[dokumenty-03] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie B

Úlohy

In: Leo Boček (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-03] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie B. Sbírka řešených úloh z 16. až 30. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 9–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405265

ÚLOHY

Rovnice

1. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y, pro které platí

$$|x + 1| + |y + 1| = |x + y + 1|.$$

2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic o třech neznámých

$$\frac{x(y + z)}{4} = \frac{y(z + x)}{9} = \frac{z(x + y)}{10}$$

$$xy + yz + zx = \frac{23}{15}\, xyz.$$

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu $n + 1$ rovnic o $n + 1$ neznámých

$$x_k x_0 + x_{k-1} x_1 + x_{k-2} x_2 + \ldots + x_0 x_k = 2^k x_k$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

4. Najděte nutnou a postačující podmínku pro koeficienty rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

aby dva její kořeny byly nenulová opačná reálná čísla.

5. V oboru reálných čísel najděte všechna řešení rovnice

$$2x - |x| + a\,|x - a| = 0,$$

kde x je neznámá a a je reálný parametr.

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy = a^2 + ab$$

$$y^2 + xy = a^2 - ab,$$

kde x, y jsou neznámé a a, b reálné parametry.

7. Určete všechny kladné hodnoty parametru a, pro něž má soustava rovnic

$$|x - a| + a = |x| + |y|$$

$$x + 2y = 2$$

s neznámými x, y právě tři řešení v oboru reálných čísel.

8. Najděte všechna reálná čísla a, pro která platí: Množina všech bodů roviny $[x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$|x + y| + a\,|y| = 1,$$

vyplní obvod pravoúhelníku.

9. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$2x + py = 16$$

$$x - 2y = \tfrac{1}{2} p^2$$

$$(p - 1)\,x + 2y = 12p - 6.$$

Proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru p.

10. Kolik řešení má v oboru reálných čísel soustava rovnic

$$ax + \frac{b}{y} = 1$$

$$by + \frac{a}{x} = 1$$

s neznámými x, y? Proveďte diskusi vzhledem k daným reálným číslům a, b.

11. V oboru reálných čísel najděte řešení soustavy lineárních rovnic

$$x - a^3y + a^2z = 1$$

$$a^3x - y + az = -1$$

$$a^2x - ay + z = 1$$

s neznámými x, y, z a reálným parametrem a.

12. Jsou dána reálná čísla a, b. Najděte všechny čtveřice nezáporných reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, které vyhovují soustavě rovnic

$$x_1 - x_2 = a$$

$$x_3 - x_4 = b$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nerovnosti

13. Dokažte, že pro každá dvě kladná čísla p, q platí: Jestliže $pq \leqq 1$, pak

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \geqq 4.$$

Kdy nastane rovnost?

14. Nechť n je přirozené číslo a a, b reálná čísla, pro která platí

$$a \geqq b \geqq 0.$$

Dokažte, že potom

$$a^n - b^n \geqq (a - b)^n.$$

Určete všechny případy, kdy platí rovnost.

15. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná čísla, pak platí

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n;$$

dokažte. Kdy nastane rovnost?

16. Předpokládejme, že pro reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

Označíme-li nejmenší z nich m a největší M, dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq -nmM.$$

Kdy nastane rovnost?

17. Je dáno $2n + 1$ reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ $(n \geqq 2)$ uspořádaných podle velikosti

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}.$$

Každému jejich pořadí $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ přiřadíme součet

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1|.$$

Dokažte, že největší součet dostaneme pro pořadí $a_1, a_{n+2}, a_2, a_{n+3}, \ldots, a_n, a_{2n+1}, a_{n+1}$.

Nerovnice

18. Načrtněte množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnici

$$1 \leqq ||x + y| - |x - y|| \leqq 2.$$

19. Načrtněte množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnici

$$\frac{(x^5 - 13x^3 + 36x)(x^4 - 17x^2 + 16)}{(y^5 - 13y^3 + 36y)(y^4 - 17y^2 + 16)} \geqq 0.$$

Funkce

20. Je dána funkce reálné proměnné

$$y = \sqrt{x \frac{\sqrt{\frac{1 + x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\frac{1 + x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\frac{1 + x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\frac{1 + x^2}{2x} - 1}}}.$$

Určete její definiční obor a sestrojte její graf.

21. Funkce proměnné x

$$y = a\,|x| + b\,|x - k|$$

nabývá hodnoty 0 pro $x = -1$ a pro $x = 3$; největší hodnota, které nabývá, je 2. Určete konstanty a, b, k a nakreslete graf funkce.

22. Najděte všechny kvadratické funkce $f(x)$, které splňují pro všechna reálná čísla x podmínku

$$f(2x + 1) = 4f(-x).$$

23. Jestliže kvadratická funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

nabývá v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$ pouze hodnot $-1 \leqq f(x) \leqq 1$, potom $|a| \leqq 2$; dokažte. Najděte všechny takové funkce, pro něž $|a| = 2$.

24. Je dána množina funkcí

$$f(x) = x^2 + b\,|x| + c,$$

kde b, c jsou reálné parametry. Najděte všechny funkce z této množiny, které v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$ mají největší hodnotu 2 a nejmenší hodnotu 1.

25. Je dána funkce proměnné x

$$f(x) = \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2}.$$

Určete všechny hodnoty reálného parametru p, pro které je

$$|f(x)| < 2$$

pro všechna reálná čísla x.

26. Najděte všechna reálná čísla a, která mají tu vlastnost, že pro každé reálné číslo x platí

$$\left|\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}\right| < a.$$

Mnohočleny s celočíselnými koeficienty

27. Jsou-li koeficienty kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lichá čísla, nemá tato rovnice racionální kořeny; dokažte.

28. Je dán mnohočlen

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

s celočíselnými koeficienty. Jsou-li pro některé celé číslo m čísla $f(m)$, $f(m + 1)$, $f(m + 2)$ násobky tří, pak je násobkem tří číslo $f(k)$ pro jakékoli celé číslo k. Dokažte.

Vlastnosti celých čísel

29. Jsou-li p, q prvočísla větší než 5, je číslo $p^4 - q^4$ dělitelné šedesáti. Dokažte.

30. Je-li $k \geqq 3$ přirozené číslo, je součin

$$k(k + 1)(k + 2) \ldots (3k - 4)(3k - 3)$$

dělitelný druhou mocninou jakéhokoli přirozeného čísla $m \leqq k$. Dokažte.

31. Přirozené číslo $N > 2$ je součtem aspoň dvou za sebou následujících přirozených čísel, právě když není mocninou čísla 2. Dokažte. Rozložte číslo $N = 100$ na součet za sebou následujících přirozených čísel.

32. Ke každému přirozenému číslu $n \leqq 150$ existují dva různí dělitelé d_1, d_2 čísla 9 000 tak, že n dělí rozdíl $d_1 - d_2$. Dokažte.

33. Dokažte, že mezi přirozenými čísly, jejichž dekadický zápis končí čtyřčíslím 1978, existuje číslo dělitelné číslem 1977.

34. Ať zvolíme jakkoli velké přirozené číslo k, existuje prvočíslo tvaru $12n + 5$ nebo $12n - 5$ (n je přirozené číslo) větší než k. Dokažte.

Hledání celých čísel s danými vlastnostmi

35. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž je ciferný součet čísla 2^n roven 5.

36. V dekadickém zápisu čísla $23A\,5B6$ nahraďte písmena A, B číslicemi tak, aby vzniklo číslo dělitelné devatenácti. Najděte všechna řešení.

37. Najděte všechna přirozená čísla x, která vyhovují rovnici

$$4^{x-1} + 7.2^x + 48 = x(x-1)\ldots 3.2.1.$$

38. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro které platí

$$x^y = y^{x-y}.$$

39. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro které platí

$$|2^x - 10^y| \leqq 5.$$

40. Najděte všechny trojice přirozených čísel x, y, z takové, že

$$x^3 + y^3 + z^5 = 1979$$

$$y^2 z = x.$$

41. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y, pro které platí, že obě čísla

$$\frac{1 + x}{y}, \frac{1 + y}{x}$$

jsou celá.

42. Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n, pro které platí: Aritmetický průměr čísel m, n je dvojciferné číslo a vyměníme-li jeho číslice, dostaneme geometrický průměr čísel m, n.

Pohyb

43. Voda v řece teče rychlostí 2 m/s. Cesta od přístavu k mostu a zpět trvá malému člunu 33 min a velkému člunu, který má (ve stojaté vodě) dvojnásobnou rychlost, 16 min. Jak daleko je od přístavu k mostu?

44. Na kruhové dráze vyjeli z téhož místa současně dva cyklisté v opačných směrech. První jel rychlostí 6 m/s a potkal druhého cyklistu v prvním svém okruhu dvakrát, v druhém okruhu třikrát, ve třetím okruhu zase dvakrát, vždy mimo místo startu. Najděte co nejužší meze pro rychlost druhého cyklisty za předpokladu, že byla rovnoměrná.

Šachovnice

45. Na šachovnici tvaru 20×20 polí je vyznačeno 31 navzájem různých šachovnic tvaru 8×8. Dokažte, že existuje pole, které patří aspoň šesti vyznačeným šachovnicím.

46. Na polích šachovnice 8×8 je rozestaveno 42 figurek. Dokažte, že některá její část tvaru 4×4 má figurkami obsazena aspoň 4 diagonální pole. (Diagonálními poli šachovnice 4×4 rozumíme 8 polí na jejích úhlopříčkách.)

47. Na šachovnici tvaru 1000×1000 stojí 800 000 figurek. Dokažte, že na obvodu některé její části tvaru 8×8 stojí aspoň 22 figurek.

Operace

48. V oboru reálných čísel je dána binární operace $*$

$$x * y = x + y + xy.$$

a) Zjistěte, zda je tato operace komutativní a asociativní a zda má neutrální prvek.
b) Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$a * (x * x) = b * x\,;$$

proveďte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b.

49. V oboru přirozených čísel zaveďme operaci $*$ takto: Pro každé x je $x * 1 = 1 * x = 1$. Je-li $x > 1$, $y > 1$ a jsou-li $x = p_1 \ldots p_a$, $y = q_1 \ldots q_b$ rozklady čísel x, y na součin prvočinitelů, definujeme $x * y$ jako součin všech součtů $p_i + q_k$ $(i \in \{1, \ldots, a\},\ k \in \{1, \ldots, b\})$. Dokažte, že operace $*$ je distributivní vzhledem k násobení.

Množiny

50. Sestrojte dvě neprázdné podmnožiny A, B množiny C všech celých čísel tak, aby bylo $C = A \cup B$, aby nebylo $A = B = C$ a aby pro libovolná čísla $a \in A$, $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$ platilo

$$a + a' \in A,\ b + b' \in A,\ a + b \in B.$$

Dokažte, že úloha má jediné řešení. Dále dokažte, že nahradíme-li v úloze množinu C všech celých čísel množinou R všech reálných čísel, úloha nemá řešení.

Geometrické nerovnosti

Jedna z nejjednodušších úloh na geometrické nerovnosti je úloha najít mezi všemi pravoúhelníky daného obvodu ten, který má největší obsah. Je to úloha lehká, vhodná i pro žáky nejvyšších tříd základní školy. Označíme-li totiž daný obvod $4a$ a jednu stranu pravoúhelníku x, je druhá strana pravoúhelníku $2a - x$ (aby byl obvod roven $4a$) a jeho obsah P se rovná číslu $x(2a - x) = a^2 - (a - x)^2$. Odtud je vidět, že hodnota P je největší právě tehdy, když je $x = a$. Pak se $2a - x$ rovná také hodnotě a, pravoúhelník maximálního obsahu při daném obvodu je tedy čtverec. Úlohu můžeme formulovat též algebraicky: Mezi všemi dvojicemi kladných čísel daného součtu $2a$ $(a > 0)$ najít tu dvojici čísel, jejichž součin je maximální. Výsledkem je dvojice

(a, a) čísel sobě rovných. Místo čísel kladných jsme mohli uvažovat též čísla nezáporná, tvrzení pak platí také. Podstatně obtížnější je úloha, při které se neomezíme na pravoúhelníky (obdélníky a čtverce), nýbrž budeme hledat mezi všemi čtyřúhelníky daného obvodu.

51. Ze všech čtyřúhelníků daného obvodu má největší obsah čtverec. Dokažte.

Víme, že k jednoznačnému určení trojúhelníku je často třeba zadat tři jeho prvky, například velikosti jeho tří stran nebo dvě strany a úhel jimi sevřený. Pak se nám zdá, že úloha, při které jsou dány pouze dva prvky trojúhelníku, není zadána úplně. Přitom se při řešení ukáže, že podmínkám úlohy vyhovuje dokonce pouze jediný trojúhelník. Podobně je tomu i v případě čtyřúhelníku, pětiúhelníku nebo libovolného mnohoúhelníku. Uveďme příklad takové úlohy.

52. Najděte všechny trojúhelníky o obsahu 18 cm^2, jejichž jediná strana je větší než 6 cm.

Příkladem úlohy, která má nekonečně mnoho řešení, je další úloha.

53. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, u něhož součet velikostí úseček AB, AC, AD je 20 cm a jehož obsah je větší než 49 cm^2.

Dále uvedeme řadu úloh důkazových.

54. Je-li trojúhelník T_1 celý obsažen v trojúhelníku T_2, pak platí:

a) délka největší strany trojúhelníku T_1 je menší nebo rovna délce největší strany trojúhelníku T_2;

b) délka nejmenší výšky trojúhelníku T_1 je menší nebo rovna délce nejmenší výšky trojúhelníku T_2.

Dokažte obě tvrzení.

55. Je-li v délka nejmenší výšky trojúhelníku a P jeho obsah, pak platí $v \leqq \sqrt{P\sqrt{3}}$. Dokažte a zjistěte, kdy platí znaménko rovnosti.

56. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna má střed D a délku 2.

a) Dokažte, že pro každý bod M výšky CD platí

$$|AM| + |BM| + |CM| \geqq 1 + \sqrt{3}.$$

b) Sestrojte ten bod M výšky CD, pro který je součet $|AM| + |BM| + |CM|$ nejmenší.

57. Je dán vypuklý (tj. konvexní) čtyřúhelník $ABCD$ a bod X úhlopříčky BD takový, že přímka AX protíná stranu CD v jejím vnitřním bodě. Pak platí $|AX| + |BX| + |CX| < |AD| + |BD| + |CD|$. Dokažte a zjistěte, zda platí tato nerovnost též v případě, kdy přímka AX prochází vrcholem C nebo protíná úsečku BC.

Další dvě úlohy se týkají součtu druhých mocnin vzdáleností.

58. V rovině je dán obdélník $ABCD$ o stranách a, b. Najděte v obdélníku všechny body X, pro které je součet $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2$ minimální.

59. Je dán trojúhelník ABC, velikosti jeho stran jsou a, b, c. Najděte bod trojúhelníku, pro který je součet druhých mocnin jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníku minimální.

Na závěr odstavce jedna úloha o zvláštním případu lichoběžníku.

60. Lichoběžník $ABCD$ má tu vlastnost, že všechny jeho strany se dotýkají téže kružnice (čtyřúhelník s touto vlastností se nazývá tečnový). Dokažte, že jeho nejkratší strana je některá ze základen a že jeho nejdelší strana je druhá základna.

Kružnice

61. V rovině jsou dány dva různé body A, B a kružnice k. Sestrojte na kružnici k body C, D tak, aby body A, B, C, D tvořily vrcholy rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se základnami BC, AD.

62. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, velikosti jeho stran označíme $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Kružnice k_A má střed v bodě A, kružnice k_B v bodě B a podobně jsou středy kružnic k_C, k_D body C, D. Kružnice k_A, k_B mají vnější dotyk, stejně tak kružnice k_B, k_C, dále kružnice k_C, k_D a vnější dotyk mají i kružnice k_D, k_A. Dokažte, že platí $a + c = b + d$. Dokažte, že platí též obrácené tvrzení: je-li $a + c = b + d$, pak existují kružnice k_A, k_B, k_C, k_D se středy A, B, C, D tak, že dvojice kružnic k_A a k_B, k_B a k_C, k_C a k_D, k_D a k_A mají vnější dotyk.

63. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $|AC| = 4$, $|BC| = 3$. Kružnice k_1, k_2, k_3 mají středy ve vrcholech A, B, C a každé dvě z nich mají vnější dotyk.

a) Vypočtěte poloměry kružnic k_1, k_2, k_3.

b) Vypočtěte poloměr kružnice k, která má s každou z kružnic k_1, k_2, k_3 vnější dotyk.

64. Je dána kružnice k se středem S a s poloměrem r. Dokažte, že každý bod Z z vnitřní oblasti kružnice, různý od středu S, je středem kružnice vepsané trojúhelníku SXY, jehož vrcholy X, Y leží na kružnici k. Vyjádřete poloměr této kružnice pomocí r a $|SZ|$.

65. Je dána kružnice $k = (S, r)$, bod A, pro který platí $|AS| = d > r$, a kladné číslo ϱ. Sestrojte kružnici s poloměrem ϱ, která prochází bodem A a dělí kružnici k na dvě polokružnice. Uveďte podmínky řešitelnosti.

Zobecněním této úlohy je úloha následující.

66. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 = (S_1, r)$- a $k_2 = (S_2, r_2)$ a kladné číslo ϱ. Sestrojte kružnici k s polo$_1$ měrem ϱ, která dělí kružnici k_1 na dvě polokružnice a je dělena kružnicí k_2 na dvě polokružnice.

Trojúhelníky

67. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána délka jeho přepony a délka těžnice k některé odvěsně. Uveďte podmínku řešitelnosti.

68. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky b, c jeho stran AC, AB a jestliže pro délku jeho těžnice t na stranu AB a délku a jeho třetí strany platí vztah $2t = 3a$.

69. Je dána úsečka AB a přímka p kolmá k AB, která nemá společný bod s úsečkou AB. Sestrojte trojúhelník ABC

tak, aby vrchol C ležel na přímce p a platilo $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$. Uveďte podmínky řešitelnosti.

70. Je dán trojúhelník, jehož žádná strana není větší než 3. Dokažte, že trojúhelník lze umístit do kruhu o poloměru $\sqrt{3}$.

71. Je dán trojúhelník ABC a nad jeho stranami AC, BC jsou v polorovinách opačných k polorovinám ACB, BCA sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACD, BCE. Také nad stranou AB je sestrojen rovnostranný trojúhelník ABF, ten však tak, že jsou poloroviny ABC, ABF totožné. Označme ještě M těžiště rovnostranného trojúhelníku ABF. Dokažte, že trojúhelník DME je rovnoramenný a $\sphericalangle DME = 120°$.

Můžete si sami zadat podobné úlohy, například: co vytvoří těžiště U, V, W rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami trojúhelníku ABC, jestliže leží tyto trojúhelníky vždy v opačných polorovinách, než ve kterých leží daný trojúhelník.

72. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod M na kružnici mu opsané, různý od jeho vrcholů. Označme M_1, M_2, M_3 body souměrně sdružené k bodu M podle stran trojúhelníku ABC. Dokažte, že body M_1, M_2, M_3 leží na jedné přímce, která prochází průsečíkem výšek daného trojúhelníku.

Z tvrzení této úlohy také plyne, že paty kolmic vedených bodem M k stranám trojúhelníku leží rovněž na přímce, která se nazývá Simsonova, někdy též Wallaceova přímka.

73. Je dán trojúhelník ABC, označme P, Q, R paty výšek k stranám BC, CA, AB. Zjistěte, zda existuje trojúhelník UVW tak, aby úsečka UV byla rovnoběžným posunutím úsečky AP a totéž platilo pro dvojici úseček VW, BQ a také pro WU a CR.

74. Je dán trojúhelník ABC, označme P, Q, R středy stran BC, CA, AB. Ukažte, že existuje trojúhelník UVW tak, že úsečku UV dostaneme rovnoběžným posunutím úsečky AP a totéž platí pro dvojice úseček VW, BQ a WU, CR. Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníků UVW a ABC.

Čtyřúhelníky, mnohoúhelníky

75. Jestliže pro strany a úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2,$$

potom je tento čtyřúhelník rovnoběžníkem. Dokažte.

76. Nechť $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ jsou délky stran tečnového čtyřúhelníku $ABCD$. Jestliže platí

$$a^2 + b^2 = (a + c)(b + d) - (ac + bd),$$

je čtyřúhelník deltoidem (tj. čtyřúhelník souměrný podle některé své úhlopříčky). Jestliže kromě toho platí

$$b^2 + c^2 = (a + c)(b + d) - (ac + bd),$$

je $ABCD$ kosočtverec. Dokažte.

77. Nechť je $ABCD$ deltoid s osou souměrnosti AC, S průsečík jeho úhlopříček a M, N, P, Q paty kolmic vedených bodem S k stranám AB, BC, CD, DA. Dokažte, že $MQ \| NP$, a rozhodněte, kdy je čtyřúhelník $MNPQ$ lichoběžníkem a kdy rovnoběžníkem.

78. Nechť $ABCD$ je takový vypuklý čtyřúhelník, že kolmé průměty průsečíku jeho úhlopříček na jednotlivé strany leží uvnitř těchto stran. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby tyto průměty ležely na jedné kružnici, je, aby úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ byly na sebe kolmé. Dokažte.

79. Předpokládejme, že kolmé průměty průsečíku úhlopříček čtyřúhelníku na jeho strany leží uvnitř těchto stran. Pak je možno jimi proložit kružnici právě tehdy, když středy stran leží na kružnici. Dokažte.

80. Dokažte, že úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou právě tehdy na sebe kolmé, když platí $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$.

81. Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte na straně BC bod D a na straně AC bod E tak, aby čtyřúhelníku $ABDE$ bylo možno opsat i vepsat kružnici. Vyjádřete vzdálenosti $|CD|$, $|CE|$ i obvod čtyřúhelníku $ABDE$ pomocí délek a, b, c stran trojúhelníku ABC.

82. Jestliže je možno lichoběžníku vepsat kružnici, pak je geometrický průměr délek jeho ramen větší než geometrický průměr délek jeho základen. Dokažte. (Srovnej s úlohou 60.)

83. Sestrojte konvexní rovnostranný, ne nutně pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, v němž jsou dány délky úhlopříček AC, AD, platí-li

$$\sphericalangle BAE = 2 . \sphericalangle CAD.$$

84. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$. Jeho úhlopříčky vycházející z bodu B dělí úhel ABC na čtyři shodné úhly a totéž platí pro úhlopříčky vycházející z vrcholů D a F. Dokažte, že je šestiúhelník $ABCDEF$ pravidelný.

85. Mají-li čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ tu vlastnost, že přímky AB a $A'B'$ splývají, přímky CD a $C'D'$ splývají a $|AB| = |A'B'|$, $|CD| = |C'D'|$, pak mají stejný objem. Dokažte.

86. Určete objem čtyřstěnu, jehož každé dvě protější hrany mají stejnou délku. Délky hran v těchto dvojicích jsou a, b, c.

87. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B', C' jsou po řadě středy hran BD, CD. Označme R bod polopřímky opačné k polopřímce AB, pro který platí $|AR| = k\,|AB|$. Dále označíme A' průsečík hrany AD s rovinou $B'C'R$. Vyjádřete poměr objemů čtyřstěnů $A'B'C'D$ a $ABCD$ pomocí čísla k.

88. V čtyřstěnu $ABCD$ jsou každé dvě z hran AD, BD, CD na sebe kolmé. Označme U těžiště trojúhelníku ABC, T těžiště čtyřstěnu a S střed kulové plochy, která prochází body A, B, C, D. Vyjádřete její poloměr pomocí vzdálenosti ST.

89. Je dán čtyřboký jehlan $VABCD$ s čtvercovou podstavou $ABCD$ a na úsečce VC bod E tak, že $|VE| : |VC| = q$, $0 < q < 1$. Rovina ABE protne hranu VD v bodě F. Určete poměr objemů těles, na které dělí jehlan rovina ABE.

90. Do polokoule o poloměru 10 umístěte tři shodné kulové plochy tak, že každé dvě mají vnější dotyk a každá z nich se dotýká podstavy polokoule i její hraniční polosféry. Vypočtěte poloměr vepsaných sfér a ukažte, že úloha má vždy řešení.