43. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Leischner (editor); Jozef Moravčík (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 43. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. 35. mezinárodní matematická olympiáda. 6. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2016. pp. 34–46.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405236

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Pro která reálná čísla a má rovnice

$$x^4 + 6x^3 + ax^2 + 6x + 1 = 0$$

čtyři různé kořeny v oboru reálných čísel? (*J. Šimša*)

B – I – 2

Jestliže pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c > a + b$, potom

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > 2(a + b)^2 c.$$

Dokažte. (*J. Šimša*)

B – I – 3

Nechť P je mnohočlen s celočíselnými koeficienty a nechť $P(13) = 8\,046$. Dokažte, že součet koeficientů mnohočlenu P není prvočíslo.

(*P. Černek*)

B – I – 4

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|AC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$ označme M průsečík osy úhlu ACB a přepony AB. Dokažte, že vzdálenost středů O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům AMC, BMC je $\frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}}\,\mathrm{cm}$. (*P. Leischner*)

B – I – 5

Určete největší možný počet částí, na něž n kružnic rozdělí rovinu (n je přirozené číslo). (*J. Vinárek*)

B – I – 6

Určete největší možný objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož základnou je kosočtverec $ABCD$ se stranou délky a a jehož stěnové výšky z vrcholu V na hrany AB, CD mají délku h. *(P. Leischner)*

B – S – 1

Pro která reálná čísla a mají rovnice

$$x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x = a - 2,$$
$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x = 1 - 2a$$

aspoň jeden společný kořen v oboru reálných čísel? *(J. Šimša)*

B – S – 2

Určete největší počet dílů, na které lze n polopřímkami rozdělit rovinu. *(J. Vinárek)*

B – S – 3

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s danými odvěsnami a, b označme D patu výšky z vrcholu C na přeponu AB. Vypočtěte vzdálenost středů O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD. *(P. Leischner)*

B – II – 1

Určete všechny hodnoty reálných čísel a, b, pro které je řešením soustavy rovnic

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$
$$y^4 + by^3 + ay^2 + by + 1 = 0$$

jediná dvojice reálných čísel x, y, přičemž navíc platí $xy < 0$. *(P. Černek)*

B – II – 2

Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo x, pro které platí

$$19^x + 94^x = x^{1994}.$$

(R. Kollár)

B – II – 3

Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC je dán bod M takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům CAM a BCM mají stejný poloměr. Rozhodněte, co je větší: obsah trojúhelníku ABC, nebo obsah čtverce o straně $|CM|$?

B – II – 4

Každý z bodů krychle o hraně délky a obarvíme právě jednou ze tří barev. Dokažte, že pak mezi těmito body existují dva téže barvy, jejichž vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$. (*P. Leischner*)

Řešení úloh

B – I – 1

Rovnice zřejmě nemá kořen 0. Po vydělení obou stran rovnice číslem x^2 upravíme rovnici na tvar

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + a = 0.$$

Položme $u = x + \dfrac{1}{x}$, pak $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$ a rovnici přepíšeme na tvar

$$u^2 + 6u + a - 2 = 0. \tag{1}$$

Ze substitučního vztahu dostáváme

$$x^2 - ux + 1 = 0. \tag{2}$$

Má-li mít původní rovnice čtyři různé reálné kořeny, pak rovnice (1) musí mít dva různé kořeny (označme je u_1 a u_2), stejně jako každá z obou rovnic (2) pro $u = u_1$, resp. $u = u_2$ musí mít dva různé reálné kořeny, tj. diskriminanty těchto rovnic jsou kladné. To vede na podmínky

$$a < 11 \quad \text{a zároveň} \quad |u_1| > 2 \quad \text{a} \quad |u_2| > 2. \tag{3}$$

Předpokládejme, že u_1, u_2 jsou kořeny rovnice (2), a nechť $u_1 < u_2$. Z Viètových vztahů zjistíme, že $2u_1 < u_1 + u_2 = -6$, takže $u_1 < -3$. Pro kořen u_1 tedy platí vztah (3) automaticky, pro druhý kořen musí platit buď $u_2 < -2$, nebo $u_2 > 2$. Představíme-li si graf a kořeny kvadratické funkce $f(u) = u^2 + 6u + a - 2$, pak to znamená, že $f(-2) > 0$, nebo $f(2) < 0$. Odtud $a > 10$, nebo $a < -14$. Tedy $a \in \mathsf{M} = (-\infty, -14) \cup$ $\cup\, (10, 11)$.

Ukážeme ještě, že pro každé $a \in \mathsf{M}$ má původní rovnice čtyři navzájem různé kořeny. Pro $a \in \mathsf{M}$ má rovnice (1) dva různé kořeny u_1, u_2, jejichž absolutní hodnoty jsou větší než 2. Proto každá z obou rovnic $x + 1/x =$ $= u_i$ má dva různé reálné kořeny x_i a $1/x_i$ ($i = 1, 2$), což jsou kořeny původní rovnice. Mezi čísly $x_1, 1/x_1, x_2, 1/x_2, x_2$ ovšem nemohou být dvě stejná (kdyby $\{x_1, 1/x_1\} \cap \{x_2, 1/x_2\} \neq \emptyset$, pak $\{x_1, 1/x_1\} = \{x_2, 1/x_2\}$ a $u_1 = u_2$).

B – I – 2

Položme $x = c - a - b$. Pak $x > 0$ a $c = a + b + x$. Jednoduchými algebraickými úpravami lze ověřit, že

$$\begin{aligned} F &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 2(a+b)^2c = \\ &= a^3 + b^3 + \bigl((a+b)+x\bigr)^3 + 3ab(a+b+x) - 2(a+b)^2(a+b+x) = \\ &= x(a+b)(a+b+3x) + x(x^2+3ab) > 0, \end{aligned}$$

neboť všechny členy posledního výrazu jsou kladné. Tím je daná nerovnost dokázána.

Jiné řešení spočívá v tom, že výraz F budeme považovat za mnohočlen s proměnnou c. Dosazením $c = a + b$ se po úpravě přesvědčíme, že $F(a+b) = 0$, tj. $a + b$ je kořenem polynomu, a proto je tento polynom dělitelný kořenovým činitelem $c - (a + b)$ a platí: $F(c) = \bigl(c - (a+b)\bigr)(c^2 + ac + bc - a^2 + ab - b^2)$. Výraz v první závorce je pro $c > a + b$ kladný, výraz v druhé závorce je také kladný, protože $c^2 + (a+b)c - a^2 + ab - b^2 > 2(a+b)^2 - a^2 + ab - b^2 = (a+b)^2 + 3ab > 0$.

B – I – 3

Označme s součet koeficientů daného mnohočlenu. Zřejmě je $s = P(1)$. Pro každá dvě různá celá čísla a, b a libovolný mnohočlen Q s celočíselnými koeficienty platí, že číslo $Q(a) - Q(b)$ je dělitelné číslem $a - b$. Proto $12 \mid \bigl(P(13) - P(1)\bigr)$. Existuje tedy celé číslo k takové, že $8\,046 - s = 12k$, odtud $s = 8\,046 - 12k = 6(1\,341 - 2k)$. Součet koeficientů daného mnohočlenu je dělitelný šesti, a tudíž není prvočíslo.

B – I – 4

Z Pythagorovy věty určíme $|AB| = 5\,\text{cm}$. Bod M dělí přeponu AB v poměru obsahů trojúhelníků AMC a BMC, a protože bod M má zároveň stejnou vzdálenost od obou odvěsen, je zřejmě $|AM| : |BM| = |AC| : |BC| = 3 : 4$, odtud $|AM| = \frac{3}{7}|AB| = \frac{15}{7}\,\text{cm}$, $|BM| = \frac{20}{7}\,\text{cm}$.

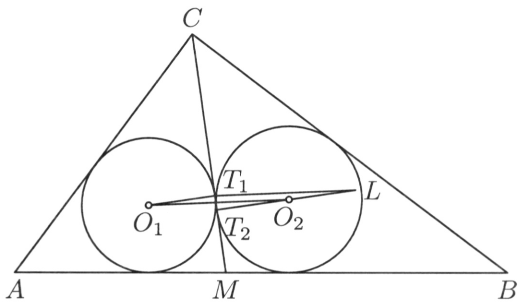
V trojúhelníku ABC označme s polovinu obvodu a r poloměr kružnice vepsané. Pro jeho obsah S pak platí $S = sr = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\alpha$.

Pro trojúhelníky AMC, BMC označme analogicky S_1, S_2 jejich obsahy, r_1, r_2 poloměry vepsaných kružnic a s_1, s_2 poloviny jejich obvodů. Platí pak $S = \frac{1}{2}|AC||BC| = 6\,\text{cm}^2$, $S_1 : S_2 = |AM| : |BM| = 3 : 4$, neboť trojúhelníky AMC, BMC mají stejnou výšku z vrcholu C. Platí tedy $S_1 = \frac{18}{7}\,\mathrm{cm}^2$, $S_2 = \frac{24}{7}\,\mathrm{cm}^2$. Ze vztahu $S_1 = \frac{1}{2}|CM||CA|\sin 45°$ vyplývá, že $|CM| = \frac{12}{7}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

Body, v nichž se kružnice vepsaná trojúhelníku ABC dotýká stran AC, AB, BC, označme postupně B_1, C_1, A_1. Pro shodné úseky tečen z jednotlivých vrcholů ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC pak platí $|AB_1| = |AC_1| = s - a$, $|BA_1| = |BC_1| = s - b$, $|CA_1| = |CB_1| = s - c$. Ze vzorců pro obsah dále dostáváme

$$r_1 = \frac{S_1}{s_1} = \frac{9 - 3\sqrt{2}}{7}\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = \frac{S_2}{s_2} = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{7}\,\mathrm{cm}$$

a $|CT_1| = s_1 - |AM|$, $|CT_2| = s_2 - |BM|$ (obr. 16). Odtud $|T_1T_2| = |CT_2| - |CT_1| = s_2 - s_1 + |AM| - |BM| = \frac{1}{7}\,\mathrm{cm}$.



Obr. 16

Označme dále KL obraz úsečky O_1O_2 v posunutí o vektor $\boldsymbol{O_1T_1}$ ($K = T_1$). Z pravoúhlého trojúhelníku KT_2L pak máme $|O_1O_2| = |KL| = \sqrt{|T_1T_2|^2 + |LT_2|^2} = \sqrt{|T_1T_2|^2 + (r_1 + r_2)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}}\,\mathrm{cm}$.

B – I – 5

Pro $n = 1$ je hledaný počet $P(1) = 2$. Přitom n-tá kružnice protne $n - 1$ kružnic nejvýše v $2(n - 1)$ bodech. Počet dílů roviny se tedy přidáním n-té kružnice zvýší také nejvýš o $2(n - 1)$. Pro počet $P(n)$ dílů roviny dostáváme

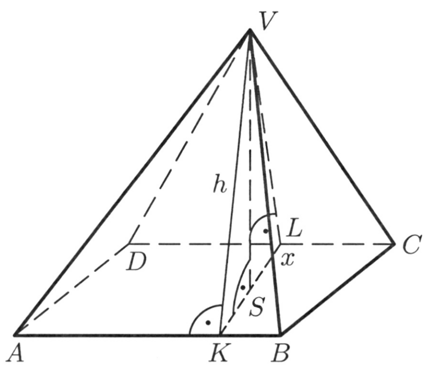
$$P(n) \leqq 2(n-1) + P(n-1) \leqq 2(n-1) + 2(n-2) + P(n-2) \leqq \ldots \leqq$$
$$\leqq 2(n - 1 + n - 2 + \ldots + 1) + P(1) = n(n-1) + 2.$$

Vhodným příkladem se přesvědčme, že pro $P(n)$ platí rovnost $P(n) = n(n-1) + 2$. Nechť k_1 je jednotková kružnice se středem O a nechť

A je pevně zvolený bod této kružnice. Označme k_i obraz kružnice k_1 v posunutí o vektor $\frac{i-1}{n}\boldsymbol{OA}$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak soustava kružnic k_1, k_2, …, k_n dělí rovinu na $n(n-1)+2$ dílů.

B – I – 6

Označme K, L paty kolmic z V na hrany AB, CD. Přímka AB je kolmá na rovinu KLV, protože je kolmá k přímkám KV, LV (obr. 17). Odtud $KL \perp AB$. Výška kosočtverce $ABCD$ je $|KL| = 2x$. Pata výšky jehlanu



Obr. 17

leží v rovině KLC a je zřejmě totožná se středem S úsečky KL. Z pravoúhlého trojúhelníku KSV je tato výška $v = \sqrt{h^2 - x^2}$. Objem jehlanu je tedy

$$V = \frac{2}{3}ax\sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{3}\,a\sqrt{x^2h^2 - x^4}.$$

Objem bude maximální, právě když bude maximální výraz pod odmocninou

$$U = x^2h^2 - x^4 = \frac{1}{4}h^4 - \left(x^2 - \frac{1}{2}h^2\right)^2.$$

Maximum hledáme na intervalu $0 < x < \frac{1}{2}a$, protože výška kosočtverce $2x$ je menší než velikost a jeho strany. Kvadratická funkce U proměnné $t = x^2$ nabývá absolutního maxima pro $x = h/\sqrt{2}$, proto závisí další diskuse na tom, zda bod $h/\sqrt{2}$ padne do intervalu $(0, \frac{1}{2}a)$ či nikoliv. Pro $h\sqrt{2} < a$ je tedy maximální objem jehlanu $V_{\max} = \frac{1}{3}ah^2$.

Pro $a \leqq h\sqrt{2}$ je kvadratická funkce U v intervalu $(0, \frac{1}{2}h^2)$ rostoucí, a proto objem jehlanu v tomto případě nemá maximum, ale neomezeně se blíží hodnotě $V_{\max} = \frac{1}{6}a^2\sqrt{4h^2 - a^2}$ (pro $x = \frac{1}{2}a$ dostaneme čtvercovou podstavu — a *podle běžně užívané definice* čtverec *není* kosočtverec).

B – S – 1

Z dané dvojice rovnic nejdříve vyloučíme parametr a — např. tak, že první rovnici vynásobíme dvěma a k výsledku přičteme rovnici druhou, dostaneme

$$3x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x = -3,$$

což je reciproká rovnice, kterou musí splňovat každý společný kořen výchozích rovnic. Po substituci $y = x + 1/x$ dostaneme rovnici $3y^2 - 7y - 10 = 0$ s kořeny $y_1 = \frac{10}{3}$ a $y_2 = -1$. Hodnotě y_1 odpovídají kořeny $x_1 = 3$ a $x_2 = \frac{1}{3}$, zatímco pro $y = y_2$ reálné kořeny neexistují. Pro $x = 3$ a $x = \frac{1}{3}$ vypadá výchozí dvojice rovnic takto:

$$\begin{cases} -15 = a - 2, \\ 27 = 1 - 2a, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} \dfrac{-71}{81} = a - 2, \\ \dfrac{-101}{81} = 1 - 2a, \end{cases}$$

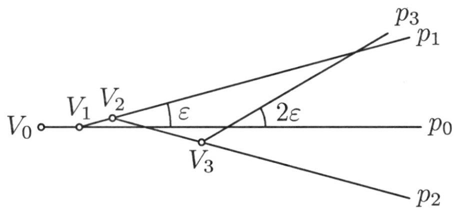
odkud snadno určíme hledané hodnoty $a = -13$ a $a = \frac{91}{81}$.

B – S – 2

Označme $p(n)$ hledaný maximální počet. Zřejmě platí $p(1) = 1$ a $p(2) = 2$. Uvažujme jedno takové rozdělení dané roviny n polopřímkami na $p(n)$ částí. Přidáme-li další polopřímku tak, aby protínala každou z n polopřímek, určí vzniklé průsečíky jednu polopřímku a $n - 1$ úseček, z nichž každá může z jedné z dosavadních částí roviny oddělit další. Dostaneme tak nejvýše $p(n) + n$ nových částí, tj. platí

$$p(n+1) \leqq p(n) + n.$$

Ukážeme nyní pro dané n konstrukci, která splňuje předchozí „maximální“ požadavky. Zvolme úhel ε tak, aby $n\varepsilon < 90°$ a sestrojme v dané rovině libovolnou polopřímku p_0 s počátkem V_0. Na polopřímce p_0 zvolme libovolný bod V_1 a v jedné z polorovin určených přímkou V_0V_1 sestrojme polopřímku p_1 s počátkem V_1, která bude s polopřímkou p_0 svírat úhel ε. Podobně v polorovině opačné k p_1V_0 sestrojíme polopřímku p_2 s počátkem V_2 ležícím na polopřímce p_1 tak, aby svírala s p_0 úhel ε (taková polopřímka protne obě polopřímky p_0, p_1, obr. 18). Dále postupujeme tak, že máme-li sestrojeny polopřímky $p_1, p_2, \ldots, p_{2k}$ $(2 \leqq 2k < n)$, přičemž p_k protíná všechny polopřímky p_i $(0 \leqq i < k)$, zvolíme na polopřímce p_{2k} bod V_{2k+1} tak, aby úsečka $V_{2k}V_{2k+1}$ rovněž protínala všechny polopřímky p_i $(0 \leqq i < k)$, a sestrojme polopřímku p_{2k+1} s počátkem v bodě V_{2k+1}, která bude ležet v polorovině opačné k $V_{2k-1}V_{2k}V_{2k-2}$ a bude protínat všechny dosud sestrojené polopřímky; k tomu stačí, aby velikost úhlu omezeného polopřímkami p_0 a p_{2k+1} byla $k\varepsilon$. Podobně sestrojíme i polopřímku p_{2k+2}.



Obr. 18

Pro hodnotu $p(n)$ tedy platí

$$\begin{aligned} p(n) &= (n-1) + p(n-1) = (n-1) + (n-2) + p(n-2) = \ldots = \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 + p(1) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + 1. \end{aligned}$$

Jiné řešení. Vyřešme nejprve podobnou úlohu pro přímky. Označme $q(n)$ maximální počet částí, na něž rozdělí danou rovinu n přímek. Sestrojíme-li v situaci, kdy je rovina rozdělena n přímkami na $q(n)$ částí, další přímku, jež je s každou z nich různoběžná, rozdělí každou z částí, kterou prochází, na dvě části. Protože n přímek protíná tuto přímka v n bodech, prochází $(n+1)$-ní přímka celkem $n+1$ částí a pro hodnotu $q(n+1)$ platí

$$q(n+1) = q(n) + n + 1.$$

Je tedy

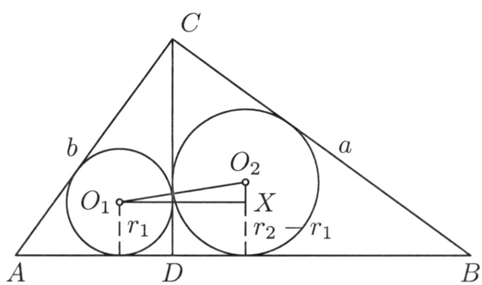
$$\begin{aligned} q(n) &= n + q(n-1) = n + (n-1) + q(n-2) = \ldots = \\ &= n + (n-1) + \ldots + 2 + q(1) = \tfrac{1}{2}n(n+1) + 1. \end{aligned}$$

Představme si nyní, že máme n polopřímek, jež rozdělují rovinu na $p(n)$, tedy maximální počet částí. Nahradíme-li polopřímky přímkami, bude zřejmě rovina rozdělena na $q(n)$ částí. Protože počet průsečíků všech n přímek je konečný, existuje v dané rovině kruh, který obsahuje všechny průsečíky, a tedy i všechny omezené části roviny v uvedeném rozdělení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že počátky všech n daných polopřímek leží vně uvedeného kruhu. Obě uvažovaná rozdělení (s polopřímkami, resp. s přímkami) se nyní liší jen v počtu neomezených částí vně kruhu, z kterého v prvním případě vychází n polopřímek a n úseček, v druhém pak $2n$ polopřímek. Je tedy

$$p(n) = q(n) - n = \tfrac{1}{2}n(n+1) + 1 - n = \tfrac{1}{2}n(n-1) + 1.$$

B – S – 3

Označme r_1, r_2 poloměry obou kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD (obr. 19). Z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník O_1O_2X,



Obr. 19

kde X je pravoúhlý průmět bodu O_1 na kolmici bodem O_2 k přeponě AB, pro hledanou vzdálenost plyne

$$|O_1O_2| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Pro poloměr r kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC z podobnosti obou trojúhelníků ACD, BCD trojúhelníku ABC vyplývá, že je

$$\frac{r_1}{r} = \frac{b}{c}, \quad \frac{r_2}{r} = \frac{a}{c},$$

čili

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) = r^2.$$

Proto

$$|O_1O_2| = r\sqrt{2}.$$

Vyjádříme-li obsah trojúhelníku ABC dvěma různými způsoby, dostaneme

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r,$$

takže

$$r = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = $$
$$= \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

Je tedy $|O_1O_2| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(a+b-c)$.

B – II – 1

Je-li u kořen některé z obou zadaných rovnic, pak $u \neq 0$ a $1/u$ je kořen téže rovnice. Proto $u = 1/u$, takže $u = \pm 1$. Nechť tedy číslo 1, resp. -1 je kořenem první, resp. druhé rovnice (jinak vyměníme navzájem čísla a, b). Ze soustavy rovnic

$$1+a+b+a+1=0 \quad \text{a} \quad 1-b+a-b+1=0$$

plyne $a = -\frac{6}{5}$ a $b = \frac{2}{5}$. Zkoumané rovnice jsou pak

$$(x-1)^2\Big(x^2+\frac{4}{5}x+1\Big)=0 \quad \text{a} \quad (x+1)^2\Big(x^2-\frac{8}{5}x+1\Big)=0,$$

tj. mají jediné reálné kořeny, neboť diskriminanty obou trojčlenů $x^2 + {} + \frac{4}{5}x + 1$ a $x^2 - \frac{8}{5}x + 1$ jsou záporné. Hledané dvojice (a,b) jsou $(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ a $(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$.

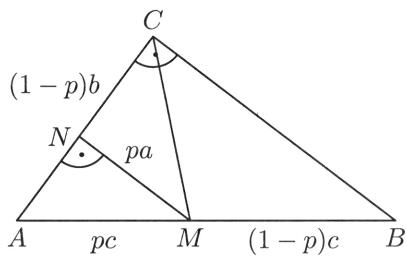
B – II – 2

Žádné takové x neexistuje, neboť jak ukážeme, dekadické zápisy obou stran rovnice mají různé poslední číslice, ať je číslo x zvoleno jakkoli. Skutečně, podle toho, zda je x liché či sudé, končí mocnina 19^x číslicí 9 či 1 a mocnina 94^x končí číslicí 4 či 6. Proto je poslední číslice součtu $19^x + 94^x$ rovna 3 nebo 7. Na druhé straně druhá mocnina $(x^{997})^2$ končí jednou z číslic 0, 1, 4, 5, 6 nebo 9. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. Obě čísla 19 i 94 při dělení třemi dávají zbytek 1. Součet obou jejich mocnin tedy dává při dělení třemi zbytek 2. Na druhé straně druhá mocnina libovolného čísla k dává při dělení třemi buď zbytek 0 (je-li k dělitelné třemi), anebo zbytek 1 (není-li k dělitelno třemi). Proto $(x^{997})^2$ dává při dělení třemi zbytek 0 nebo 1. Uvedenou rovnici tedy nemůže splňovat žádné přirozené číslo x.

B – II – 3

Nechť $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a $|AM| = pc$, kde $0 < p < 1$ (obr. 20).



Obr. 20

Trojúhelníky CAM a BCM mají obsahy v poměru $p : (1-p)$, tj. jsou rovny $\frac{1}{2}pab$, resp. $\frac{1}{2}(1-p)ab$, takže rovnost poloměrů příslušných vepsaných kružnic lze zapsat takto:

$$\frac{pab}{b+pc+x} = \frac{(1-p)ab}{a+(1-p)c+x},$$

kde jsme označili $x = |CM|$. Odtud po úpravě plyne

$$pa - (1-p)b = (1-2p)x. \tag{1}$$

Na druhé straně podle Pythagorovy věty pro trojúhelník CMN platí

$$x^2 = p^2a^2 + (1-p)^2b^2.$$

Proto z (1) plyne umocněním na druhou

$$\bigl(pa - (1-p)b\bigr)^2 = (1-2p)^2\bigl(p^2a^2 + (1-p)^2b^2\bigr),$$

odkud po roznásobení a úpravě dostaneme

$$2p(1-p)\bigl[p^2a^2 + (1-p)^2b^2\bigr] = p(1-p)ab.$$

Protože $p(1-p) \neq 0$ a výraz v hranaté závorce je x^2, dostáváme rovnost $x^2 = \frac{1}{2}ab$, která znamená, že čtverec o straně x má stejný obsah jako trojúhelník ABC.

Poznámka. Hodnotu p není nutno určovat. Je to kořen kvadratické rovnice

$$p^2a^2 + (1-p)^2b^2 = \frac{ab}{2},$$

která má ovšem obecně dva kořeny. Vybrat ten „pravý“ je možné na základě diskuse o znaméncích obou stran rovnosti (1). (Rovnost (1) jsme dále použili umocněnou, tedy po neekvivalentí úpravě.)

B – II – 4

Označme vrcholy dané krychle obvyklým způsobem A, B, C, D, E, F, G, H. Je-li vrchol A obarven jednou ze tří barev a některý z vrcholů C, F, H má tutéž barvu, jsme hotovi, neboť $|AC| = |AF| = |AH| = a\sqrt{2} > 1{,}41a > \frac{7}{5}a$. V opačném případě musí být uvedené tři vrcholy rovnostranného trojúhelníku CFH obarveny nejvýše dvěma různými barvami, takže aspoň dva z bodů C, F, H mají tutéž barvu. Jejich vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.