[dokumenty-01] Vybrané úlohy matematické olympiády A + MMO

Úlohy

In: Miroslav Fiedler (editor); Jaroslav Zemánek (editor): [dokumenty-01] Vybrané úlohy matematické olympiády A + MMO. [Sbírka řešených úloh z 1. až 20. ročníku soutěže]. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976. pp. 9–28.

Úlohy

1. Dokažte, že zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3},$$

v němž n je přirozené číslo, nelze zkrátit.

2. Číslo $17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem $17 + 19$. Dokažte.

3.* Dokažte, že ke každému celému číslu c existuje nekonečná množina M_c složená z přirozených čísel a taková, že pro každé $m \in M_c$ platí

$$c = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$$

při vhodné volbě znamének.

4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž je číslo $2^n - 1$ druhou nebo vyšší mocninou (s celým exponentem) přirozeného čísla.

5. a) Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž je číslo $2^n - 1$ dělitelné sedmi.

b) Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n není číslo $2^n + 1$ dělitelné sedmi.

6. Najděte všechna přirozená čísla n, která mají tuto vlastnost: Množinu

$$\{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$$

lze rozložit ve dvě podmnožiny bez společného prvku tak, že součin všech prvků jedné z těchto podmnožin je roven součinu všech prvků druhé podmnožiny.

7. Pro které dvojice celých čísel x, y platí, že obě čísla $\dfrac{1 + x}{y}$, $\dfrac{1 + y}{x}$ jsou celá? Výsledek znázorněte náčrtkem v rovině pravoúhlých souřadnic x, y.

8. Vyjasněte, zda čtverec některého přirozeného čísla začíná čtyřčíslím 1976.

9. Je dán trojčlen: $2x^2 - x - 36.$

Najděte všechna celá čísla x, pro něž je hodnota daného trojčlenu rovna druhé mocnině prvočísla.

10. Nechť n je přirozené číslo a $f(x)$ mnohočlen jedné proměnné x s celočíselnými koeficienty. Písmenem M označme množinu všech celých čísel x takových, že n dělí $f(x)$. Vyšetřte, zda se počet prvků množiny M může rovnat vašemu oblíbenému číslu.

11. Buď n přirozené číslo. Dokažte, že z čísel $0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1$ lze vybrat 2^n různých čísel, z nichž žádné není aritmetickým průměrem jiných dvou vybraných čísel.

12. Přirozená čísla p, q jsou nesoudělná právě tehdy, jsou-li nesoudělná čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$. Dokažte.

13. Jsou-li m, n dvě různá přirozená čísla, pak čísla $2^{2^m} + 1$, $2^{2^n} + 1$ jsou nesoudělná. Dokažte a odvoďte z toho, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

14. Zjistěte všechna přirozená čísla, která nelze vyjádřit jako součet aspoň dvou, ale méně než 1976 po sobě následujících přirozených čísel.

15.* Dokažte, že posloupnost

$$\{2^n - 3\} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

obsahuje nekonečně mnoho čísel, z nichž každá dvě jsou nesoudělná.

16. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí nerovnost

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

17. Zjištěte, pro která reálná čísla x je definována funkce

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} -}$$

$$\overline{- \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}}},$$

a sestrojte její graf.

18. Předpisem

$$y = \frac{px}{x^2 + p^2 + 1}$$

je dána funkce reálné proměnné x s reálným parametrem p. Dokažte, že všechny hodnoty, kterých tato funkce nabývá, leží v intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Vypočtěte parametr p tak, aby funkce měla největší hodnotu $\frac{1}{4}$; v tomto případě vyšetřte její průběh a načrtněte její graf.

19. Je možno rozložit množinu všech přirozených čísel na dvě části tak, aby žádná neobsahovala nekonečnou aritmetickou posloupnost?

20. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálný parametr.

21. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n existuje přirozené číslo m takové, že platí

$$(\sqrt{2} + 1)^n = \sqrt{m + 1} + \sqrt{m}$$

a zároveň

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m + 1} - \sqrt{m}.$$

22. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$xy = z^2,$$

kde a, b jsou daná reálná čísla.

Udejte nutné a postačující podmínky pro daná čísla a, b, aby existovalo řešení soustavy skládající se z kladných a navzájem různých čísel.

23. Najděte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

24. Je dána soustava rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

s neznámými x_1, x_2, x_3. Její koeficienty splňují tyto podmínky:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou kladná čísla;
b) všechny ostatní koeficienty jsou záporná čísla;
c) v každé z daných rovnic je součet všech tří koeficientů kladné číslo.

Dokažte, že daná soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

25. Řešte soustavu

$$\begin{aligned}
&& |a_1 - a_2|\,x_2 &+ |a_1 - a_3|\,x_3 + |a_1 - a_4|\,x_4 = 1,\\
|a_1 - a_2|\,x_1 && &+ |a_2 - a_3|\,x_3 + |a_2 - a_4|\,x_4 = 1,\\
|a_1 - a_3|\,x_1 &+ |a_2 - a_3|\,x_2 && + |a_3 - a_4|\,x_4 = 1,\\
|a_1 - a_4|\,x_1 &+ |a_2 - a_4|\,x_2 &&+ |a_3 - a_4|\,x_3 = 1,
\end{aligned}$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři daná navzájem různá reálná čísla.

26.* Řešte soustavu rovnic

$$x_5 + x_2 = yx_1, \qquad x_3 + x_5 = yx_4,$$
$$x_1 + x_3 = yx_2, \qquad x_4 + x_1 = yx_5,$$
$$x_2 + x_4 = yx_3,$$

kde y je parametr.

27. Je dáno n kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součin je 1. Dokažte, že platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq n,$$

přičemž rovnost zde nastává právě tehdy, je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

28. Jestliže $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$, pak platí

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqq$$
$$\leqq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n),$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li buď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nebo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. Dokažte.

29. Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3 platí

$$(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq$$
$$\leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \frac{(d_1 + d_3)^2}{4d_1d_3}.$$

Dokažte.

30. Jsou-li x, y kladná čísla a $m > 1$ přirozené, pak platí

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^m \leqq \frac{x^m + y^m}{2}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastává rovnost.

31. Dokažte, že tvrzení
„Pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí nerovnost

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots$$
$$\dots(a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \geqq 0\text{“}$$

je pravdivé pro $n = 3$ a $n = 5$ a není pravdivé pro žádné jiné přirozené číslo $n > 2$.

32. Jsou-li koeficienty a, b, c, d mnohočlenu $ax^3 + bx^2 + cx + d$ celá čísla taková, že ad je liché a bc sudé, pak aspoň jeden kořen tohoto mnohočlenu není racionální. Proč?

33. Nechť mnohočlen $p(x)$ s celočíselnými koeficienty nabývá hodnoty 5 pro pět různých celočíselných hodnot x. Dokažte, že $p(x)$ nenabývá hodnoty 8 pro žádné celé x.

34. Po moři (považovaném za rovinu) pluly dvě lodi stálými rychlostmi při stálých kursech. V 9.00 hod. činila jejich vzdálenost 20 mil, v 9.35 hod. 15 mil a v 9.55 hod. 13 mil. Kdy si byly lodě nejblíže a jaká byla při tom jejich vzdálenost?

35.* Komplexní číslo z není reálné nezáporné, právě když lze najít přirozené číslo n a kladná čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ tak, že platí

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

Dokažte.

36. Dokažte, že všechny nerovnosti

$$\sin \alpha \leqq \sin 2\alpha \leqq \sin 3\alpha \leqq \dots$$

platí jen pro čísla tvaru $\alpha = k\pi$, kde k je celé číslo.

37. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

38. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

v níž n je dané přirozené číslo.

39. Najděte všechna čísla x z intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$, která vyhovují nerovnicím

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2}.$$

40. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic. Najděte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y splňují všechny nerovnice

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi,$$
$$1 + |\cos x| \leqq 2 \sin^2 y.$$

41. Buďte dány reálné konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (kde n je dané přirozené číslo) a funkce

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

reálné proměnné x.

Dokažte tato tvrzení:

1° Existuje číslo x_0 takové, že $f(x_0) = 0$.
2° Jestliže také $f(x_1) = 0$, pak $x_1 = x_0 + m\pi$ pro vhodné celé m.

42. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2},$$

kde α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů.

43. Jsou-li α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, potom platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq \frac{3}{4}.$$

Dokažte. Najděte všechny trojúhelníky, pro něž v předchozím vztahu platí rovnost.

44. Buď x reálné číslo. Které z čísel $\cos \sin x$ a $\sin \cos x$ je větší?

45.* Dokažte, že platí

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

46. V rovině je dáno $n \geqq 3$ bodů, které neleží v jedné přímce.

Potom lze najít kružnici, která obsahuje alespoň tři z daných bodů, přičemž žádný z daných bodů neleží uvnitř této kružnice. Dokažte.

47.* V rovině je dána množina n bodů ($n \geqq 3$), každé dva z nich jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. *Průměrem* dané množiny nazveme každou z těchto úseček, která má délku d.

Dokažte, že počet průměrů dané množiny je roven nejvýše číslu n.

48. Konvexní n-úhelník, jehož po sobě následující strany mají délky $a_1, a_2, \ldots, a_n$, má tyto vlastnosti:

a) všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné;

b) pro délky jeho stran platí nerovnosti

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n.$$

Pak je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokažte.

49.* V rovině je dána konvexní množina K. Její bod E nazveme *ekvichordálním bodem*, jestliže všechny přímky této roviny, které procházejí bodem E, protínají množinu K v úsečce stejné délky.

Dokažte, že množina K nemá více než dva ekvichordální body.

50. V rovině je dána kružnice k o středu S a poloměru 1. Buď ABC libovolný trojúhelník, jemuž je kružnice k vepsána, s označením voleným tak, že

$$SA \leqq SB \leqq SC.$$

Najděte geometrické místo vrcholů A (B, C) všech takových trojúhelníků.

51. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB je menší než jeho rameno. Sestrojte uvnitř úseček CA, CB po řadě body X, Y a v polorovině XYC bod Z tak, aby platilo

$$\triangle XYZ \cong \triangle ABC.$$

Najděte geometrické místo bodů Z.

52. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (v němž $\sphericalangle ACB = 90°$), jsou-li dány délky těžnic t_1, t_2 příslušných k vrcholům A, B. Proveďte diskusi řešitelnosti.

53. V rovině jsou dány dva různé body A, M o vzdálenosti d. Dále je dáno kladné číslo v. V této rovině sestrojte kosočtverec $ABCD$ o výšce v tak, aby bod M byl středem jeho strany BC.

Najděte podmínku řešitelnosti a zjistěte počet řešení úlohy. Může být řešením čtverec?

54. Pouhým kružítkem sestrojte střed úsečky, jejíž krajní body jsou dány.

55. Je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, C. Sestrojte na kružnici k další bod D tak, aby vznikl čtyřúhelník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici.

56. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník APQ s přeponou AP. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby přímky BC, CD procházely po řadě body P, Q. Vyjádřete délku strany čtverce $ABCD$ pomocí délky a odvěsny daného trojúhelníku.

57. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona BC je rozdělena na lichý počet n shodných úseček. Označme α úhel, pod kterým je z bodu A vidět tu ze shodných úseček, která obsahuje střed přepony daného trojúhelníku; dále označme h výšku a a délku přepony daného trojúhelníku.

Dokažte, že potom platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)\, a}.$$

58. Do trojúhelníku ABC se stranami o délkách a, b, c vepíšeme kružnici a sestrojíme k ní tři nové tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku. Do každého z těchto tří nových trojúhelníků vepíšeme kružnici. Vypočtěte součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů.

59. V rovině je dán konvexní pětiúhelník P_1 s vrcholy A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Označme P_i $(i = 2, 3, 4, 5)$ pětiúhelník, který se dostane z P_1 rovnoběžným posunutím, při němž bod A_1 přejde do bodu A_i $(i = 2, 3, 4, 5)$.

Dokažte, že alespoň dva z pětiúhelníků P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 mají společný vnitřní bod.

60. V rovině leží pět bodů O, A, B, C, D. Pro jejich vzdálenosti platí $OA \leqq OB \leqq OC \leqq OD$.

Dokažte, že pro obsah P konvexního čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou body A, B, C, D, vždy platí

$$P \leqq \frac{1}{2}(OA + OD)(OB + OC).$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

61. Uvnitř stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC zvolíme po řadě libovolné body K, L, M. Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK, KBL, LCM je menší nebo rovný čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

62. Je dán dutý úhel $\sphericalangle XAY$ a uvnitř něho bod M. Na polopřímkách AX, AY sestrojte po řadě body B, C takové, aby přímka BC procházela bodem M a aby obsah trojúhelníka ABC byl co nejmenší.

63.* Jsou dána kladná čísla a, b, c, d. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ tak, aby jeho obsah byl co největší. Zjistěte podmínku řešitelnosti.

64.* Pro každé čtyři body A, B, C, D v rovině platí

$$AB \,.\, CD + AD \,.\, BC \geqq AC \,.\, BD.$$

Rovnost zde nastává, právě když body A, B, C, D leží (v tomto cyklickém pořadí) na kružnici nebo v přímce (v uspořádání A, B, C, D nebo B, C, D, A nebo C, D, A, B nebo D, A, B, C). Dokažte.

65. Je dán tečnový čtyřúhelník. Dokažte, že úsečky spojující dotykové body protějších stran s vepsanou kružnicí procházejí průsečíkem úhlopříček.

66. Na kulové ploše o středu S a poloměru $r = 1$ buďte dány čtyři body A, B, C, D, které jsou vrcholy čtyřstěnu $ABCD$. Jestliže bod S leží uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, potom alespoň jedna ze tří hran AB, AC, AD má délku větší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

67. V každém čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z úseček rovných hranám, které z něho vycházejí, lze sestrojit trojúhelník. Dokažte.

68. Je-li odchylka každých dvou stěn čtyřstěnu ostrý úhel, pak všechny stěny tohoto čtyřstěnu jsou ostroúhlé trojúhelníky. Dokažte.

69.* Nechť $A_1A_2A_3A_4$ je čtyřstěn, φ_{ik} $(i \neq k,\ i,\ k = 1, 2, 3, 4)$ vnitřní úhly stěn, protější k hranám A_iA_k. Potom platí:

a) alespoň jeden z úhlů $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$ je ostrý;
b) alespoň jeden z úhlů $\varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{23}, \varphi_{24}$ je ostrý;
c) alespoň tři ze šesti úhlů φ_{ik} jsou ostré.

Dokažte a najděte příklad čtyřstěnu, který má právě tři ostré vnitřní úhly.

70.* V prostoru je dáno $n \geqq 3$ různých bodů tak, že žádné tři z nich netvoří trojúhelník s maximálním úhlem menším než 120°. Potom lze tyto body označit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že pro všechna přirozená i, j, k, $1 \leqq i < j < k \leqq n$ platí $\sphericalangle\ A_iA_jA_k \geqq 120°$. Dokažte.*)

71.* V prostoru je dána konečná množina bodů taková, že každá přímka procházející dvěma jejími body obsahuje ještě alespoň jeden další bod této množiny.

Dokažte, že všechny body dané množiny leží v jedné přímce.

72. V prostoru je dána bodová množina M, jejíž pravoúhlé průměty na všechny roviny jsou kruhy.

Dokažte, že M obsahuje kulovou plochu.

73. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, BC, CD, DA se dotýkají jisté kulové plochy. Dokažte, že dotykové body leží v jedné rovině.

74. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby bylo možno sestrojit kulovou plochu, která by se dotýkala všech hran čtyřstěnu, je, aby součty všech tří dvojic protějších hran si byly rovny. Dokažte.

75. Buď $SABC$ čtyřstěn. Existuje-li pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek SA, SB, SC, AB, BC, CA, pak je tento čtyřstěn pravidelný. Obráceně ke každému

*) V této úloze výjimečně užíváme značky $\sphericalangle$ nejen pro tzv. duté úhly, ale i pro úhly nulové a přímé.

pravidelnému čtyřstěnu lze sestrojit pět takových kulových ploch.

Dokažte obě tyto věty.

76.* V prostoru je dán bod P a množina bodů M taková, že její průnik s každou rovinou procházející bodem P je kruh. Dokažte, že M je koule.

77. Čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen ve dvě tělesa rovinou ε rovnoběžnou s přímkami AB, CD; poměr vzdáleností roviny ε od přímky AB a od přímky CD je roven k. Vypočtěte poměr objemů obou vzniklých těles.

78. Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů lze rozřezat krychli?

79. Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou právě všechny vrcholy konvexního mnohostěnu,

$$d = \max A_i A_j \qquad \text{pro } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokažte, že vzdálenost každých dvou bodů tohoto tělesa je menší nebo rovna d.

80. Výšky čtyřstěnu $ABCD$ (tj. přímky vedené vrcholy kolmo k rovinám protilehlých stěn) se protínají v jednom bodě právě tehdy, platí-li

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Dokažte.

81. V prostoru je dána úsečka AB a přímka $p \perp AB$. Najděte geometrické místo průsečíků výšek trojúhelníků ABX, probíhá-li bod X přímku p.

82. Je dán bod A a úsečka BC. Najděte geometrické místo všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno obsahuje bod A a druhé rameno má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod.

83.* Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod M; objemy čtyřstěnů $MBCD$, $MACD$, $MABD$, $MABC$ označme po řadě V_A, V_B, V_C, V_D. Dokažte, že platí

$$V_A \cdot \overrightarrow{MA} + V_B \cdot \overrightarrow{MB} + V_C \cdot \overrightarrow{MC} + V_D \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

84. Čtyřstěn $ABCD$ má vlastnost, že

$$AB = BC = CD = DA = 1.$$

Dokažte, že jeho objem je nejvýše $\frac{2}{27}\sqrt{3}$. Může nastat rovnost?

85.* Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

86.* Je dán čtyřstěn $ABCD$ a bod D_1, který leží uvnitř podstavy ABC. Rovnoběžky k přímce DD_1, vedené vrcholy A, B, C, protínají po řadě roviny BCD, CAD, ABD v bodech A_1, B_1, C_1.

Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

87.* Čtyři body čtyřstěnu, které neleží v jedné rovině, mají stejný součet vzdáleností od rovin jeho stěn. Dokažte, že stěny tohoto čtyřstěnu jsou navzájem shodné trojúhelníky.

88.* Najděte geometrické místo středů všech kruhů o poloměru $\frac{1}{2}$, které lze umístit do dané krychle o hraně 1.

89. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod X. Dokažte, že existuje kladné číslo r takové, že každá koule o poloměru r, která neobsahuje žádný z vrcholů A, B, C, D, neobsahuje ani bod X.

90. Soutěže se zúčastnilo pět žáků A, B, C, D, E. Kdosi předpověděl, že výsledné umístění bude $ABCDE$. Tato předpověď se však nesplnila: žádný soutěžící nebyl na předpověděném místě a žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících nebyla předpověděna správně.

Kdosi jiný předpověděl umístění *DAECB*. Tato předpověď byla správnější: právě dva soutěžící byli na předpověděných místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících byly předpověděny správně.

Jaké bylo skutečné výsledné umístění?

91. Je dáno $n \geqq 3$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce, a množina U skládající se z n (různých) úseček, které spojují vždy dva z daných bodů.

Pak lze z daných n bodů vybrat $k \geqq 3$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tak, že všechny úsečky A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{k-1}A_k$, A_kA_1 náležejí množině U. Dokažte.

92.* Sedmnáct osob si navzájem dopisuje, každá z nich se všemi ostatními. V celé korespondenci se objevují celkem jen tři různá témata. Každá dvojice osob si spolu dopisuje pouze o jednom z těchto témat.

Dokažte, že existují alespoň tři osoby, které si navzájem píší o témže tématu.

93. Kolik existuje (navzájem neshodných) trojúhelníků, jejichž délky stran jsou přirozená čísla nepřevyšující dané přirozené číslo n?

94. Na stole leží patnáct časopisů, které jej celý pokrývají. Dokažte, že lze ubrat sedm z nich tak, aby zbývajících osm časopisů zakrývalo alespoň osm patnáctin plochy stolu.

95. Jaký je největší možný počet oblastí, na které rozdělují kruh úsečky spojující n bodů daných na jeho obvodu?

96.* V rovině je dáno 100 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Uvažujme všechny trojúhelníky, jejichž všechny tři vrcholy jsou některé z daných bodů.

Dokažte, že nejvýše 70 % uvažovaných trojúhelníků jsou trojúhelníky ostroúhlé.

97.* Trojúhelník, jehož vrcholy jsou označeny čísly *1*, *2*, *3*, je rozdělen na konečný počet menších trojúhelníků, z nichž každé dva mohou mít společný pouze vrchol anebo celou stranu. Každý z vrcholů těchto menších trojúhelníků je označen jedním z čísel *1*, *2*, *3*, a to tak, že se na žádné straně základního trojúhelníku neobjevuje číslo jeho protějšího vrcholu; jinak je označení libovolné.

Dokažte, že vrcholy alespoň jednoho z menších trojúhelníků jsou označeny třemi různými čísly *1*, *2*, *3*.

98. Zrcadlením podle průměru ciferníku hodin přejdou ručičky do nových poloh, které mohou být v rozporu s mechanismem hodin, tzn. nemusejí ukazovat možný čas. (např. v pravé poledne nedává obraz ručiček podle průměru 9—3 možný čas.)

Pro které časy a pro které polohy osy souměrnosti vzniká po zrcadlení možný čas?

99. V rovině buď dána soustava kartézských souřadnic s počátkem P. Body, jejichž obě souřadnice jsou celá čísla, nazveme *mřížové body*. Budiž $p > 2$ dané přirozené číslo. Mřížový bod (p, k), kde $1 \leqq k \leqq p - 1$, označme A_k.

Dokažte, že p je prvočíslo, právě když se počet mřížových bodů uvnitř každého z trojúhelníků

$$PA_1A_2, PA_2A_3, \ldots, PA_{p-2}A_{p-1}$$

rovná číslu $\frac{1}{2}(p - 1)$.

100.* V rovině je dáno nekonečně mnoho bodů, jejichž všechny vzájemné vzdálenosti jsou přirozená čísla.

Dokažte, že všechny tyto body leží v jedné přímce.

101. Najděte všechna reálná čísla x, pro něž platí

$$1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x} > 0.$$

102.* Každému reálnému číslu x je přiřazeno reálné číslo $A(x)$. Přitom pro libovolná reálná čísla x, y platí

$$\begin{aligned} A(x + y) &= A(x) + A(y), \\ A(xy) &= A(x) \,.\, A(y). \end{aligned}$$

Dokažte, že je buď $A(x) = x$ pro všechna x anebo $A(x) = 0$ pro všechna x.

103.* Budiž dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Nechť dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Zjistěte všechna přirozená čísla n, pro která je $c_n = 0$.

104. Najděte všechny funkce $f(x)$ definované v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takové, že pro libovolná čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu platí

$$f(x_1) - f(x_2) \leqq (x_1 - x_2)^2.$$

105.* Dokažte, že k libovolné skupině číslic (v níž na prvém místě není nula) existuje přirozená mocnina dvojky, jejíž desítkový zápis začíná touto skupinou.

106.* Vrcholy pravidelného n-úhelníku ($n \geqq 6$) jsou obarveny několika (alespoň dvěma) barvami, každý vrchol jednou barvou. Přitom všechny body téže barvy tvoří vrcholy pravidelného mnohoúhelníku.

Dokažte, že mezi těmito barevnými mnohoúhelníky lze najít dva shodné (a různé).

107.* Každému reálnému číslu x je přiřazeno reálné číslo $f(x)$. Přitom je splněna tato podmínka: Existuje kladná konstanta M tak, že nerovnost

$$\left| \sum_{x \in K} f(x) \right| < M$$

platí pro každou konečnou množinu K reálných čísel.

Dokažte, že pro některé c je $f(c) = 0$.

108. V rovině leží $n \geqq 3$ úseček tak, že každé tři z nich mají společný bod. Dokažte, že lze najít bod společný všem těmto úsečkám.

109.* V rovině je dáno $n \geqq 3$ navzájem rovnoběžných úseček. Přitom pro každé tři z nich existuje přímka, která je všechny protíná.

Dokažte, že některá přímka protíná všech n daných úseček.

110.* Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje neprázdná konečná množina S bodů v rovině s tou vlastností, že ke každému $A \in S$ lze najít v S právě m bodů, jejichž vzdálenost od A se rovná jedné.

111. Je dána čtvercová tabulka

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{matrix}$$

sestavená z celých nezáporných čísel, která splňuje tuto podmínku: jakmile $a_{ij} = 0$, pak

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geqq n.$$

Dokažte, že pro součet s všech čísel dané tabulky platí

$$s \geqq \frac{1}{2} n^2.$$

112. V prostoru jsou dány body $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = A_0$. Zvolme bod B_0 a sestrojme další body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tak, aby pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ střed dvojice $B_{k-1} B_k$ splynul se středem dvojice $A_{k-1} A_k$.

Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby $B_n = B_0$.

113.* Nechť M je množina bodů v prostoru taková, že ke každému bodu prostoru lze v množině M najít právě jeden nejvzdálenější bod.

Dokažte, že množina M je jednobodová.