60. ročník Matematické olympiády na středních školách

52. mezinárodní matematická olympiáda

In: Zdeněk Dvořák (editor); Zbyněk Falt (editor); Karel Horák (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 60. ročník Matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011. 52. Mezinárodní matematická olympiáda. 5. Středoevropská matematická olympiáda. 23. Mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. pp. 153–166.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/405223`

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

52. mezinárodní matematická olympiáda

Padesátý druhý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 12. do 24. července 2011 v Nizozemí. Olympiády se zúčastnilo 564 soutěžících ze 101 zemí.

České družstvo tvořili *Michael Bílý* z Gymnázia Jaroslava Vrchlického v Klatovech, *Miroslav Koblížek* z Gymnázia Žamberk, *Dung Anh Le* z Gymnázia Tachov, *Daniel Šafka* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Štěpán Šimsa* z Gymnázia Josefa Jungmana v Litoměřicích a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Organizace celého průběhu olympiády byla na velmi vysoké úrovni. Ostatně Nizozemí je známo tím, že se zde vše důkladně plánuje. To je dáno i tím, že zhruba třetina území této země leží pod úrovní moře.

Olympiáda začala tradičně zasedáním mezinárodní jury, složené z vedoucích národních delegací. Jedním z úkolů jury je vybrat šest soutěžních úloh z problémů, které navrhly jednotlivé země. Jury má rovněž na starost případné změny regulí olympiády, jednání o budoucích pořadatelích a v neposlední řadě pak vedoucí jednotlivých delegací překládají zadání vybraných úloh do národních jazyků. Poznamenejme, že jako dějiště následujících mezinárodních olympiád byly schváleny tyto země: 2013 – Kolumbie; 2014 – Jihoafrická republika; 2015 – Thajsko (vždy se jednalo o jediné kandidáty). Jednání se odehrávala v areálu bývalého kláštera nedaleko Eindhovenu. Místní univerzita, Technická univerzita Eindhoven, byla jedním z organizátorů a sponzorů celé akce.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Amsterdamu v sobotu 16. července a byli ubytováni v hotelu Novotel, jižně od centra města.

V neděli 17. července bylo na programu slavnostní zahájení v kongresovém centru RAI, což je jedno z největších konferenčních zařízení v celém Nizozemí. Tohoto zahájení se zúčastnili i vedoucí delegací, kteří sem byli převezeni pouze na ně. Během zahájení se na pódiu krátce představily všechny výpravy, doprovázené taneční skupinou ISH. Součástí byl i videopozdrav nizozemské ministryně vzdělávání, kultury a vědy *Janneke Marlene van Bijsterveldtové-Vilegenthartové.*

Ve dnech 18. a 19. července proběhla vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící měli na tři příklady čtyři a půl hodiny. Během první půlhodiny po zadání úloh mohou soutěžící klást otázky k textům úloh. Ty jsou poté elektronicky odeslány do místa, kde jury zasedá. Vedoucí družstva, jehož žák položí dotaz (v rodném jazyce), přeloží dotaz pro celou jury, navrhne odpověď a ta je pak schválena či upravena a odeslána zpět. Druhý soutěžní den se sešlo 189 otázek, zejména ke čtvrté úloze, jejíž znění nebylo v některých jazycích zcela srozumitelné. Zodpovídání těchto dotazů zabralo přes dvě hodiny. Následně byly vedoucí delegací definitivně přesunuti do Amsterdamu, do stejného hotelu, kde už přebývali pedagogičtí vedoucí a soutěžící.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny nejrůznější exkurze (výlet na kolech – typicky pro Nizozemí, plavba na jachtě, návštěva pláže). Vedoucí se pak věnovali opravám řešení. Ta jsou po soutěži zkopírována a nezávisle opravena též koordinátory, což jsou zkušení matematici z celého světa, které zajišťuje pořádající země (v tomto roce bylo přítomno téměř 80 koordinátorů). Po opravách se vedoucí a koordinátoři sejdou, porovnají bodová hodnocení a snaží se dospět ke shodě. Celý proces koordinace trvá tři dny.

Slavnostní zakončení olympiády se konalo opět v centru RAI (v „ráji“, jak říkali čeští a slovenští účastníci). Předávání medailí se z významných osobností zúčastnil i předseda organizačního výboru *Robbert Dijkgraaf*, přední světový a holandský matematik. I při zakončení všechno pěkně klapalo, projevy byly krátké a výstižné, nikdo se nenudil. Na závěr byla předána vlajka IMO pořadatelům příští olympiády. Ta se uskuteční v Mar del Plata v Argentině.

Co se týče výsledků českého družstva, splnil náš tým nelehký úkol získat přesně tolik bodů, kolik bylo zúčastněných zemí. Tento „jedinečný“ výkon nás zařadil na 39. místo v hodnocení zemí, pět míst za Slovenskem (v porovnání s loňským rokem jsme si polepšili o 17 bodů a 9 míst). Žádný z českých účastníků neodjížděl s prázdnou: Anh Dung Le získal stříbrnou medaili, Štěpán Šimsa, Michael Bílý a Tomáš Zeman medaili bronzovou a konečně Miroslav Koblížek a Daniel Šafka čestné uznání za bezchybné vyřešení alespoň jedné úlohy. Nutno podotknout, že Miroslavu Koblížkovi unikla o jediný bod bronzová medaile a Štěpánu Šimsovi o bod medaile stříbrná.

Absolutní vítězkou olympiády se stala s největším možným bodovým ziskem *Lisa Sauermannová* z Německa, která se tak stala nejúspěšnější účastnicí olympiád všech dob (celkem získala čtyři zlaté a jednu stříbrnou medaili). Dívky tvořily 11 % účastníků, což je na matematickou olympiádu vysoké číslo. Nejúspěšnější zemí se pak již tradičně stala Čína, i když druhé Spojené státy americké jí šlapaly na paty. Velkým překvapením je pak třetí místo Singapuru se slušným náskokem před čtvrtým Ruskem.

V následujícím přehledu můžete najít výsledky celková pořadí členů českého a slovenského družstva. Na zlatou medaili tentokrát stačilo 28 bodů, na stříbrnou 22 bodů a na bronzovou 16.

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
202.–221.	Michael Bílý	7	1	0	6	4	0	18	B
83.–112.	Anh Dungh Le	5	0	7	7	4	0	23	S
282.–302.	Miroslav Koblížek	7	0	0	7	1	0	15	HM
403.–420.	Daniel Šafka	7	0	0	1	0	0	8	HM
145.–170.	Štěpán Šimsa	7	0	0	7	7	0	21	B
253.–281.	Tomáš Zeman	7	0	0	7	2	0	16	B
	Celkem	42	1	7	35	18	0	101	

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
316.–320.	Marián Horňák	3	1	0	7	2	0	13	HM
222.–252.	Natálie Karásková	7	0	0	7	2	1	17	B
74.–82.	Ondrej Kováč	7	4	0	6	7	0	24	S
186.–201.	Matúš Stehlík	7	0	0	7	5	0	19	B
253.–281.	Michal Tóth	7	1	0	7	1	0	16	B
113.–144.	Martin Vodička	7	1	0	7	7	0	22	S
	Celkem	38	7	0	41	24	1	111	

Pro úplnost uvádíme i tradičně sestavované neoficiální pořadí zemí podle počtu dosažených bodů společně s počty medailí, které získaly (čísla v závorce za názvem země značí počet reprezentantů, pokud byl nižší než šest):

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	189
USA	6	0	0	184
Singapur	4	1	1	179
Rusko	2	4	0	161
Thajsko	3	2	1	160
Turecko	3	2	1	159
KLDR	3	3	0	157
Rumunsko	1	5	0	154
Tchaj-wan	2	4	0	154
Írán	2	4	0	151
Německo	1	3	2	150
Japonsko	2	2	2	147
Korea	2	3	0	144
Hongkong	2	1	3	138
Ukrajina	1	2	3	136
Polsko	2	2	1	136
Kanada	1	2	3	132
Velká Británie	2	1	2	132
Itálie	1	3	1	129
Brazílie	0	3	3	121
Bulharsko	0	2	3	121
Mexiko	0	2	4	120
Indie	1	1	2	119
Izrael	1	0	4	119
Austrálie	0	3	3	116
Maďarsko	0	2	3	116
Srbsko	1	2	1	116
Nizozemí	0	2	3	115
Indonésie	0	2	4	114
Nový Zéland	0	2	2	114
Belgie	0	2	3	113
Peru	1	0	2	113
Vietnam	0	0	6	113
Francie	0	1	4	111
Slovensko	0	2	3	111
Chorvatsko	0	1	5	110
Rakousko	0	2	2	110
Kazachstán	0	1	3	105
Česká republika	0	1	3	101
Řecko	1	0	3	99
JAR	0	1	2	93
Malajsie	1	1	1	93
Bolívie	0	0	4	88
Švýcarsko	0	2	1	88
Litva	0	0	4	87
Moldavsko	0	1	0	86
Portugalsko	1	0	2	86
Španělsko	0	0	3	83
Argentina	1	0	0	77
Dánsko	0	1	1	76
Estonsko	0	0	2	76

	I	II	III	body
Kolumbie	0	0	1	73
Makao	0	0	2	71
Filipíny (5)	0	0	3	69
Mongolsko	0	0	2	69
Švédsko	0	1	0	69
Finsko	0	1	0	68
Gruzie	0	0	2	68
Lotyšsko	0	1	1	68
Tádžikistán	0	1	0	68
Norsko	0	1	0	67
Bělorusko	0	0	1	64
Maroko	0	1	1	64
Slovinsko	0	0	1	64
Turkmenistán	0	0	3	64
Uzbekistán (5)	0	0	1	62
Arménie (5)	0	1	0	61
Ázerbájdžán	0	1	1	61
Kostarika (4)	0	1	0	57
Saudská Arábie	0	0	2	53
Kypr	0	0	1	51
Bangladéš	0	0	1	50
Srí Lanka	0	0	1	49
Chile	0	0	1	48
Island	0	0	0	48
Lucembursko	0	0	1	48
Tunisko	0	0	1	46
Nigérie	0	0	1	40
Makedonie	0	0	1	38
Paraguay (5)	0	0	0	38
Pákistán (4)	0	0	1	35
Pobřeží slonoviny	0	0	0	34
Ekvádor	0	0	1	32
Portoriko (4)	0	0	0	32
Trinidad a Tobago	0	0	0	29
Uruguay (4)	0	0	0	29
Irsko	0	0	0	26
Albánie	0	0	0	24
Kosovo	0	0	0	22
Honduras (3)	0	0	0	21
Venezuela (2)	0	0	0	21
Bosna a Hercegovina (4)	0	0	0	17
Kyrgyzstán (5)	0	0	0	14
Sýrie	0	0	0	14
Černá hora (4)	0	0	0	13
Salvádor (2)	0	0	0	11
Guatemala (4)	0	0	0	8
Panama (1)	0	0	0	6
Lichtenštejnsko (1)	0	0	0	4
Kuvajt (5)	0	0	0	1
Spoj. arab. emiráty (5)	0	0	0	1

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Pro libovolnou množinu $\mathsf{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čtyř (navzájem různých) kladných celých čísel označme s_{A} součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Dále nechť n_{A} značí počet dvojic (i, j), kde $1 \leqq i < j \leqq 4$ a $a_i + a_j$ dělí s_{A}. Určete všechny čtyřprvkové množiny A kladných celých čísel, pro které je hodnota n_{A} největší možná. (*Mexiko*)

2. Je dána množina S alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces. Zpočátku zvolíme nějakou přímku l procházející právě jedním bodem $P \in \mathsf{S}$. Tou přímkou začneme otáčet ve směru pohybu hodinových ručiček okolo *středu* P, dokud „nenarazí“ na další bod množiny S — označme jej Q. Přímkou nadále otáčíme ve stejném směru, nyní ovšem okolo středu Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že bod $P \in \mathsf{S}$ a přímku l procházející bodem P lze zvolit tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít za střed otáčení každý z bodů množiny S nekonečněkrát. (*Velká Británie*)

3. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel a nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, jež pro všechna reálná x a y splňuje nerovnost

$$f(x + y) \leqq yf(x) + f\bigl(f(x)\bigr).$$

Dokažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \leqq 0$. (*Bělorusko*)

4. Nechť n je celé kladné číslo. Mějme rovnoramenné váhy a n závaží o hmotnostech $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. V n krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na miskách vah, a jeho umístění buď na levou, nebo na pravou misku vah tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto n kroků existuje? (*Írán*)

5. Nechť f je funkce z množiny celých čísel do množiny celých kladných čísel taková, že pro libovolná celá m a n je rozdíl $f(m) - f(n)$ dělitelný číslem $f(m - n)$. Dokažte, že pro libovolná celá m a n taková, že $f(m) \leqq f(n)$, je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$. (*Írán*)

6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a k kružnice mu opsaná. Dále nechť t je tečna kružnice k a t_a, t_b, t_c jsou po řadě obrazy přímky t

v osové souměrnosti podle přímek BC, CA, AB. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami t_a, t_b, t_c se dotýká kružnice k. (*Japonsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Dvojic (i, j) splňujících $1 \leqq i < j \leqq 4$ je jen šest. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Potom platí $0 < < a_1 + a_2 < a_3 + a_4$ a také $0 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4$, takže

$$a_3 + a_4 < s_{\mathsf{A}} < 2(a_3 + a_4) \quad \text{neboli} \quad \tfrac{1}{2}s_{\mathsf{A}} < a_3 + a_4 < s_{\mathsf{A}}$$

a

$$a_2 + a_4 < s_{\mathsf{A}} < 2(a_2 + a_4) \quad \text{neboli} \quad \tfrac{1}{2}s_{\mathsf{A}} < a_2 + a_4 < s_{\mathsf{A}}.$$

To znamená, že ani $a_3 + a_4$, ani $a_2 + a_4$ nemůže dělit s_{A}. Přinejmenším dva ze součtů $a_i + a_j$ tedy nedělí s_{A}, proto $n_{\mathsf{A}} \leqq 4$.

Předpokládejme, že pro nějakou množinu A platí $n_{\mathsf{A}} = 4$. V takovém případě všechny zbylé čtyři součty $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$ už musejí být děliteli s_{A}. Jelikož ani jeden z nich není roven s_{A}, musí být každý z nich nejvýše roven $\frac{1}{2}s_{\mathsf{A}}$. Pro součty $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$ to znamená, že $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_{\mathsf{A}}$, neboť $(a_1 + a_4) + (a_2 + a_3) = s_{\mathsf{A}}$.

Pro zbylé dva součty pak platí $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4 = \frac{1}{2}s_{\mathsf{A}}$, a protože oba dělí číslo s_{A}, musí být

$$a_1 + a_2 = \frac{s_{\mathsf{A}}}{x} \quad \text{a} \quad a_1 + a_3 = \frac{s_{\mathsf{A}}}{y} \tag{1}$$

pro vhodná přirozená čísla x, y, přičemž $x > y \geqq 3$. Je tedy

$$2a_1 = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) - (a_2 + a_3) = \frac{s_{\mathsf{A}}}{x} + \frac{s_{\mathsf{A}}}{y} - \frac{s_{\mathsf{A}}}{2} > 0 \tag{2}$$

neboli

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}.$$

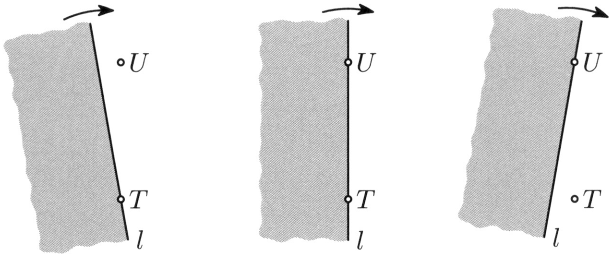
Vidíme, že nemůže být $1/x < 1/y < 1/4$, tudíž $y \leqq 3$, což s předchozí opačnou nerovností dává $y = 3$, a $1/x > 1/2 - 1/y = 1/6$ neboli $x \leqq 5$. Je tedy $3 = y < x \leqq 5$. Těmto nerovnostem vyhovují jen dvě dvojice přirozených čísel: $(x, y) = (4, 3)$ a $(x, y) = (5, 3)$.

Pro $x = 4$ dostáváme z (2) $a_1 = \frac{1}{24}s_{\mathsf{A}}$ a z (1) pak $a_2 = \frac{5}{24}s_{\mathsf{A}}$, $a_3 = = \frac{7}{24}s_{\mathsf{A}}$ a konečně z rovnosti $a_1 + a_4 = \frac{1}{2}s_{\mathsf{A}}$ plyne $a_4 = \frac{7}{24}s_{\mathsf{A}}$, je tedy $\mathsf{A} = \{k, 5k, 7k, 11k\}$ pro nějaké přirozené číslo k.

Podobně pro $x = 5$ vyjde $\mathsf{A} = \{k, 11k, 19k, 29k\}$ pro nějaké přirozené číslo k. Snadno ověříme, že pro každou takovou množinu opravdu $n_{\mathsf{A}} = 4$.

Odpověď. Největší možná hodnota n_{A} je 4 a nabývá se pro množiny A tvaru $\{k, 5k, 7k, 11k\}$ a $\{k, 11k, 19k, 29k\}$, kde k je libovolné přirozené číslo.

2. Zvolíme-li na dané přímce orientaci, můžeme mluvit o levé a pravé polorovině (v obr. 41 je levá polorovina označena šedou barvou). Všimněme si, že když se během větrného mlýna mění střed otáčení z bodu T na bod U, po změně se bod T nachází v téže polorovině určené přímkou l, v níž se před změnou nacházel bod U (obr. 41). Vidíme, že když pomineme okamžiky, v nichž se mění střed otáčení (l obsahuje právě dva body z S), zůstává počet bodů z S nacházejících se v šedé části stále stejný.



Obr. 41

Dále využijeme toho, že každým bodem množiny S lze vést (orientovanou) přímku, která obsahuje jediný bod množiny S a dělí její body „napůl“, a to takovým způsobem, že vlevo od ní je stejný počet bodů z S jako vpravo (je-li $n = |\mathsf{S}|$ liché), anebo o jeden bod méně než vpravo (v případě sudého n). Stačí si totiž uvědomit, že pokud nějakou orientovanou přímku v daném bodě otočíme o $180°$, vymění se počty bodů nalevo a napravo od dané přímky. Protože při postupném otáčení přímky se počet bodů řekněme vlevo mění vždy o jeden, v jisté poloze tak musí nastat popsaná rovnováha. Nazvěme každou takovou přímku *půlící.* Vezměme nyní libovolnou půlící přímku l a bod P na ní. Vzhledem k tomu, že se během větrného mlýna nemění počty bodů nalevo a napravo od l, bude příslušná přímka (s výjimkou okamžiku, kdy se mění střed otáčení) stále půlící přímkou. Přitom během otočení o prvních $180°$ zřejmě nemůže minout žádný z bodů množiny S, a tak se postupně všechny vystřídají v roli středu otáčení. Zároveň je zřejmé i to, že při otáčení o další násobky $180°$ bude přímka l procházet znovu všemi body z S ve stejném pořadí jako při prvním otočení. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

3. V dané funkcionální nerovnici se jako argumenty funkce objevují výrazy $x+y$ a x. Abychom se zbavili součtu v argumentu, použijeme substituci $y=t-x$. Pro všechna reálná čísla x, t pak platí

$$f(t) \leqq tf(x) - xf(x) + f(f(x)). \tag{1}$$

V dalším kroku eliminujeme člen $f(f(x))$ tak, že do (1) dosadíme nejdříve $t=f(a)$, $x=b$ a potom $t=f(b)$, $x=a$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(f(a)) - f(f(b)) &\leqq f(a)f(b) - bf(b), \\ f(f(b)) - f(f(a)) &\leqq f(a)f(b) - af(a). \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme, že pro všechna a, b platí

$$2f(a)f(b) \geqq af(a) + bf(b).$$

Volbou $b = 2f(a)$ dosáhneme, že levá strana poslední nerovnosti bude stejná jako druhý sčítanec na pravé straně. Po jejich odečtení tak zůstane nerovnost $af(a) \leqq 0$, která musí být splněna pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Proto

$$f(a) \geqq 0 \quad \text{pro všechna } a < 0. \tag{2}$$

Pokud by pro nějaké x platilo $f(x) > 0$, byla by pro takovou hodnotu pravá strana nerovnosti (1) v proměnné t rostoucí lineární funkcí, tedy by nabývala na oboru záporných čísel určitě i záporné hodnoty. Pak by však záporné hodnoty na oboru záporných čísel musela nabýt i levá strana, čili funkce f, což je ve sporu s (2). Proto

$$f(x) \leqq 0 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Spojením (2) a (3) ihned máme $f(x) = 0$ pro všechna $x < 0$. Zbývá určit hodnotu $f(0)$. Pokud v (1) položíme $t = x < 0$, dostaneme $0 \leqq 0 - 0 + f(0)$ neboli $f(0) \geqq 0$. Vzhledem k (3) už pak nutně $f(0) = 0$.

Poznámka. Daná funkcionální nerovnice má i netriviální řešení

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x \geqq 0, \end{cases}$$

které je dokonce spojité.

4. Označme p_n hledaný počet posloupností. Všimněme si, že na vahách nikdy nenastane rovnováha. Každé závaží je totiž (o jedna) těžší než všechna lehčí závaží dohromady. Závaží o hmotnosti 1 tudíž můžeme položit na libovolnou misku vah v libovolném kroku, pouze v prvním kroku je musíme položit vlevo. Navíc vynecháme-li v nějaké přípustné posloupnosti kroků závaží o hmotnosti 1, obdržíme přípustnou posloupnost umístěných závaží o hmotnostech $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Takových posloupností je zřejmě p_{n-1}, protože vynásobení hmotností dvěma nemá na (ne)rovnováhu vliv. A naopak do libovolné z takových posloupností můžeme zařadit závaží 1 právě $2n-1$ různými způsoby, neboť jen v prvním kroku nemáme na vybranou mezi oběma miskami, načež získáme přípustnou posloupnost závaží $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Dostáváme tak rekurentní vztah $p_n = (2n-1)p_{n-1}$, což spolu se zřejmou hodnotou $p_1 = 1$ dává

$$p_n = (2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1 = (2n-1)!!.$$

Jiné řešení. Označme p_n hledaný počet posloupností. Všimněme si, že přípustných způsobů umístění závaží $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ je stejně jako přípustných způsobů umístění libovolné sady n závaží, z nichž každé má tu vlastnost, že je těžší než všechna lehčí závaží dohromady. Říkejme takovéto sadě *nevyvážená*. Navíc výběrem libovolného počtu libovolných závaží z nevyvážené sady dostáváme opět nevyváženou sadu.

Způsoby umístění závaží $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ rozdělme podle toho, kdy jsme na váhy umístili nejtěžší závaží (musí přijít vždy na levou misku). Dejme tomu, že se tak stalo v k-tém kroku. Před tím bylo umístěno nějakých $k-1$ (z $n-1$ zbývajících) závaží tvořících nevyváženou sadu. Ta mohla být umístěna p_{k-1} způsoby. Po položení nejtěžšího závaží již můžeme každé ze zbývajících $n-k$ závaží položit na libovolnou z obou misek. Dostáváme tak rekurentní vztah

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_{k-1} 2^{n-k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!\, p_{k-1} 2^{n-k}}{(k-1)!}$$

(klademe $p_0 = 1$). Úpravami pak dostáváme

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)! p_{k-1} 2^{n-k}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!\, p_{k-1} 2^{n-k}}{(k-1)!} + p_{n-1} = \\ &= 2(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{((n-1)-1)!\, p_{k-1} 2^{(n-1)-k}}{(k-1)!} + p_{n-1} = \\ &= 2(n-1)p_{n-1} + p_{n-1} = (2n-1)p_{n-1}, \end{aligned}$$

a dostáváme stejný rekurentní vztah jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Jak už jsme poznamenali v předchozím řešení, nezávisí počet zmíněných posloupností na konkrétních hmotnostech závaží, ale jen na jejich „nevyváženosti".

Označme p_n hledaný počet posloupností a předpokládejme, že 2^k je hmotnost posledního umístěného závaží ($0 \leqq k \leqq n-1$). Protože množina $\{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\} \setminus \{2^k\}$ je zřejmě nevyvážená, existuje v tomto případě celkem p_{n-1} různých posloupností, jak realizovat $n-1$ kroků bez použití závaží o hmotnosti 2^k. Pro jeho umístění v posledním kroku pak máme ke každé z těchto posloupností dvě možnosti, pokud $k < n-1$ (nejtěžší závaží je už na levé misce), anebo možnost jedinou, pokud $k = n-1$, neboť nejtěžší závaží můžeme umístit jedině na levou misku, máme-li dodržet podmínku úlohy. Celkově tak dostáváme

$$p_n = (n-1) \cdot 2p_{n-1} + p_{n-1} = (2n-1)p_{n-1}.$$

Odpověď. Hledaný počet způsobů je roven součinu prvních n lichých čísel (zkráceně tento výraz označujeme jako v prvním řešení $(2n-1)!!$ a nazýváme dvojný faktoriál).

5. Pokud $f(m) = f(n)$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že pro celá čísla m, n platí $f(m) < f(n)$. Z dané podmínky díky tomu plyne $f(m-n) \leqq |f(m) - f(n)| = f(n) - f(m) < f(n)$. Dostáváme tak

$$-f(n) < -f(m-n) < f(m) - f(m-n) < f(m) < f(n).$$

Pro $d = f(m) - f(m-n)$ tudíž platí $|d| < f(n)$, zatímco z dané podmínky plyne

$$f(n) = f\bigl(m - (m-n)\bigr) \mid d,$$

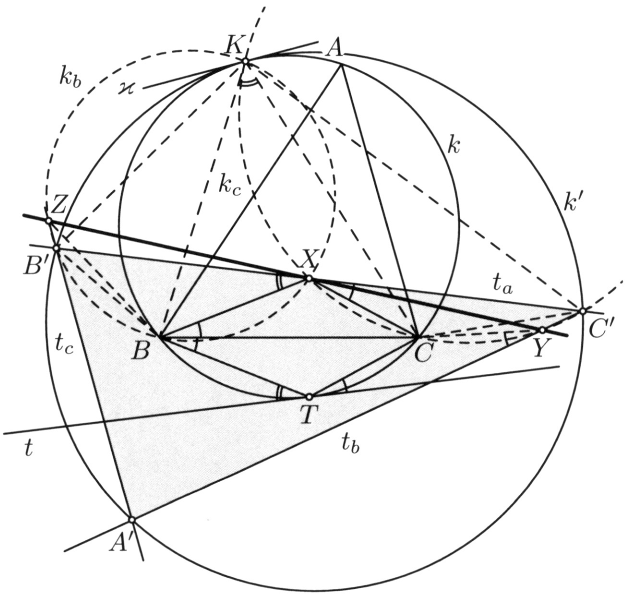
což ovšem znamená, že $d = 0$ neboli $f(m) = f(m-n)$. Z dané podmínky tak konečně plyne, že $f(m)$ dělí $f(m) - f(n)$, a tedy i $f(n)$, což jsme měli dokázat.

6. Označme T bod dotyku přímky t s kružnicí k a vrcholy trojúhelníku určeného přímkami t_a, t_b, t_c označme následovně: $A' := t_b \cap t_c$, $B' = t_a \cap t_c$ a $C' := t_a \cap t_b$. Pro zjednodušení zápisu budeme pracovat s orientovanými úhly: pro přímky p, q bude $\langle p, q \rangle$ značit úhel, o který je nutno přímku p otočit v kladném smyslu, abychom dostali přímku rovnoběžnou s přímkou q. Orientované úhly počítáme modulo $180°$.

Označme po řadě X, Y, Z body souměrně sdružené s bodem T podle přímek BC, CA, AB. Protože kolmé průměty bodu T na tyto tři přímky leží na Simsonově přímce daného trojúhelníku ABC, leží v přímce i body X, Y, Z coby jejich obrazy ve stejnolehlosti se středem T. Označme $\varphi = \langle t, TC \rangle = \langle BT, BC \rangle$, pak vzhledem k osové souměrnosti dle přímek AC a BC platí

$$\langle BC, BX \rangle = \langle BT, BC \rangle = \varphi,$$
$$\langle XC, XC' \rangle = \langle t, TC \rangle = \langle YC, YC' \rangle = \varphi.$$

Z poslední rovnosti ovšem plyne, že body X, Y, C, C' leží na kružnici, kterou označíme k_c. Podobně zavedeme i kružnice k_a a k_b. Kružnici opsanou trojúhelníku $A'B'C'$ označíme k' (obr. 42). Podle známé Miquelovy věty,[1] kterou použijeme na přímky $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ a XY, nyní platí, že



Obr. 42

všechny čtyři kružnice k', k_a, k_b, k_c mají společný bod, který označíme K. Jakmile se nám podaří dokázat, že bod K leží i na kružnici k a že obě kružnice k a k' v něm mají společnou tečnu, bude tvrzení úlohy dokázáno.

Ze souměrnosti plyne $|XB| = |TB| = |ZB|$, takže bod B je středem jednoho z oblouků XZ kružnice k_b, je tedy $\langle KB, KX \rangle = \langle XZ, XB \rangle$.

[1] Viz např. Vrba, Horák: Vybrané úlohy matematické olympiády kategorie A, SPN, Praha 1988, řešení úlohy 96.

Podobně platí $\langle KX, KC\rangle = \langle XC, XY\rangle$. Sečtením obou těchto rovností a ze souměrnosti podle přímky BC dostáváme

$$\begin{aligned}\langle KB, KC\rangle &= \langle KB, KX\rangle + \langle KX, KC\rangle = \langle XZ, XB\rangle + \langle XC, XY\rangle = \\ &= \langle XC, XB\rangle = \langle TB, TC\rangle.\end{aligned}$$

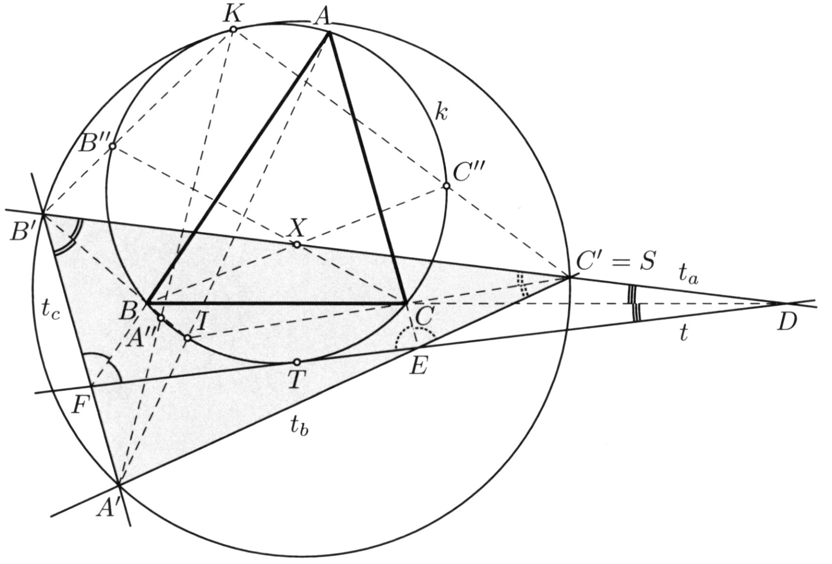
To znamená, že bod K leží na kružnici k.

Označme nyní $\varkappa$ tečnu kružnice k v bodě K. Pak platí

$$\begin{aligned}\langle \varkappa, KC'\rangle &= \langle \varkappa, KC\rangle + \langle KC, KC'\rangle = \langle KB, BC\rangle + \langle XC, XC'\rangle = \\ &= (\langle KB, BX\rangle - \langle BC, BX\rangle) + \varphi = \langle KB', B'X\rangle - \varphi + \varphi = \\ &= \langle KB', B'C'\rangle.\end{aligned}$$

To znamená, že $\varkappa$ je tečnou i kružnice k'.

Jiné řešení. Označme body T, A', B', C' jako v předchozím řešení. Zároveň využijeme i tam zavedené značení orientovaných úhlů. Nechť A'' je takový bod na kružnici k, že A je středem oblouku TA'' (tj. $|TA| = |AA''|$, bod A'' je různý od T, pokud TA není průměrem). Podobně definujme i body B'', C'' (obr. 43).



Obr. 43

Protože body B, resp. C jsou středy oblouků TB'', resp. TC'', platí:

$$\begin{aligned}\langle t, B''C''\rangle &= \langle t, TC''\rangle + \langle TC'', B''C''\rangle = \\ &= 2\langle t, TC\rangle + 2\langle TC'', BC''\rangle = \\ &= 2(\langle t, TC\rangle + \langle TC, BC\rangle) = 2\langle t, BC\rangle = \langle t, t_a\rangle.\end{aligned}$$

Přímky t_a a $B''C''$ jsou tudíž rovnoběžné. Podobně jsou rovnoběžné i t_b a $A''C''$ a také t_c a $A''B''$.

Trojúhelníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ tak budou stejnolehlé, ukážeme-li, že přímky $B'B''$ a $C'C''$ nejsou rovnoběžné. Zjistíme dokonce, že jejich průsečík — střed zmíněné stejnolehlosti — leží na kružnici k, jež je opsána nejen trojúhelníku ABC, ale i trojúhelníku $A''B''C''$. Tímto středem proto bude procházet i stejnolehlá kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$, takže obě kružnice se v něm budou dotýkat, jak jsme měli dokázat.

Existenci a polohu průsečíku přímek $B'B''$ a $C'C''$ vyvodíme ze dvou pomocných tvrzení.

⊳⊳ 1. *Průsečík X přímek $B''C$, BC'' leží na přímce t_a.*

Bod B je středem oblouku TB'', tedy $|\sphericalangle BCT| = |\sphericalangle BCB''|$ a přímka $B''C$ je obrazem přímky TC v osové souměrnosti podle BC. Podobně je přímka BC'' obrazem přímky BT. Bod X je tudíž obrazem bodu T v této souměrnosti, takže leží na t_a.

⊳⊳ 2. *Průsečík I přímek BB', CC' leží na kružnici k.*

Uvažme pouze případy, kdy t je různoběžná se všemi stranami trojúhelníku ABC. Zbylé možnosti lze vyřešit limitním přechodem. Označme $D = t \cap BC$, $E = t \cap CA$, $F = t \cap AB$ (obr. 43).

Vzhledem k souměrnosti je přímka BD osou jednoho z úhlů určeného přímkami $B'D$ a FD. Obdobně je přímka BF osou jednoho z úhlů určeného přímkami $B'F$ a DF. Bod B je tak středem kružnice trojúhelníku $B'FD$ vepsané nebo středem některé z kružnic mu připsaných. V každém případě je $\langle BD, DF\rangle + \langle DF, FB\rangle + \langle B'B, B'D\rangle = 90°$, takže platí

$$\begin{aligned}\langle B'B, B'C'\rangle = \langle B'B, B'D\rangle &= 90° - \langle BC, DF\rangle - \langle DF, BA\rangle = \\ &= 90° - \langle BC, AB\rangle.\end{aligned}$$

Obdobně je $\langle C'C, B'C'\rangle = 90° - \langle BC, AC\rangle$. Platí tedy

$$\begin{aligned}\langle BI, CI\rangle = \langle B'B, B'C'\rangle + \langle B'C', C'C\rangle &= \langle BC, AC\rangle - \langle BC, AB\rangle = \\ &= \langle AB, AC\rangle,\end{aligned}$$

což v řeči orientovaných úhlů znamená, že body A, B, I, C leží na kružnici.

Označme K druhý průsečík přímky $B'B''$ s kružnicí k. Důkaz dokončíme použitím Pascalovy věty pro šestici bodů K, B'', C, I, B, C'' na kružnici k. Podle ní leží body $B' = KB'' \cap IB$, $X = B''C \cap BC''$ a $S = CI \cap C''K$ na jedné přímce. Proto $S = C'$, tudíž body K, C'' a C' leží v přímce. Bod K kružnice k je tak průsečíkem přímek $B'B''$ a $C'C''$, jak jsme pro dokončení celého řešení slíbili ukázat.