab = 2S_{ABCD}$. Přitom rovnost nastane, právě když platí $ay = bx$. Spolu s podmínkou $xy = ab$ představují oba vztahy soustavu rovnic s neznámými x, y, jejímž vyřešením dostaneme $x = a$ a $y = b$. Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku jako v prvním řešení, kde jsme též uvedli konstrukci přímky q.

Jiné řešení. Postupujeme stejně jako v předchozím řešení s tím rozdílem, že nejprve z podobnosti trojúhelníků $BMC \sim DCN$ určíme $y = ab/x$ a potom odhadneme obsah trojúhelníku AMN pomocí tvrzení z úlohy 5.2 takto:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x)\Big(b+\frac{ab}{x}\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(2ab+bx+\frac{a^2b}{x}\Big) = ab + \frac{1}{2}ab\Big(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\Big) \geqq 2ab. \end{aligned}$$

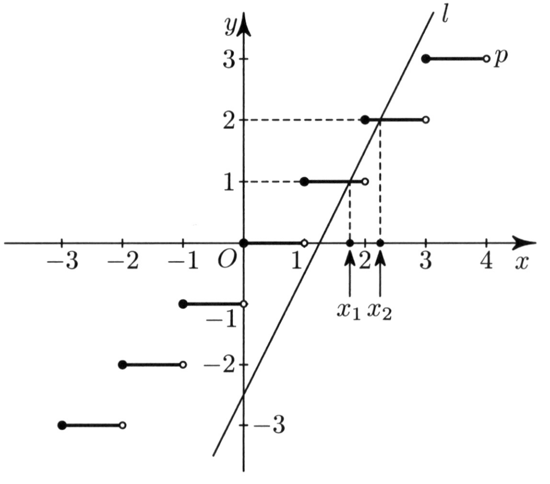
Rovnost nastává, právě když $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{x}$, což je ekvivalentní s podmínkou $x = a$.

C – I – 3

Položme $\lfloor x \rfloor = a$, pak $x = a + t$, kde $t \in \langle 0, 1)$, a rovnici $4(a+t) - 2a = 5$ ekvivalentně upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bylo číslo a celé, musí být $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, kde k je liché číslo. Navíc $2t \in \langle 0, 2)$. Je tedy buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, nebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Původní rovnice má proto dvě řešení: $x_1 = 2{,}25$ a $x_2 = 1{,}75$.

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Jejím řešením jsou x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí l: $y = 2x - \frac{5}{2}$ a p: $y = \lfloor x \rfloor$. Grafy se protínají ve dvou bodech, jak vidíme na obr. 12. Pro první průsečík platí $\lfloor x \rfloor = 1$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme $4x - 2 = 5$ a odtud $x_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75$. Pro druhý průsečík platí $\lfloor x \rfloor = 2$, takže $4x - 4 = 5$ a $x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

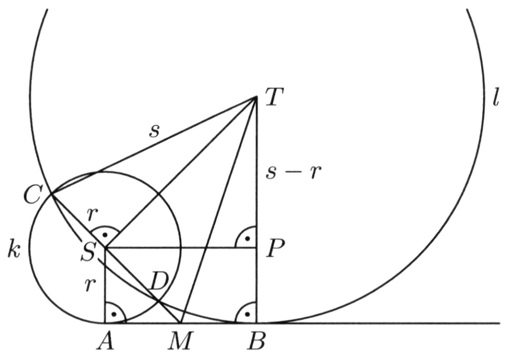
Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taková rovnice bude splněna, právě když číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude splňovat nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leqq x$ neboli $\frac{3}{2} < x \leqq \frac{5}{2}$. Pro taková x hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ zřejmě zaplní interval $\frac{1}{2} < 2x - \frac{5}{2} \leqq \frac{5}{2}$. V něm leží právě dvě celá čísla 1 a 2, tudíž hledaná x najdeme z rovnic $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.



Obr. 12

C – I – 4

Protože kružnice l má za tětivu průměr CD kružnice k a dané kružnice nejsou totožné, platí pro jejich poloměry nerovnost $s > r$. Označíme-li P patu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 13), pak z Pythagorovy věty



Obr. 13

pro pravoúhlé trojúhelníky CST a SPT plyne

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s - r)^2. \tag{1}$$

Odtud pro velikost úsečky SP vychází

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s - r)^2 = 2r(s - r).$$

A protože $ABPS$ je pravoúhelník, dostáváme

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s - r)}.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků AMS a MTS dále podle první rovnosti v (1) plyne

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

přitom z pravoúhlého trojúhelníku MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Je proto $|AM| = |BM|$, a bod M je tedy středem úsečky AB.

Poznámka. Závěr, že M je středem úsečky AB, plyne okamžitě z mocnosti bodu M k oběma kružnicím (bod M leží na tzv. chordále obou kružnic). Tyto pojmy jsou však pro soutěžící kategorie C dosud neznámé a nebudou nezbytné ani pro řešení dalších soutěžních kol.

C – I – 5

Pravá nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$4(a^2 + 3ab + b^2) \leqq 5(a + b)^2,$$

kterou lze ekvivalentně upravit na nerovnost $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0$. Ta je splněna vždy a rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.

Levou nerovnost zbavíme zlomků a umocníme na druhou,

$$25ab(a^2 + 2ab + b^2) \leqq 4\bigl(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 6ab^3 + 2a^2b^2\bigr),$$
$$25ab(a^2 + b^2) + 50a^2b^2 \leqq 4a^4 + 4b^4 + 44a^2b^2 + 24ab(a^2 + b^2),$$

takže po úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$4a^4 + 4b^4 - 6a^2b^2 \geqq ab(a^2 + b^2).$$

Po odečtení výrazu $2a^2b^2$ od obou stran nerovnosti se nám podaří na obou stranách využít úpravy na čtverec. Dostaneme tak (opět ekvivalentní) nerovnost

$$4(a^2-b^2)^2 \geqq ab(a-b)^2.$$

Rozdíl čtverců v závorce levé strany ještě rozložíme na součin a vztah upravíme na tvar $4(a-b)^2(a+b)^2 \geqq ab(a-b)^2$.

Pokud je $a=b$, platí rovnost. Je-li $a \neq b$, můžeme poslední nerovnost vydělit kladným výrazem $(a-b)^2$ a dostaneme tak nerovnost $4(a+b)^2 \geqq$ $\geqq ab$ neboli $4a^2+4b^2+7ab \geqq 0$. Levá strana této nerovnosti je vždy kladná, proto vyšetřovaná nerovnost platí pro všechna kladná čísla a, b, přičemž rovnost v ní nastane, právě když $a=b$.

Jiné řešení. Aritmetický průměr c čísel a, b má tu vlastnost, že se od něj obě čísla liší o tutéž hodnotu d. Nahradíme-li proměnné a, b v daných nerovnostech proměnnými c, d, zápis nerovností i důkaz obou vztahů se zjednoduší. Položme tedy $c=\frac{1}{2}(a+b)$, pak $a=c+d$ a $b=c-d$ (kde $d=\frac{1}{2}(a-b)$, jak se snadno můžeme přesvědčit). Tudíž $a^2+b^2=2(c^2+d^2)$, $ab=c^2-d^2$, odkud $a^2+3ab+b^2=5c^2-d^2$. Označme ještě písmeny m a n levou a pravou stranu první z dokazovaných nerovností. Potom

$$m=\sqrt{ab}=\sqrt{c^2-d^2}$$

a

$$n=\frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)}=\frac{2(5c^2-d^2)}{5\cdot 2c}=$$
$$=c-\frac{d^2}{5c}=\sqrt{\left(c-\frac{d^2}{5c}\right)^2}=\sqrt{c^2-d^2\left(\frac{2}{5}-\frac{d^2}{25c^2}\right)}.$$

Protože z vyjádření kladné hodnoty m vidíme, že $d^2<c^2$, pro výraz v poslední závorce pod odmocninou platí

$$1>\frac{2}{5}\geqq\frac{2}{5}-\frac{d^2}{25c^2}>\frac{2}{5}-\frac{1}{25}=\frac{9}{25}>0,$$

což znamená, že odmocněnec leží v uzavřeném intervalu mezi čísly c^2-d^2 a c^2. Odtud vyplývá $m \leqq n \leqq c$, přičemž rovnost nastane, právě když $d=0$, tj. když $a=b$.

Poznámka. Z výsledků soutěžní úlohy plyne, že rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel lze zdola odhadnout nezáporným lomeným výrazem takto:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqq\frac{a+b}{2}-\frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{10(a+b)}.$$

Umocněním osamostatněné odmocniny a dalšími úpravami můžeme dokázat silnější odhad téhož druhu

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

Jinou metodu důkazů spolu s dalšími podobnými nerovnostmi najdete v článku J. Šimši *Dolní odhady rozdílu průměrů* in Rozhledy matematicko-fyzikální 65 (1986/87), číslo 10, str. 403–407.

C – I – 6

a) Předpokládejme nejprve, že nuly jsou na třetím a druhém místě zprava. Hledané číslo x má pak tvar $x = 1\,000a + b$, kde a je přirozené číslo (stejně jako v dalších případech) a b nenulová číslice. Podmínku zadání $1\,000a + b = 89(10a + b)$ upravíme na tvar $5a = 4b$, z nějž plyne, že b je násobek pěti. Vyhovuje tak jen $b = 5$ a $a = 4$, tedy $x = 4\,005$.

b) Jestliže hledané číslo x má nuly na čtvrtém a třetím místě zprava, je $x = 10\,000a + b$, kde b je dvojmístné číslo. Podmínku zadání $10\,000a + b = 89(100a + b)$ upravíme na tvar $25a = 2b$, z nějž plyne, že b je lichý násobek čísla 25 (připomínáme, že x, a tedy ani b není dělitelné deseti). Odtud $b = 25$, $a = 2$ nebo $b = 75$, $a = 6$, tedy $x \in \{20\,025, 60\,075\}$.

c) Jestliže hledané číslo x má nuly na pátém a čtvrtém místě zprava, je $x = 100\,000a + b$, kde b je trojmístné číslo. Podmínku zadání $100\,000a + b = 89(1\,000a + b)$ upravíme na tvar $125a = b$, z nějž plyne, že b je lichý násobek čísla 125. Vyhovují pouze $b = 125$ a $a = 1$, $b = 375$ a $a = 3$, $b = 625$ a $a = 5$, $b = 875$ a $a = 7$, tedy $x \in \{100\,125, 300\,375, 500\,625, 700\,875\}$.

d) Z předchozích případů vidíme, že pro hledané číslo x tvaru $x = 10^{n+2}a + b$, kde b je n-místné číslo, dostáváme podmínku $10^{n+2}a + b = 89(10^n a + b)$ neboli $11 \cdot 10^n a = 88b$, odkud pro $n \geqq 4$ dostáváme podmínku $125 \cdot 10^{n-3}a = b$, podle níž je b násobkem deseti. Žádné další x, které by vyhovovalo zadání, tedy neexistuje.

Závěr. Hledaná čísla jsou 4 005, 20 025, 60 075, 100 125, 300 375, 500 625, a 700 875.

C – S – 1

Označme a/b původní zlomek. Podle zadání platí rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} \qquad (a, b \in \mathbb{N})$$

ekvivalentní se vztahy

$$20b(a+1) - 20a(b+1) = b(b+1)$$

a

$$12b(a+2) - 12a(b+2) = b(b+2),$$

které upravíme na tvar $19b - 20a = b^2$ a $22b - 24a = b^2$. Po odečtení obou vztahů zjistíme, že $4a = 3b$, což po dosazení do druhé rovnosti dá $22b - 18b = b^2$ neboli $b^2 = 4b$. Vzhledem k podmínce $b \neq 0$ odtud plyne $b = 4$ a $a = 3$.

Hledané zlomky jsou tedy 3/4, 4/5 a 5/6.

Jiné řešení. Označme a/b původní zlomek. Ze vztahů

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

lze odhadnout, že řešením by mohlo být $b = 4$. Pak

$$\frac{4(a+1) - 5a}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2) - 6a}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

neboli $a = 3$. Musíme se však ještě přesvědčit, že úloha jiné řešení nemá. Podmínky úlohy vedou ke vztahům

$$\frac{b-a}{b(b+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)} = \frac{2}{4 \cdot 6}.$$

Z podílu jejich levých a pravých stran pak plyne

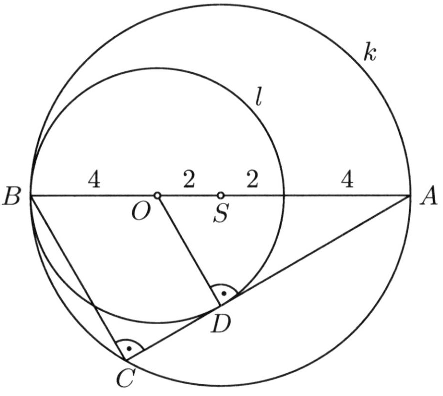
$$\frac{b+2}{b+1} = \frac{6}{5},$$

čemuž vyhovuje jedině $b = 4$.

Poznámka. V úplném řešení nesmí chybět vyloučení možnosti $b \neq 4$. Například z podobných rovností $1/20 = 30/24 \cdot 25$ a $1/12 = 52/24 \cdot 26$ bychom mohli hádat, že $b = 24$, což řešením není.

C – S – 2

Bod dotyku kružnice l s tečnou z bodu A označme D (obr. 14). Z vlastností tečny ke kružnici plyne, že úhel ADO je pravý. Zároveň je pravý



Obr. 14

i úhel ACB (Thaletova věta). Trojúhelníky ABC a AOD jsou tak podobné podle věty uu, neboť se shodují v úhlech ACB, ADO a ve společném úhlu při vrcholu A. Z uvedené podobnosti plyne

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{1}$$

Ze zadaných číselných hodnot vychází $|OD| = |OB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\mathrm{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Podle (1) je tedy $|BC| : 4\,\mathrm{cm} = 12 : 8$ a odtud $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC nakonec zjistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

C – S – 3

Rovnici přepíšeme do tvaru $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$, z nějž po využití vztahu pro rozdíl čtverců a následném vytknutí výrazu $b - a$ dostaneme $2 = (b - a)(a + b - 1)$. Protože 2 je prvočíslo, máme pro uvedený součin následující čtyři možnosti:

a) $b - a = 1$ a $a + b - 1 = 2$, pak $a = 1$ a $b = 2$.

b) $b - a = 2$ a $a + b - 1 = 1$, pak $a = 0$ a $b = 2$.

c) $b - a = -1$ a $a + b - 1 = -2$. Druhou rovnici lze přepsat na tvar $a + b = -1$, z nějž vidíme, že rovnost nenastane pro žádnou dvojici nezáporných celých čísel.

d) $b - a = -2$ a $a + b - 1 = -1$. Druhou rovnici lze přepsat na tvar $a + b = 0$, z nějž vidíme, že jí vyhovuje jediná dvojice nezáporných celých čísel $a = b = 0$, která však nevyhovuje první rovnici.

Závěr: Úloha má dvě řešení: Buď je $a = 1$ a $b = 2$, nebo $a = 0$ a $b = 2$.

Poznámka. Místo rozboru čtyř možností můžeme začít úvahou, že nulová čísla a, b nejsou řešením úlohy, takže $a + b - 1 \geqq 0$, a tedy i $b - a \geqq 0$. Stačí tudíž uvažovat jen možnosti a) a b).

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$, resp. na tvar $2 = b(b - 1) - a(a - 1)$. Z následující tabulky i tvaru čísel $x^2 - x = x(x - 1)$ je zřejmé, že rozdíly mezi sousedními hodnotami výrazů $x(x - 1)$ rostou s rostoucím x (snadno se o tom přesvědčíme výpočtem: $(x + 1)x - x(x - 1) = 2x$).

x	0	1	2	3	4	5	...
$x(x-1)$	0	0	2	6	12	20	...

Může tedy být jedině $b^2 - b = 2$ a $a^2 - a = 0$. Odtud $a \in \{0, 1\}$ a $b = 2$. Řešením úlohy jsou tedy dvě dvojice nezáporných celých čísel: $a = 0$, $b = 2$ a $a = 1$, $b = 2$.

C – II – 1

Vzhledem k tomu, že $12 = 3 \cdot 4$, stačí ukázat, že číslo $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)n^{k-1}$ je dělitelné třemi a čtyřmi. První tři činitelé posledního výrazu jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, takže právě jedno z nich je dělitelné třemi, a proto i číslo a je dělitelné třemi. A je dělitelné i čtyřmi, neboť při sudém n je v posledním výrazu druhý a čtvrtý činitel sudý, zatímco při lichém n je sudý první a třetí činitel. Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení. Položme $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n - 1)n^k(n + 1)$. Opět ukážeme, že a je dělitelné čtyřmi a třemi. Je-li n sudé, je n^k dělitelné čtyřmi pro každé celé $k \geqq 2$. Je-li n liché, jsou činitelé $n - 1$ a $n + 1$ sudá čísla, takže a je dělitelné čtyřmi pro každé celé $n \geqq 2$.

Dělitelnost třemi je zřejmá pro $n = 3l$. Je-li $n = 3l + 1$, kde l je celé kladné číslo, je třemi dělitelný činitel $n - 1$ (a tedy i číslo a). Je-li

$n = 3l + 2$ (l je celé nezáporné), je třemi dělitelný činitel $n + 1$. Protože jiné možnosti vzhledem ke zbytku čísla n při dělení třemi nejsou, je číslo a dělitelné třemi. Tím je požadovaný důkaz proveden.

C – II – 2

Danou nerovnost ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned}
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2 - 2a + 1)(b^2 - 2b + 1) &\geqq 4,\\
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
-(a^2b^2 - 2ab^2 + b^2) + (2a^2b - 4ab + 2b) - (a^2 - 2a + 1) &\geqq 4,\\
2ab(a + b) - 4ab + 2(a + b) &\geqq 4,\\
2(a + b)(ab + 1) &\geqq 4(ab + 1),\\
2(ab + 1)(a + b - 2) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ je $a + b \geqq 2$, takže upravená nerovnost zřejmě platí. Rovnost v ní (a tedy i v zadané) nerovnosti přitom nastane, právě když $a + b = 2$ neboli $a = b = 1$.

Jiné řešení. Při označení $m = a^2 + 1$ a $n = b^2 + 1$ lze levou stranu dokazované nerovnosti přepsat do tvaru $L = mn - (m - 2a)(n - 2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$, z nějž vytýkáním dostaneme $L = 2a(n - b) + 2b(m - a)$.

Čísla a, b jsou z intervalu $\langle 1, \infty)$, proto $1 = m - a^2 \leqq m - a$. Odtud $2b(m - a) \geqq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n - b) \geqq 2$. Je tedy $L \geqq 4$ a rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

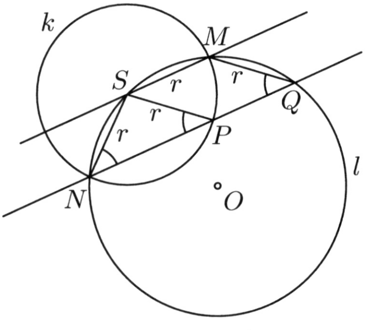
Jiné řešení. Po substituci $a = 1 + m$ a $b = 1 + n$, kde $m, n \geqq 0$, získá levá strana nerovnosti tvar

$$L = (m^2 + 2m + 2)(n^2 + 2n + 2) - m^2n^2.$$

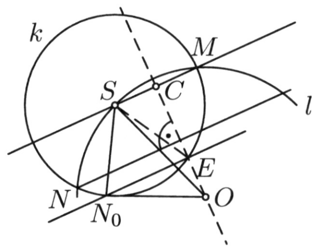
Po roznásobení, které si stačí pouze představit, se zruší člen m^2n^2, takže L bude součtem nezáporných členů, mezi nimiž bude i člen $2 \cdot 2 = 4$. Tím je nerovnost $L \geqq 4$ dokázána. A protože mezi zmíněnými členy budou rovněž $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ plyne $m = n = 0$, což naopak zřejmě i rovnost $L = 4$ zaručuje. To znamená, že rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

C – II – 3

Poloměr kružnice k označme r. Označení vrcholů P, Q v trojúhelníku MPQ není důležité, proto bez újmy na obecnosti označme jako P ten z bodů přímky vedené bodem N rovnoběžně s přímkou MS, který leží na kružnici k. Bod Q pak leží na kružnici l a čtyřúhelník $NQMS$ je lichoběžník vepsaný kružnici l (obr. 15). Je tedy rovnoramenný s rameny MQ a NS délky r. Navíc i úsečky SP a SM mají délku r. Z rovnoramenného trojúhelníku NPS a rovnoramenného lichoběžníku $NQMS$ plyne rovnost úhlů $|\sphericalangle SPN| = |\sphericalangle SNP| = |\sphericalangle MQP|$. Příčka PQ tedy protíná přímky SP a MQ pod stejně velkými úhly, a proto (podle věty o souhlasných úhlech) jsou přímky SP a MQ rovnoběžné. Čtyřúhelník $PQMS$ je tudíž rovnoběžník, a protože $|SM| = |SP| = r$, je to dokonce kosočtverec. Odtud je již zřejmé, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný s rameny PQ a MQ délky r.



Obr. 15



Obr. 16

Poznámka. Existence tětiv NP a NQ v zadání je zaručena díky předpokladu, že kružnice l má větší poloměr než kružnice k. Označíme-li C střed úsečky SM a E ten průsečík kružnice k s osou úsečky SM, který leží v polorovině SMO, bude střed O kružnice l ležet na polopřímce CE až za bodem E (obr. 16). Další průsečík N obou kružnic proto padne do pásu mezi rovnoběžkami SM a N_0E v polorovině OCS, kde N_0 je čtvrtý vrchol kosočtverce s vrcholy S, M, E. K tomu stačí ukázat, že kružnice l protne polopřímku EN_0 až za bodem N_0, že tedy její poloměr OS je větší než délka úsečky ON_0. Toto srovnání dvou stran trojúhelníku OSN_0 snadno plyne z porovnání jeho vnitřních úhlů: úhel u vrcholu N_0 je největší, neboť oba úhly při protilehlé straně OS jsou menší než $60°$ (trojúhelník ESN_0 je rovnostranný). Snadno nahlédneme, že každá z rovnoběžek uvedeného pásu protíná každou z obou kružnic ve dvou bodech (vždy souměrně sdružených podle příslušné osy kolmé na SM).

Tím je prokázána nejen existence obou tětiv NP a NQ, ale i to, že jejich krajní body P a Q leží na stejnou stranu od bodu N (jako na obr. 15), neboť oba body zřejmě leží v polorovině opačné ke zmiňované polorovině OCS.

C – II – 4

Protože číslo p je celé, je i $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Původní soustava rovnic je tedy ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + y &= 2\,010, \\ \lfloor x \rfloor - y &= p, \end{aligned}$$

kterou snadno vyřešíme například sčítací metodou. Obdržíme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2\,010 + p)$ (což může platit jen pro sudá p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pro $p = 2$ je řešením soustavy libovolné $x \in \langle 1\,006, 1\,007)$ a $y = 1\,004$.

b) Pro $p = 3$ nemá soustava řešení.

Jiné řešení. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, pak $x = a + t$, kde $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pro $p = 2$ soustavu přepíšeme do tvaru $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2\,010$. Z poslední rovnice plyne $2a - 2 = 2\,010$, odtud $a = 1\,006$. Jelikož $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje původní soustavě každé $x \in \langle 1\,006, 1\,007)$, přičemž $y = 1\,004$.

b) Pro $p = 3$ dostáváme $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2\,010$. Poslední rovnice je ekvivalentní se vztahem $2a - 3 = 2\,010$, kterému nevyhovuje žádné celé číslo a. Pro $p = 3$ nemá daná soustava rovnic řešení.