59. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 49–62.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405192

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.
(*Ján Mazák*)

B – I – 2

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána. (*Peter Novotný*)

B – I – 3

V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB, CD, DA označené po řadě K, L, M platí: body A, B, L, D leží na jedné kružnici a rovněž body K, L, D, M leží na jedné kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel. (*Radek Horenský*)

B – I – 5

Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D. Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E.

Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD. (*Pavel Leischner*)

B – I – 6

Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic. (*Jaromír Šimša*)

B – S – 1

Určete všechny hodnoty reálných parametrů p a q, pro něž má každá z rovnic

$$x(x-p) = 3 + q, \quad x(x+p) = 3 - q$$

v oboru reálných čísel dva různé kořeny, jejichž aritmetický průměr je jedním z kořenů zbylé rovnice. (*Jaromír Šimša*)

B – S – 2

Jsou dány délky odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$ pravoúhlého trojúhelníku ABC, přičemž $a > b$. Označme D střed přepony AB a E ($E \neq C$) průsečík strany BC s kružnicí opsanou trojúhelníku ADC. Vypočítejte obsah trojúhelníku EAD. (*Pavel Novotný*)

B – S – 3

Určete všechny dvojice celých kladných čísel m a n, pro něž platí $37 + 27^m = n^3$. (*Martin Panák*)

B – II – 1

Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\text{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. (*Pavel Leischner*)

B – II – 2

V matematické soutěži bylo zadáno 7 úloh a za každou z nich mohl soutěžící získat 0, 1 nebo 2 body. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků. Za každou úlohu bylo uděleno aspoň 95 bodů. Dokažte, že mezi soutěžícími najdeme dva tak, že každou z úloh vyřešil aspoň jeden z nich za 2 body.

(*Ján Mazák*)

B – II – 3

V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$. Označme K, L, M po řadě středy stran AB, CD, AD. Předpokládejme, že body A, B, L, D leží na jedné kružnici a zároveň i body K, L, D, M leží na jedné kružnici. Dokažte, že $|AC| = 2 \cdot |AD|$. (*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

Číslo n je součinem čtyř prvočísel. Jestliže každé z těchto prvočísel zvětšíme o 1 a vzniklá čtyři čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 větší než původní číslo n. Určete všechna taková n. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 1

Jsou-li počty zápalek na jednotlivých hromádkách a, b, c, řekneme, že hra je v pozici (a, b, c). Celkový počet zápalek je na začátku sudý a po každém tahu se zmenší o 2, proto zůstává stále sudý. Zanechá-li některý hráč po svém tahu pozici $(2, 2, c)$, kde c je nějaké kladné sudé číslo, donutí soupeře vytvořit aspoň jednu jednozápalkovou hromádku a to mu umožní dalším tahem vyhrát. Pozice $(2, 2, c)$ mohla vzniknout z pozice $(3, 3, c)$ nebo z pozice $(3, 2, c+1)$, tedy z pozic, v nichž jsou dvě čísla lichá a jedno sudé.

Dokážeme, že zanechávání pozic se třemi sudými čísly zajistí výhru. Z takové pozice soupeř jakýmkoliv svým tahem vytvoří pozici se dvěma čísly lichými a jedním sudým. Odebereme-li potom zápalky ze stejných hromádek jako v předešlém tahu soupeř, vytvoříme opět pozici se třemi sudými čísly. Strategie zanechávání pozic se třemi sudými čísly je tedy realizovatelná (za předpokladu, že celkový počet zápalek je sudý). Celkový počet zápalek se stále zmenšuje a počty zápalek na jednotlivých hromádkách se po každém tahu zmenší nanejvýš o 1. Proto musí dojít k situaci, kdy aspoň na jedné hromádce zůstane přesně jedna zápalka. To se ale může stát jen po soupeřově tahu (číslo 1 je totiž liché). Odebráním této zápalky spolu s kteroukoliv další hru vítězně zakončíme.

Popsanou strategii může použít hráč, který začíná, odebere-li ve svém prvém tahu po jedné zápalce z první a třetí hromádky. Pokud ale udělá jiný tah, může vítěznou strategii uplatnit jeho soupeř.

B – I – 2

Počet kladných dělitelů čísla, jehož rozklad na prvočinitele má tvar $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, je $(k_1+1)(k_2+1) \ldots (k_r+1)$. Proto číslo, které má přesně $6 = 3 \cdot 2$ kladných dělitelů, musí mít jeden z tvarů p^5 nebo $p^2 q$, kde p a q jsou prvočísla.

Uvažujme nejdříve možnost p^5. Toto číslo má dělitele 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5; zřejmě $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$. Dva nejmenší dělitelé jsou jednomístní a další dva dvojmístní. Větší z nich, tedy p^3, ale není druhou mocninou přirozeného čísla.

Hledané číslo má tedy tvar p^2q a jeho dělitelé jsou 1, p, p^2, q, pq, p^2q. Je-li $p > q$, potom $1 < q < p < pq < p^2 < p^2q$. Dva dvojmístní dělitelé by byli p a pq, ale pq není druhou mocninou přirozeného čísla.

Musí tedy být $p < q$. Ze všech šesti dělitelů jsou druhými mocninami přirozeného čísla jen 1 a p^2. Proto je p^2 větší ze dvou dvojmístných dělitelů a odtud vyplývá $1 < p < q < p^2 < pq < p^2q$. Dělitelé 1 a p jsou jednomístní, q a p^2 jsou dvojmístní, pq aspoň trojmístný a p^2q čtyřmístný. Odtud vyplývá $p \in \{5, 7\}$, $9 < q < p^2$, $pq > 99$, $999 < p^2q < 10\,000$.

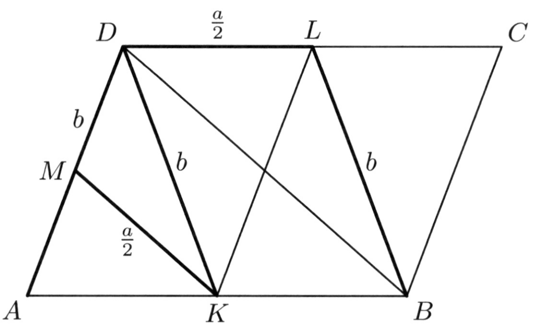
Pro $p = 5$ dostáváme $9 < q < 25$, $5q > 99$ a $999 < 25q < 10\,000$, těmto podmínkám žádné prvočíslo q nevyhovuje.

Pro $p = 7$ dostáváme $9 < q < 49$, $7q > 99$ a $999 < 49q < 10\,000$; těmto podmínkám vyhovují $q \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

Na tabuli je tedy napsáno jedno ze sedmi čísel $49 \cdot 23 = 1\,127$, $49 \cdot 29 = 1\,421$, $49 \cdot 31 = 1\,519$, $49 \cdot 37 = 1\,813$, $49 \cdot 41 = 2\,009$, $49 \cdot 43 = 2\,107$, $49 \cdot 47 = 2\,303$.

B – I – 3

Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ délky stran hledaného rovnoběžníku (obr. 17). Lichoběžníku $ABLD$ lze opsat kružnici, proto je rovnoramenný, a tudíž $|BL| = b$. Protože úsečky KB a DL jsou rovnoběžné a shodné, je $KBLD$ rovnoběžník, a tedy $|KD| = |BL| = b$. To znamená, že trojúhelník AKD je rovnoramenný, takže bod D musí ležet na ose jeho základny AK.



Obr. 17

Úsečka KL je střední příčkou rovnoběžníku $ABCD$, proto $KL \parallel MD$; $KLDM$ je tedy lichoběžník, a jelikož se mu dá opsat kružnice, je rovnoramenný a odtud $|KM| = |DL| = \frac{1}{2}a$. Protože KM je střední příčka trojúhelníku BDA, má strana BD délku $2 \cdot |KM| = a$. Bod D tedy leží na kružnici se středem B a poloměrem a.

Konstrukce: Sestrojíme střed K úsečky AB, osu o úsečky AK a kružnici k se středem B a poloměrem $|AB|$. Průsečík této kružnice s osou úsečky AK je bod D. Bod C je potom průsečík přímek vedených body D a B rovnoběžně s přímkami AB a AD.

Důkaz: Čtyřúhelník $ABCD$ má protilehlé strany rovnoběžné, je to tedy rovnoběžník. Označme L a M středy úseček CD a AD. Z toho, že bod D leží na ose úsečky AK, vyplývá $|KD| = |AD|$. Protože $KBLD$ je rovnoběžník, platí $|BL| = |KD| = |AD|$. Lichoběžník $ABDL$ je tedy rovnoramenný, a proto body A, B, L, D leží na jedné kružnici. Úsečka KM je střední příčka trojúhelníku BDA, proto $|KM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AB| = |DL|$; $KLDM$ je tedy rovnoramenný lichoběžník, takže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

Diskuse: Protože přímka o má od bodu B menší vzdálenost než bod A, protíná kružnici k ve dvou bodech. Úloha má tedy v každé polorovině s hraniční přímkou AB jedno řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v prvém řešení dokážeme, že $|KD| = |AD|$ a $|DB| = |AB|$. Trojúhelníky AKD a DAB jsou tedy rovnoramenné, a protože se shodují v úhlu u vrcholu A, jsou podobné. Proto $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$ čili $\frac{1}{2}a/b = b/a$ a odtud $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bod D je tedy průsečíkem kružnic se středy A a K a poloměrem $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

B – I – 4

Označme prostřední z hledaných čísel a. Součet čísel $a - 1004$, $a - 1003$, …, $a + 1003$, $a + 1004$ je $2009a = 41 \cdot 49 \cdot a$, přičemž $2004 \leqq a \leqq 8995$. Má platit $41 \cdot 49 \cdot a = n(n+1)(n+2)$ pro vhodné přirozené číslo n. Protože

$$2009 \cdot 2004 \leqq n(n+1)(n+2) < (n+1)^3,$$

musí platit $n+1 > \sqrt[3]{2009 \cdot 2004}$, a tedy $n \geqq 159$. Podobně z nerovností

$$2009 \cdot 8995 \geqq n(n+1)(n+2) > n^3$$

dostáváme $n < \sqrt[3]{2009 \cdot 8995}$ čili $n \leqq 262$.

Součin $n(n+1)(n+2)$ má být dělitelný čísly 41 a 49. Žádný z činitelů n, $n+1$, $n+2$ nemůže být dělitelný oběma čísly 41 i 49, neboť $41 \cdot 49 > 262 + 2$. Sedmi je dělitelný nanejvýš jeden z činitelů n, $n+1$, $n+2$;

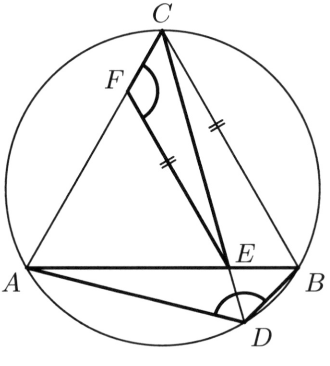
proto musí být některý z nich dělitelný číslem 49. Budeme tedy mezi čísly $159, 160, \ldots, 264$ hledat taková dvě, jejichž rozdíl je 1 nebo 2, přičemž jedno z nich je dělitelné číslem 41 a druhé číslem 49. Násobky čísla 41 v uvedeném rozsahu jsou $164, 205$ a 246, násobky čísla 49 jsou 196 a 245. Vyhovující čísla jsou tedy 245 a 246 a my máme dvě možnosti:

a) $n = 245$, $n+1 = 246$, $n+2 = 247$, $a = 245 \cdot 246 \cdot 247/2\,009 = 7\,410$ a hledaná čísla jsou $6\,406, 6\,407, \ldots, 8\,414$;

b) $n = 244$, $n+1 = 245$, $n+2 = 246$, $a = 244 \cdot 245 \cdot 246/2\,009 = 7\,320$ a hledaná čísla jsou $6\,316, 6\,317, \ldots, 8\,324$.

B – I – 5

Veďme bodem E rovnoběžku se stranou BC a označme F její průsečík se stranou AC. Trojúhelník AEF je rovnostranný, proto $|EF| = |AE|$ a také $|CF| = |BE|$. Trojúhelník FEC má tedy délky stran $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ (obr. 18), které nás zajímají. Dokážeme, že je podobný trojúhelníku ABD:



Obr. 18

Oba trojúhelníky se zřejmě shodují ve vyznačeném tupém úhlu velikosti 120° ($|\sphericalangle ADB| = 180° - |\sphericalangle ACB|$). Úhly ACD a ABD jsou obvodové nad tětivou AD, proto jsou shodné. Podle věty *uu* tedy skutečně platí $\triangle ECF \sim \triangle ABD$.

Jiné řešení. Obvodové úhly DAB a DCB jsou shodné stejně jako úhly ADC a ABC, proto $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Odtud vyplývá

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Analogicky jsou podobné i trojúhelníky DEB a AEC, takže

$$\frac{|BE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Z rovností

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BD|}$$

pak vyplývá podobnost trojúhelníku s délkami stran $|AE|$, $|CE|$, $|BE|$ a trojúhelníku ABD.

B – I – 6

Označme x_1 menší a x_2 větší kořen první rovnice. Potom platí $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b - 1$. Druhá rovnice má kořen $x_2 - x_1$, a protože součet obou jejích kořenů je (stejně jako u první rovnice) roven číslu a, musí být druhý kořen $a - (x_2 - x_1) = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$. Součin kořenů druhé rovnice je tak $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$. Odtud dostáváme $b = -1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b-1) - 2x_1^2$, a tedy

$$b = 3 + 2x_1^2 > 3, \tag{1}$$

neboť z rovnosti $x_1 = 0$ by vyplývalo $b + 1 = b - 1 = 0$.

Protože $x_2 - x_1 > 0$ a $b + 1 > 0$, musí být kladný i druhý kořen $2x_1$ druhé rovnice, tedy $x_1 > 0$; z rovnosti (1) tak máme

$$x_1 = \sqrt{\frac{b-3}{2}} \quad \text{a dále} \quad x_2 = \frac{b-1}{x_1} = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Kořeny druhé rovnice jsou pak

$$x_2 - x_1 = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} \quad \text{a} \quad 2x_1 = \sqrt{2(b-3)}.$$

Jiné řešení. Kořeny prvé rovnice jsou

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

přičemž pro diskriminant platí

$$D = a^2 - 4(b-1) > 0. \tag{2}$$

Rozdíl kořenů $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$ je kořenem druhé rovnice, proto

$$\begin{gathered} a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 = 0, \\ a^2 - 3b + 5 = a\sqrt{a^2 - 4b + 4}, \\ a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b - 5)^2 = a^4 - 4a^2b + 4a^2, \\ (3b - 5)^2 = a^2(2b - 6). \end{gathered} \tag{3}$$

Rovnost $a = 0$ nastává, právě když $3b-5 = 0$; potom by ale neplatilo (2). Proto $a^2 > 0$, $(3b-5)^2 > 0$, a tedy i $2b-6 > 0$ čili $b > 3$. Z (2) a (3) potom vyplývá $a > 0$ (pro $b > 3$ je totiž $a^2-3b+5 > a^2-4b+4 = D > 0$), takže

$$a = \frac{3b - 5}{\sqrt{2(b-3)}};$$

dále pak

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b - 5}{\sqrt{2(b-3)}} - \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \sqrt{\frac{b-3}{2}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b - 5}{\sqrt{2(b-3)}} + \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Druhá rovnice má kořeny

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} = x_2 - x_1$$

a

$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b-3)}.$$

B – S – 1

Z Viètových vztahů pro kořeny kvadratické rovnice (jež mimochodem plynou z rozkladu daného kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů) snadno zjistíme, že součet kořenů prvé rovnice je p, takže jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má být kořenem druhé rovnice, proto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \tag{1}$$

Podobně součet kořenů druhé rovnice je $-p$, jejich aritmetický průměr je $-\frac{1}{2}p$, a proto

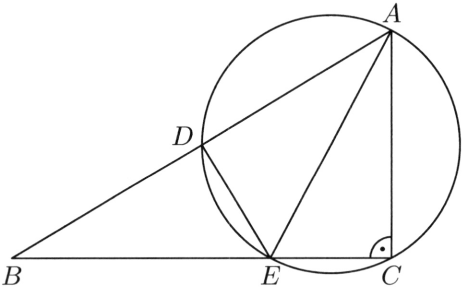
$$-\frac{p}{2}\cdot\left(-\frac{3p}{2}\right)=3+q. \tag{2}$$

Porovnáním obou vztahů (1) a (2) máme $3-q=3+q$ neboli $q=0$ a z (1) pak vyjde $p=2$ nebo $p=-2$.

Obě nalezená řešení vedou na tutéž dvojici rovnic $x(x-2)=3$, $x(x+2)=3$. Kořeny prvé z nich jsou čísla -1 a 3, jejich aritmetický průměr je 1. Kořeny druhé rovnice jsou čísla 1 a -3, jejich aritmetický průměr je -1.

B – S – 2

Označme c délku přepony AB, takže $|AD|=|BD|=\frac{1}{2}c$. Čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový a úhel ECA je pravý, proto i protilehlý úhel ADE je pravý (obr. 19). Pravoúhlé trojúhelníky ABC a EDB mají úhel u vrcholu



Obr. 19

B společný, proto $\triangle ABC\sim\triangle EBD$. Odtud

$$\frac{|ED|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|},\quad \text{a proto}\quad |ED|=\frac{bc}{2a}.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku EAD je tak (s využitím Pythagorovy věty)

$$S=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|ED|=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{bc}{2a}=\frac{bc^2}{8a}=\frac{b(a^2+b^2)}{8a}.$$

B – S – 3

Rovnici upravíme na tvar $37 = n^3 - 27^m$ a rozdíl třetích mocnin rozložíme na součin:

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Číslo 37 je prvočíslo a na pravé straně rovnosti je součin dvou celých čísel, přičemž druhý činitel je větší než 1. Proto musí platit

$$n - 3^m = 1 \tag{3}$$

a

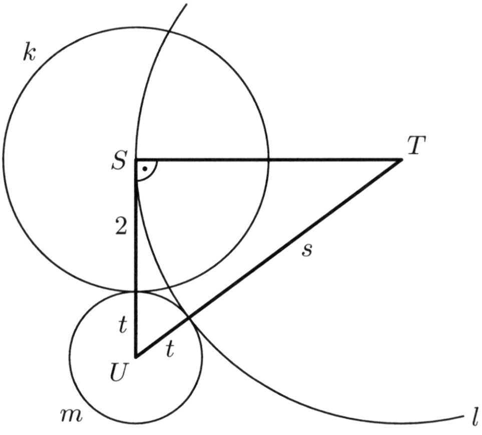
$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{4}$$

Pro $m \geqq 2$ je $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$, takže zbývá jediná možnost $m = 1$; z (3) potom plyne $n = 1 + 3^m = 4$. Zkouškou se přesvědčíme, že $37 + 27^1 = 4^3$, nebo ověříme, že dvojice $m = 1$, $n = 4$ vyhovuje podmínce (4).

B – II – 1

Trojúhelník UST je pravoúhlý. Jeho přepona UT má délku $s + t$, délky odvěsen jsou $|US| = t + 2$, $|ST| = s$ (obr. 20). Podle Pythagorovy věty proto platí

$$(s + t)^2 = (t + 2)^2 + s^2.$$



Obr. 20

Úpravami postupně dostáváme

$$s^2 + 2st + t^2 = t^2 + 4t + 4 + s^2,$$
$$st = 2t + 2,$$
$$t(s - 2) = 2.$$

Čísla t a $s - 2$ jsou celá, proto t musí být dělitelem čísla 2. Protože t je kladné, jsou jen dvě možnosti; jestliže $t = 1\,\text{cm}$, potom $s = 4\,\text{cm}$, a jestliže $t = 2\,\text{cm}$, potom $s = 3\,\text{cm}$.

B – II – 2

Nejdříve dokážeme, že každou úlohu vyřešilo za dva body aspoň 35 žáků: Kdyby totiž některou úlohu vyřešilo za 2 body a soutěžících, přičemž $a < 35$, bylo by za tuto úlohu uděleno nejvýše $2a + 60 - a = a + 60 < 95$ bodů, což odporuje zadání.

Z právě provedené úvahy tedy plyne, že celkový počet dvoubodových řešení je aspoň $7 \cdot 35 = 245$. Protože $245 > 4 \cdot 60$, musel některý žák vyřešit za dva body aspoň 5 úloh.

Dále budeme místo „vyřešit úlohu za dva body“ psát stručněji jen „vyřešit úlohu“. Jestliže některý žák vyřešil všech 7 úloh, stačí k němu do dvojice přidat libovolného jiného žáka. Jestliže některý žák vyřešil 6 úloh, přidáme k němu kteréhokoliv ze žáků, kteří vyřešili zbylou úlohu (máme z čeho vybírat, protože každou úlohu vyřešilo aspoň 35 žáků).

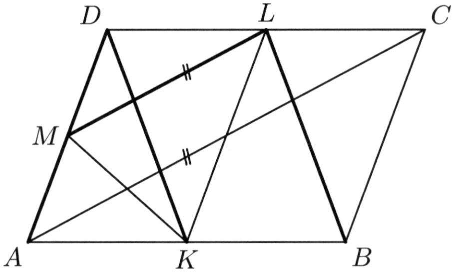
Zbývá tedy uvážit situaci, kdy některý soutěžící A vyřešil přesně 5 úloh. Každou ze dvou zbylých úloh vyřešilo aspoň 35 žáků (jiných než A). A protože všech žáků jiných než A je 59, musí mezi nimi být aspoň $2 \cdot 35 - 59 = 11$ takových, kteří vyřešili obě tyto úlohy. Stačí tudíž libovolného z nich přidat k žákovi A.

Jiné řešení. „Vyřešit úlohu“ bude znamenat totéž co v předchozím řešení.

Za všech 7 úloh dohromady bylo uděleno aspoň $95 \cdot 7 = 665 > > 60 \cdot 11$ bodů, takže některý žák získal aspoň 12 bodů, a tudíž vyřešil aspoň pět úloh (žák, který vyřešil právě k úloh, získal totiž nejvýše $2k + (7 - k) = k + 7$ bodů). Vyberme tedy žáka A a 5 konkrétních úloh z těch, které vyřešil. Za zbylé dvě úlohy získalo zbylých 59 žáků aspoň $2 \cdot (95 - 2) = 186 > 3 \cdot 59$ bodů, takže jeden z nich, řekněme žák B, získal 4 body, a tudíž vyřešil obě úlohy. Dvojice žáků A, B má požadovanou vlastnost.

B – II – 3

Lichoběžníky $ABLD$ a $KLDM$ jsou rovnoramenné, protože jsou tětivové. Odtud vyplývá shodnost ramen $|AD| = |BL|$ a shodnost úhlopříček $|KD| = |LM|$ (obr. 21). Střední příčka KL dělí rovnoběžník $ABCD$ na dva shodné rovnoběžníky, pro jejichž úhlopříčky platí $|KD| = |BL|$. Úsečka ML je střední příčkou trojúhelníku ACD, proto $|AC| = 2 \cdot |ML|$. Spojením výše uvedených rovností máme $|AC| = 2 \cdot |ML| = 2 \cdot |KD| = 2 \cdot |BL| = 2 \cdot |AD|$.



Obr. 21

Jiné řešení. Budeme postupovat stejně jako ve druhém řešení třetí úlohy domácího kola (na domácí kolo se lze odvolat bez dalšího důkazu): Protože $ABLD$ je tětivový (a tudíž rovnoramenný) lichoběžník, je $|KD| = |BL| = |AD|$. Podobně je i lichoběžník $KLDM$ rovnoramenný, takže $|MK| = |DL|$ a $|DB| = 2|MK| = 2|DL| = |DC| = |AB|$. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků AKD a DAB (shodují se v úhlu u vrcholu A svých základen) pak plyne, že $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, odkud po dosazení $|AK| = \frac{1}{2}|AB|$ vychází $|DB| = |AB| = \sqrt{2} \cdot |AD|$. Nyní využijeme známou rovnoběžníkovou rovnost $|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2$. Dosazením za $|AB|$ a $|DB|$ dostaneme $|AC|^2 + 2 \cdot |AD|^2 = 4 \cdot |AD|^2 + 2 \cdot |AD|^2$ a odtud $|AC|^2 = 4 \cdot |AD|^2$ čili $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

B – II – 4

Označíme-li a, b, c, d prvočísla, jejichž součinem je číslo n, platí rovnost

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = abcd + 2\,886.$$

Kdyby byla všechna čísla a, b, c, d lichá, bylo by na levé straně této rovnosti sudé číslo, kdežto na pravé straně číslo liché. Proto je některé z prvočísel a, b, c, d (například a) rovno dvěma. Dosazením dostaneme

$$3(b+1)(c+1)(d+1) = 2bcd + 2\,886.$$

Protože čísla $3(b+1)(c+1)(d+1)$ i $2\,886$ jsou dělitelná třemi, musí být dělitelné třemi i $2bcd$. Proto je některé z prvočísel b, c, d (například b) rovno třem. Dosazením dostaneme $12(c+1)(d+1) = 6cd + 2\,886$, po vydělení šesti $2(c+1)(d+1) = cd + 481$ a po dalších úpravách $cd + 2c + 2d = 479$, $(c+2)(d+2) = 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$. Předpokládáme-li $c \leqq d$, máme vzhledem k nerovnosti $c + 2 > 3$ dvě možnosti:

1. $c + 2 = 7$, $d + 2 = 69$, odtud $c = 5$, $d = 67$.

2. $c+2 = 21$, $d+2 = 23$, odtud $c = 19$, $d = 21$, což nevyhovuje, neboť 21 není prvočíslo.

Jediné vyhovující n je tedy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2\,010$.

Poznámka. Závěrečné úvahy lze také provést pomocí vyjádření

$$d = \frac{479 - 2c}{c+2} = \frac{483}{c+2} - 2;$$

$c + 2$ tak musí být některý z dělitelů čísla 483, který je větší než 3, tedy $c + 2 \in \{7, 21, 23, 69, 161, 483\}$ a $c \in \{5, 19, 21, 67, 159, 481\}$. Protože c i d jsou prvočísla, vyhovují pouze možnosti $c = 5$, $d = 67$ nebo $c = 67$, $d = 5$.