[dokumenty-02] Vybrané úlohy matematické olympiády. Kategorie A

Úlohy

In: Antonín Vrba (editor); Karel Horák (editor): [dokumenty-02] Vybrané úlohy matematické olympiády. Kategorie A. Sbírka řešených úloh z 21. až 35. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 7–26.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405247

ÚLOHY

1. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= c,\\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0,\\
-x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0,\\
&\dots\\
-x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 0,\\
-x_{n-1} + 2x_n &= d
\end{aligned}$$

s neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ a parametry c, d.

2. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{gathered}
1980x_1 + 1979x_2 + \dots + 2x_{1979} + x_{1980} = 0,\\
x_1 - x_{1980} = x_2 - x_{1979} = \dots = x_{990} - x_{991} = 1981,\\
x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{989} - x_{990} = -1.
\end{gathered}$$

3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n &= 2a,\\
-x_1 + 3x_2 - x_3 - \dots - x_n &= 4a,\\
-x_1 - x_2 + 7x_3 - \dots - x_n &= 8a,\\
&\dots\\
-x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (2^n - 1)x_n &= 2^n a
\end{aligned}$$

s neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ a parametrem a.

4. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{gathered}
x + y + z = 3,\\
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12},\\
x^3 + y^3 + z^3 = 45.
\end{gathered}$$

5. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \ldots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2$$

v oboru kladných reálných čísel.

6. Má-li rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ všechny kořeny reálné, potom $a^2 \geqq 3b$. Dokažte.

7. Nechť p, q jsou reálná čísla, $q < 0$. Dokažte, že menší z kořenů rovnice

$$qx^2 + px + 1 = 0$$

splňuje nerovnici

$$x^2 + px + q < 0,$$

právě když $p > q + 1$.

8. Najděte všechny hodnoty reálného parametru a, pro které má nerovnice

$$x^4 + x^3 - 2(a+1)x^2 - ax + a^2 < 0$$

alespoň jedno řešení v oboru reálných čísel.

9. Je dáno reálné číslo p. Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$\sqrt{2p + 1 - x^2} + \sqrt{3x + p + 4} = \sqrt{x^2 + 9x + 3p + 9}.$$

10. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{27}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

11. Jsou dána reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Označme M maximum jejich absolutních hodnot. Dokažte, že platí

$$|x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| \leqq 4M^2.$$

12. Najděte všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{y^3}.$$

13. Jsou dána přirozená čísla $n > k$. Dokažte, že existují přirozená čísla c_1, c_2, ..., c_n taková, že pro všechna $p \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ platí

$$k(c_1 + \ldots + c_k) + (n - k)(c_{k+1} + \ldots + c_n) \leqq$$
$$\leqq p(c_1 + \ldots + c_p) + (n - p)(c_{p+1} + \ldots + c_n).$$

14. Dokažte, že pro kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geqq \frac{4n^2}{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2}.$$

Kdy nastane rovnost?

15. Dokažte, že pro reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, x platí

$$x^2 + x \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geqq 0.$$

Kdy nastane rovnost?

16. Najděte všechny n-tice reálných čísel $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, pro které platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}.$$

17. Je dáno přirozené číslo k a kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pro která platí $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Dokažte nerovnost

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \ldots + a_n^{-k} \geqq n^{k+1}.$$

Kdy nastane rovnost?

18. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$|\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n - \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |\sin a_k - \cos a_k|.$$

Kdy nastane rovnost?

19. Najděte všechna reálná čísla x, pro něž funkce

$$f(x) = \frac{12x - 6x^2}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9}$$

nabývá minima.

20. Najděte všechny hodnoty parametru p, pro něž funkce

$$f(x) = x^2 + 4px - |x^2 - 2px + p^2 - 1|$$

nemá lokální extrém.

21. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Najděte minimum funkce

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|.$$

22. Je dáno přirozené číslo n. Najděte největší hodnotu součtu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

nezáporných celých čísel vyhovujících podmínce

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqq 7n.$$

23. Je dáno přirozené číslo n a reálné číslo k, $0 \leqq k \leqq n$. Uvažujme všechny n-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = k.$$

Najděte největší hodnotu výrazu

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i \right|.$$

24. Dokažte, že existují reálná čísla A, B taková, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \operatorname{tg} (k-1) = A \operatorname{tg} n + B\, n.$$

25. Dokažte, že v trojúhelníku o stranách a, b, c a příslušných úhlech α, β, γ platí

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma > 0.$$

26. Trojúhelník o stranách a, b, c má obsah P a trojúhelník o stranách u, v, w má obsah Q. Dokažte, že pak

$$a^2(-u^2 + v^2 + w^2) + b^2(u^2 - v^2 + w^2) + c^2(u^2 + v^2 - w^2) \geqq$$
$$\geqq 16\, PQ.$$

27. Označme a, b, c strany trojúhelníku ABC, α, β, γ jeho vnitřní úhly, r poloměr opsané kružnice,

$V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$, $W = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha$.

Trojúhelník ABC je ostroúhlý, právě když $V > 0$, a tupoúhlý, právě když $V < 0$. Trojúhelník ABC je ostroúhlý, právě když $W > 0$, a tupoúhlý, právě když $W < 0$. Dokažte.

28. Je dána posloupnost $(a_n)_{n \geq 1}$, pro jejíž členy platí

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n,$$
$$|a_n| \leqq 2^n.$$

Dokažte, že pro všechna přirozená n je

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n.$$

V úlohách 29, 33–36 symbol $[x]$ znamená celou část reálného čísla x, tj. největší celé číslo nejvýše rovné x.

29. Je dána reálná posloupnost $(a_n)_{n \geq 0}$, pro jejíž členy platí

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n.$$

Definujme posloupnost $(b_n)_{n \geq 1}$ vztahem

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right],$$

přičemž klademe $b_n = 1$ pro $a_{n-1} = 0$. Dokažte, že od jistého členu počínaje platí pro členy posloupnosti (b_n) stejný vztah

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 3b_n.$$

30. Obsahuje-li posloupnost přirozených čísel (a_n) všechna přirozená čísla, existují indexy $i < j < k$ takové, že

$$a_k - a_j = a_j - a_i.$$

Dokažte.

31. Jsou dány dvě nerostoucí posloupnosti reálných čísel $(a_n)_{n \geqq 1}$, $(b_n)_{n \geqq 1}$ a dvě prostá zobrazení P, R množiny přirozených čísel na sebe. Utvořme součty $a_{P(1)} + b_{R(1)}$, $a_{P(2)} + b_{R(2)}$, ..., a uspořádejme je podle velikosti do nerostoucí posloupnosti $(c_k)_{k \geqq 1}$. Potom pro každá dvě přirozená čísla m, n platí

$$c_{m+n-1} \leqq a_m + b_n.$$

Dokažte.

32. Najděte všechny nekonečné aritmetické posloupnosti celých čísel $(a_n)_{n \geqq 0}$ takové, že posloupnost $((-1)^n a_n)_{n \geqq 0}$ obsahuje právě 1972 dvojic stejných členů.

33. Najděte všechna reálná čísla x, pro něž platí

$$3[x]^2 + 6x - 4 = 0.$$

34. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, pro které

$$[x]^2 + [y] = 0, \; 3x + y = 2.$$

35. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{k} \right]^{\left[\frac{k}{x} \right]}$$

v intervalu $(0, +\infty)$.

36. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je součet

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}]$$

dělitelný sedmi.

37. Dokažte, že pro každé liché n je číslo

$$N = n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$$

dělitelné 256.

38. Jsou-li k, m, n přirozená čísla, je součet

$$1^m + 2^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m$$

dělitelný číslem n^{k-1}. Dokažte.

39. Najděte všechna přirozená čísla $n < 10^7$, pro která platí: Je-li přirozené číslo m, $1 < m < n$, nesoudělné s číslem n, pak je m prvočíslo.

40. Je-li $p > 2$ prvočíslo a a, b přirozená čísla, pro něž platí

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1},$$

potom p dělí a. Dokažte.

41. Jsou dána přirozená čísla $m \geqq n \geqq 3$ a mnohočlen p stupně m s celočíselnými koeficienty takový, že $p(a_1) = p(a_2) = \ldots = p(a_n) = 1$ pro n různých celých čísel a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že p nemá žádný celočíselný kořen.

42. Předpokládejme, že funkce f zobrazuje množinu N všech přirozených čísel do sebe, $f(1) = 1$ a pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí

$$f(n + 2) = 2f(n + 1) - f(n) + 2.$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathsf{N}$ existuje $m \in \mathsf{N}$ takové, že

$$f(n)f(n + 1) = f(m).$$

43. Najděte počet všech trojic přirozených čísel $x < y < z$, pro něž platí

$$x + y + z \leqq 100.$$

44. Označme M_n množinu všech jednoprvkových a dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pro $n \geqq 3$ lze ke každé $(n - 2)$-prvkové podmnožině P množiny M_n najít množinu $\{i, j\} \in \mathsf{M}_n$, pro kterou je

$$\{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \cap \mathsf{P} = \emptyset.$$

Dokažte.

45. Je dáno přirozené číslo $k > 1$. Najděte nejmenší přirozené číslo n s touto vlastností: Ať zvolíme jakkoli n různých přirozených čísel, vždy bude součet nebo rozdíl některých z nich dělitelný číslem k.

46. Označme N_0 množinu všech nezáporných celých čísel, $\mathsf{A} = \{x;\ x = x_1^2 + x_2^2,\ x_1, x_2 \in \mathsf{N}_0\}$, $\mathsf{A}_t = \{tx;\ x \in \mathsf{A}\}$ pro $t \in \mathsf{N}_0$ a $\mathsf{B} = \{t;\ \mathsf{A}_t \subset \mathsf{A}\}$. Dokažte, že $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

47. Nechť A_1, A_2, A_3 jsou neprázdné množiny celých čísel takové, že pro $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ platí

$$(x \in \mathsf{A}_i, y \in \mathsf{A}_j) \Rightarrow ((x + y) \in \mathsf{A}_k, (x - y) \in \mathsf{A}_k).$$

Dokažte, že aspoň dvě z množin A_1, A_2, A_3 se rovnají. Mohou být některé dvě z těchto množin disjunktní?

48. Nechť A je taková množina celých kladných čísel, že pro každé dva její různé prvky x a y platí nerovnost

$$|x - y| \geqq \frac{xy}{25}.$$

Dokažte, že množina A obsahuje nejvýše 9 prvků. Rozhodněte, zda taková devítiprvková množina A existuje.

49. Je-li $n > 1$ přirozené číslo, existuje pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ takové, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ číslo a_{k+1} dělí součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Dokažte.

50. Najděte všechna celá nezáporná čísla k, pro něž je $\binom{2k-1}{k}$ liché.

51. Na škole je pět zájmových kroužků a chodí do nich celkem 64 žáci. Nejmenší kroužek má 19 členů, žádný žák nechodí do více než tří kroužků a každé tři kroužky mají aspoň jednoho společného účastníka. Dokažte, že dva z těchto kroužků mají aspoň pět společných účastníků.

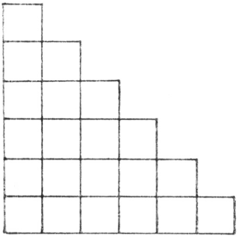
52. V prostoru je dáno pět bodů, z nichž žádné čtyři neleží v rovině, a sedm rovin, pro které platí:

a) Každá z daných rovin obsahuje alespoň jeden daný bod.

b) Každý z daných bodů leží nejvýše ve čtyřech daných rovinách.

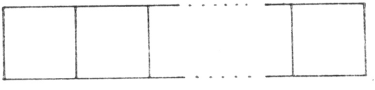
Dokažte, že mezi danými body existují dva, jejichž spojnice není průsečnicí žádných dvou daných rovin.

53. V každém políčku trojúhelníkové tabulky s n řádky a n sloupci (na obr. 1 pro $n = 6$) je napsáno některé z čísel $1, 2, \ldots, n$. Přitom pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se v sjednocení k-tého řádku a k-tého sloupce vyskytují všechna čísla $1, 2, \ldots, n$. Dokažte, že v případě lichého n je každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ napsáno v posledním políčku některého řádku.



Obr. 1

54. Na obr. 2 je »žebřík« skládající se z n shodných čtverců. Některé ze stran čtverců obarvíme. Počet všech takových



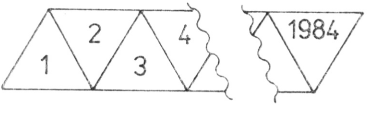
Obr. 2

obarvení žebříku, při nichž má každý ze čtverců alespoň jednu stranu obarvenu, označme P_n.

a) Určete nejmenší n, pro které platí $P_n > 10^6$.

b) Dokažte, že pro každé n je P_n liché.

55. Na obr. 3 je útvar složený z 1984 shodných trojúhelníků. Za přípustná považujme ta obarvení jeho vrcholů, při



Obr. 3

nichž má každý z uvažovaných trojúhelníků obarven aspoň jeden vrchol. Rozhodněte, je-li počet všech přípustných obarvení sudý nebo lichý.

56. Na přímce je dáno $n^2 + 1$ uzavřených úseček. Dokažte, že platí alespoň jedno z následujících dvou tvrzení:

a) Existuje $n + 1$ z daných úseček, které mají společný bod.

b) Existuje $n + 1$ z daných úseček tak, že žádné dvě nemají společný bod.

57. Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Množina M uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

a) Pro každý interval $\langle u, v\rangle \in \mathsf{M}$ platí, že u, v jsou přirozená čísla, $1 \leqq u < v \leqq n$.

b) Pro každé dva intervaly $I \in \mathsf{M}$, $I' \in \mathsf{M}$ je $I \subset I'$ nebo $I' \subset I$ nebo $I \cap I' = \emptyset$.

Určete největší možný počet prvků množiny M.

58. Jsou dána přirozená čísla $n > 1$, k. Konečná posloupnost $I_1, I_2, \ldots, I_m$ uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

a) Pro každý její člen $I_j = \langle u_j, v_j\rangle$ platí, že u_j, v_j jsou přirozená čísla, $1 \leqq u_j < v_j \leqq n$.

b) Každé reálné číslo leží nejvýše v k jejích členech.

Jaké největší hodnoty může nabývat číslo m?

59. Uvnitř koule o objemu 1 je dáno 11 bodů. Dokažte, že existují dvě roviny procházející středem koule a určující kulovou výseč o objemu $\frac{1}{8}$, uvnitř které neleží žádný z daných bodů.

60. V kouli o poloměru 1 je dáno 73 bodů. Dokažte, že z těchto bodů lze vybrat 13, které leží uvnitř nějaké koule s poloměrem $\frac{5}{6}$.

61. Ve čtverci se stranou délky 50 je dána lomená čára L taková, že každý bod čtverce má od některého jejího bodu vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že délka čáry L je větší než 1248.

62. V rovině je dáno $3n$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že jsou to vrcholy n navzájem disjunktních trojúhelníků.

63. V rovině mějme síť rovnostranných trojúhelníků o straně a. Dokažte, že uvnitř každého čtverce, který leží v rovině sítě a má stranu větší než a, leží alespoň jeden uzel sítě.

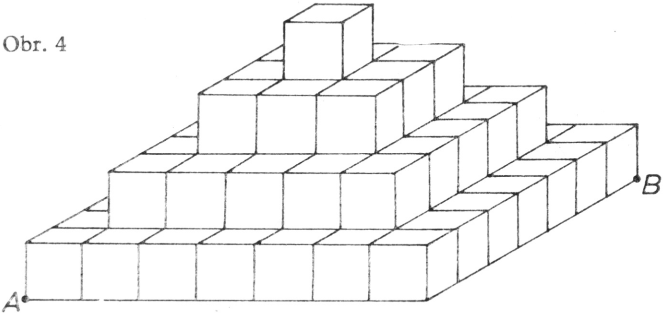
64. Označme A kruh s poloměrem $\sqrt{5}$ a B sjednocení čtyř kruhů, jejichž průměry jsou strany jednotkového čtverce. Dokažte, že při libovolném umístění útvarů A a B v rovinné síti jednotkových čtverců existuje alespoň 10 uzlů sítě, které leží v A a neleží uvnitř B.

65. V rovinné čtvercové síti je dán kruh K, na jehož hranici neleží žádný uzel sítě a který obsahuje aspoň dva uzly. Hranice kruhu K rozděluje rovinu na dvě části. Ty uzly sítě, pro něž aspoň jeden ze čtyř sousedních uzlů leží v opačné části roviny, nazveme hraniční. Dokažte, že počet hraničních uzlů vně K je o čtyři větší než uvnitř K.

66. Na šachovnici 8×8 nakresleme obdélník 2×1 a označme k počet černých polí šachovnice, jejichž vnitřní bod leží v tomto obdélníku. Jaké největší hodnoty může nabývat číslo k?

67. Uvažujme pyramidu z jednotkových krychlí s $n > 1$ vrstvami (na obr. 4 je taková pyramida pro $n = 4$). Najděte

Obr. 4



nejkratší spojnici protějších vrcholů A, B podstavy, která vede po povrchu pyramidy a neprochází vnitřkem podstavy.

68. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která existuje konvexní mnohostěn s n hranami, v němž z jednoho vrcholu vycházejí 4 hrany a ze všech ostatních vrcholů 3 hrany.

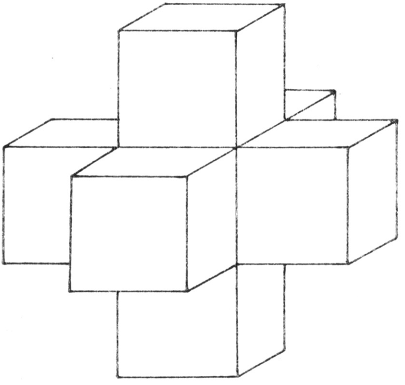
69. V rovině je dána konečná množina bodů. Každý z nich je obarven právě jednou ze tří barev a přitom je každá barva použita. Dokažte, že existuje kruh, který obsahuje od dvou barev právě jeden bod a aspoň jeden bod třetí barvy.

70. Jediná konvexní množina v rovině, která má neprázdný průnik s každým kruhem o poloměru 1, je celá rovina. Dokažte.

71. Množina M vznikla z roviny vyjmutím tří různých bodů A, B, C. Určete nejmenší počet konvexních množin, jejichž sjednocení je M.

72. Dokažte, že kruh nelze třemi tětivami rozdělit na sedm částí stejného obsahu.

73. Na obr. 5 je znázorněn stavebnicový díl složený ze sedmi krychlí. Dokažte, že těmito díly lze vyplnit beze zbytku celý prostor.



Obr. 5

74. Je-li M vnitřní bod pravidelného 1982-úhelníku, pak existují dva jeho vrcholy A, B takové, že

$$\left(1 - \frac{2}{1982}\right)\pi \leqq |\sphericalangle AMB| < \pi.$$

Dokažte.

75. Do kružnice je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$, ve kterém $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokažte, že obsah trojúhelníku ACE není větší než obsah trojúhelníku BDF. Kdy nastane rovnost?

76. Dokažte, že pro čtyři po sobě jdoucí vrcholy A_0, A_1, A_2, A_3 pravidelného sedmiúhelníku platí

$$\frac{1}{|A_0A_1|} = \frac{1}{|A_0A_2|} + \frac{1}{|A_0A_3|}\,.$$

77. Mezi dvojicemi bodů X, Y na hranici trojúhelníku ABC, které tuto hranici dělí na dvě části stejné délky, najděte všechny, pro něž je vzdálenost $|XY|$ největší.

78. Je dán kvádr Q o rozměrech $a < b < c$. Najděte velikost hrany krychle K, která má s daným kvádrem rovnoběžné stěny a společný střed, tak, aby objem rozdílu množin $\mathrm{Q} \cup \mathrm{K}$ a $\mathrm{Q} \cap \mathrm{K}$ byl nejmenší.

79. Je dán ostroúhlý trojúhelník T s obsahem 1. Dokažte, že existuje pravoúhlý trojúhelník, který obsahuje T a přitom nemá obsah větší než $\sqrt{3}$, a pravoúhlý trojúhelník, který je obsažen v T a přitom nemá obsah menší než $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

80. Pro každý bod X trojúhelníku ABC označme $m(X)$ nejmenší a $M(X)$ největší ze vzdáleností $|AX|$, $|BX|$, $|CX|$. Najděte všechny body X trojúhelníku ABC, pro které je

a) $m(X)$ největší,

b) $M(X)$ nejmenší.

81. Jestliže pro čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice s poloměrem 1 platí $|AB| \,.\, |BC| \,.\, |CD| \,.\, |DA| \geqq 4$, potom $ABCD$ je čtverec. Dokažte.

82. V rovině jsou dány dva různé body A, B a přímka

$p \parallel AB$. Na přímce p sestrojte bod C tak, aby v trojúhelníku ABC měly výška v_b a těžnice t_a stejnou velikost.

83. V rovině je dán kruh K. Najděte množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž vrcholy B, D leží v kruhu K a přitom $|AC| \leqq |BD|$.

84. Je dána kružnice $k = (S, r)$, na ní dva body A, B a číslo v, $0 < |AB| < v \leqq 2r$. Najděte množinu všech bodů X ležících vně kružnice k, pro něž druhé průsečíky A', B' přímek XA, XB s kružnicí k mají vzdálenost $|A'B'| = v$.

85. Najděte množinu těžišť všech rovnostranných trojúhelníků, jejichž vrcholy leží na stranách daného čtverce.

86. Je dána půlkružnice k s krajními body A, B a na ní bod C, $A \neq C \neq B$. Najděte množinu M středů všech úseček XY, kde bod X leží na oblouku AC a bod Y na oblouku CB půlkružnice k. Vypočtěte obsah množiny M.

87. V rovině ϱ je dán jednotkový čtverec C. Označme C_X čtverec, který vznikne otočením čtverce C kolem bodu $X \in \varrho$ o $90°$ v kladném smyslu. Najděte množinu všech bodů X roviny ϱ, pro něž má sjednocení $\mathsf{C} \cup \mathsf{C}_X$ obsah nejvýše 1,5.

88. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Na jejím povrchu najděte množinu všech obrazů bodu C v otočeních kolem osy, která zobrazují bod A na bod B.

89. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož stěna ABC je ostroúhlý trojúhelník a jehož výška z vrcholu D má patu uvnitř stěny ABC. Najděte množinu průsečíků tělesových úhlopříček všech kvádrů, které leží v čtyřstěnu $ABCD$, přičemž jedna jejich stěna leží v rovině ABC, jedna hrana v rovině ABD a zbývající dva vrcholy v rovinách BCD, CAD.

90. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Označme O střed stěny $BCGF$ a τ kouli se středem O a průměrem a. Určete bod S na hraně AE a rovinu σ procházející bodem E tak, aby koule, která odpovídá v souměrnosti podle roviny σ kouli $(S, |SA|)$, byla obsažena v τ a přitom byla co největší.

91. Najděte všechny čtyřstěny, jejichž stěny jsou navzájem podobné pravoúhlé trojúhelníky a jejichž nejdelší hrana má délku 1.

92. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod K. Označme G_1, G_2, G_3, G_4 těžiště čtyřstěnů $KBCD$, $KACD$, $KABD$, $KABC$. Dokažte, že objem čtyřstěnu $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí na volbě bodu K.

93. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a bod M uvnitř jeho stěny ABC. Bodem M veďme příčky $MC_1 \parallel CD$, $MB_1 \parallel BD$, $MA_1 \parallel AD$.

a) Dokažte, že platí

$$\frac{|MA_1|}{|AD|} + \frac{|MB_1|}{|BD|} + \frac{|MC_1|}{|CD|} = 1.$$

b) Vyjádřete poměr objemů čtyřstěnů $A_1B_1C_1M$ a $ABCD$ pomocí velikostí úseček AD, BD, CD, MA_1, MB_1, MC_1.

c) Zjistěte, pro který bod M bude objem čtyřstěnu $A_1B_1C_1M$ největší.

94. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod O. Bodem O veďme rovnoběžně s hranami čtyřstěnu šest příček, jejichž oba krajní body leží ve stěnách čtyřstěnu. Pak platí, že součet poměrů délek těchto příček a délek s nimi rovnoběžných hran je 3. Dokažte.

95. V rovině je dána kružnice $m = (S, r)$ a přímka p ve vzdálenosti d od středu S. Patu kolmice vedené bodem S na přímku p označme C. Z bodu $M \in p$ veďme tečny ke kružnici m a jejich dotykové body označme H, K tak, aby $|pH| \leq |pK|$. Dokažte, že podíl

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} |\sphericalangle CMH|}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} |\sphericalangle CMK|}$$

nezávisí na volbě bodu M, a vyjádřete ho pomocí r a d.

96. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož prodloužené strany AB, CD se protínají v bodě E a BC, AD v bodě F. Dokažte, že

a) kružnice opsané trojúhelníkům ABF, CDF, ADE, BCE procházejí společným bodem G;

b) středy těchto kružnic a bod G leží na kružnici;

c) paty kolmic z bodu G na prodloužené strany čtyřúhelníku $ABCD$ leží na přímce.