[dokumenty-03] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie B

Řešení úloh

In: Leo Boček (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-03] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie B. Sbírka řešených úloh z 16. až 30. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 31–148.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405266

ŘEŠENÍ ÚLOH

1. Jsou-li x, y čísla, která vyhovují dané rovnici, platí pro ně

$$|x + 1| + |y + 1| = |x + y + 1| \leqq |x| + |y + 1|,$$

a tedy

$$|x + 1| \leqq |x|.$$

Analogicky odvodíme podmínku

$$|y + 1| \leqq |y|.$$

Snadno zjistíme, že tyto podmínky jsou ekvivalentní s podmínkami

$$x \leqq -\tfrac{1}{2}, y \leqq -\tfrac{1}{2}.$$

Řešení tedy budeme hledat jen v tomto oboru, což nám umožní odstranit absolutní hodnotu na pravé straně rovnice, protože pro tato x, y je

$$|x + y + 1| = -x - y - 1.$$

Budeme řešit rovnici

$$|x + 1| + |y + 1| + x + y + 1 = 0.$$

V případě $-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$, $-1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}$ má rovnice po odstranění zbývajících absolutních hodnot tvar

$$2x + 2y + 3 = 0,$$

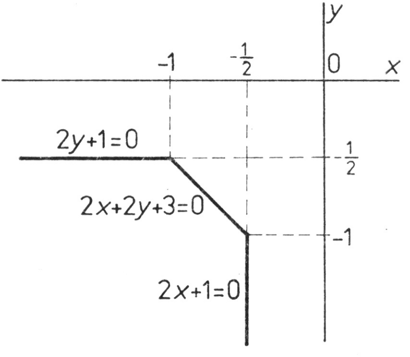
v případě $-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$, $y < -1$ má tvar

$$2x + 1 = 0,$$

v případě $x < -1$, $-1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}$ má tvar

$$2y + 1 = 0$$

a v případě $x < -1$, $y < -1$ má tvar $-1 = 0$. Poslednímu případu neodpovídá žádné řešení. Grafické znázornění řešení z ostatních případů je na obr. 1.



Obr. 1

2. Jednoduchými úpravami dostaneme soustavu

$$4yz - 9xz - 5xy = 0$$

$$-yz + 9xz - 10xy = 0 \qquad (1)$$

$$yz + xz + xy = \frac{23}{15}\,xyz,$$

která je ekvivalentní s danou soustavou. Nechť x, y, z je trojice reálných čísel vyhovujících soustavě.
Je-li $xyz \neq 0$, vydělíme každou rovnici tímto číslem a dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
4u - 9v - 5w &= 0 \\
-u + 9v - 10w &= 0 \\
u + v + w &= \frac{23}{15},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kde $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $w = \frac{1}{z}$. Snadno zjistíme, že soustava (2) má jediné řešení $u = 1$, $v = \frac{1}{3}$, $w = \frac{1}{5}$, kterému odpovídá řešení $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$ soustavy (1).
Je-li aspoň jedno z čísel x, y, z rovno nule, je ze soustavy (1) vidět, že aspoň dvě z čísel x, y, z jsou rovna nule. Snadno se přesvědčíme, že trojice $x = 0$, $y = 0$, $z = t$; $x = 0$, $y = t$, $z = 0$; $x = t$, $y = 0$, $z = 0$ soustavě (1) vyhovují pro libovolné reálné číslo t.

3. Z první rovnice

$$x_0^2 = x_0$$

vidíme, že musí být buď $x_0 = 0$, nebo $x_0 = 1$. V případě $x_0 = 0$ dostaneme z druhé rovnice

$$x_1 x_0 + x_0 x_1 = 2x_1,$$

že $x_1 = 0$, a z dalších rovnic postupně, že všechny neznámé jsou nulové.

Zbývá vyšetřit případ $x_0 = 1$. Druhé rovnici

$$2x_1 = 2x_1$$

pak vyhovuje každé reálné číslo x_1. Pro $k \geqq 2$ dostaneme z $(k + 1)$ní rovnice

$$x_{k-1}\, x_1 + x_{k-2}\, x_2 + \ldots + x_1\, x_{k-1} = (2^k - 2)x_k,$$

což nám umožňuje jednoznačně určit x_k pomocí $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, tj. jednoznačně určit x_k pomocí x_1. Postupně dostáváme ze třetí rovnice

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2},$$

ze čtvrté rovnice

$$x_3 = \frac{2x_1x_2}{8 - 2} = \frac{x_1^3}{3.2},$$

z páté rovnice

$$x_4 = \frac{2x_1x_3 + x_2^2}{16 - 2} = \frac{x_1^4}{4.3.2}$$

atd. I další pokračování by nasvědčovalo, že řešení soustavy je

$$x_0 = 1,\ x_1 = t,\ x_2 = \frac{t^2}{2!}, \ldots, x_n = \frac{t^n}{n!}, \tag{1}$$

kde t je libovolné reálné číslo. Ověříme, je-li to tak, dosazením do soustavy. Na levé straně $(k + 1)$ní rovnice dostaneme

$$\frac{t^k}{k!} + \frac{t^k}{1!(k-1)!} + \frac{t^k}{2!(k-2)!} + \ldots + \frac{t^k}{(k-1)!1!} + \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \frac{t^k}{k!}\left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k}\right] = \frac{t^k . 2^k}{k!},$$

což se shoduje s pravou stranou. (Součet kombinačních čísel v závorce je 2^k - jde o rozvoj $(1 + 1)^k$ podle binomické věty.) Z našich úvah vyplývá, že nulové řešení a řešení (1) jsou všechna řešení soustavy.

4. Dejme tomu, že uvažovaná rovnice má nenulové reálné kořeny u, $-u$. Platí tedy pro ně

$$u^3 + au^2 + bu + c = 0,$$

$$-u^3 + au^2 - bu + c = 0.$$

Sečtením a odečtením těchto rovností vyjdou podmínky

$$2au^2 + 2c = 0,$$

$$2u^3 + 2bu = 0,$$

odkud plyne

$$au^2 + c = 0,$$

$$u^2 + b = 0.$$

Z druhé rovnosti vidíme, že musí být $b < 0$. Dosadíme-li odtud za u^2 do první rovnosti, dostaneme podmínku $ab = c$. Obráceně, předpokládejme, že pro koeficienty rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

platí $b < 0$, $ab = c$. Levá strana rovnice je tedy

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = x^2(x + a) + b\,(x + a) =$$
$$= (x^2 + b)\,(x + a) = (x + \sqrt{-b})\,(x - \sqrt{-b})\,(x + a)$$

a rovnice má dva reálné nenulové opačné kořeny $\sqrt{-b}$, $-\sqrt{-b}$. Hledaná nutná a postačující podmínka je tedy

$$b < 0,\ ab = c.$$

5. Pro $a = 0$ jde o rovnici

$$2x - |x| = 0,$$

která má jediné řešení $x = 0$. Pro $a \neq 0$ budeme rovnici řešit zvlášť v každém ze tří intervalů, na které dělí body 0, a reálnou osu, aby odpadly absolutní hodnoty.
Nejprve předpokládejme, že $a > 0$. V intervalu $x < 0$ má rovnice tvar

$$2x + x + a(a - x) = 0,$$

neboli

$$x(a - 3) = a^2$$

a má zde řešení

$$x = \frac{a^2}{a - 3},$$

právě když $a < 3$.
V intervalu $0 \leqq x \leqq a$ má rovnice tvar

$$2x - x + a(a - x) = 0,$$

neboli

$$x(a - 1) - a^2 = 0$$

a nemá v něm řešení, protože graf funkce

$$y = x(a - 1) - a^2$$

je na tomto intervalu úsečka s krajními body $[0, -a^2]$, $[a, -a]$, která leží pod osou x. Podobně v intervalu $x > a$ nemá rovnice

$$2x - x + a(x - a) = 0$$

pro žádné $a > 0$ řešení, neboť polopřímka vycházející z bodu $[a, a]$ a procházející bodem $[2a, a^2 + 2a]$ neprotíná osu x.

Analogicky postupujeme pro $a < 0$, kdy najdeme řešení jen v případě $a > -1$, a to

$$x = \frac{a^2}{a + 1}.$$

Závěr: Pro $-1 < a < 0$ má soustava jediné řešení

$$x = \frac{a^2}{a + 1},$$

pro $a = 0$ jediné řešení $x = 0$ a pro $0 < a < 3$ jediné řešení

$$x = \frac{a^2}{a - 3}.$$

Pro ostatní a řešení neexistuje.

6. Sečteme-li obě rovnice, dostaneme

$$(x + y)^2 = 2a^2,$$

a odečteme-li druhou rovnici od první, vyjde

$$x^2 - y^2 = 2ab.$$

Dostali jsme tak dvě rovnice, které tvoří soustavu ekvivalentní s původní soustavou. Můžeme je psát ve tvaru

$$(x + y)^2 = 2a^2 \tag{1}$$

$$(x + y)(x - y) = 2ab. \tag{2}$$

Je-li $a = 0$, snadno zjistíme, že řešením soustavy jsou právě všechny dvojice $x = t$, $y = -t$, kde t je libovolné reálné číslo.
Předpokládejme, že $a \neq 0$. Z rovnice (1) vidíme, že je buď

$$x + y = a\sqrt{2},$$

nebo

$$x + y = -a\sqrt{2}.$$

Po dosazení do rovnice (2) dostaneme

$$x - y = b\sqrt{2},$$

resp.

$$x - y = -b\sqrt{2}.$$

Vyhovují-li tedy čísla x, y dané soustavě, vyhovují také buď soustavě

$$x + y = a\sqrt{2}$$

$$x - y = b\sqrt{2},$$

nebo soustavě

$$x + y = -a\sqrt{2}$$

$$x - y = -b\sqrt{2}.$$

Je to tedy buď dvojice

$$x = (a + b)\frac{\sqrt{2}}{2}, y = (a - b)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

nebo dvojice

$$x = (-a - b)\frac{\sqrt{2}}{2}, y = (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zkouškou zjistíme, že obě dvojice dané soustavě vyhovují.

7. Ze druhé rovnice vyjádříme

$$y = \frac{2 - x}{2}$$

a dosadíme do první, dostaneme

$$|x - a| + a = |x| + \left|\frac{2 - x}{2}\right|. \tag{1}$$

Počet řešení dané soustavy se zřejmě bude shodovat s počtem řešení rovnice (1). Abychom odstranili absolutní hodnoty, budeme tuto rovnici zkoumat zvlášť v každém ze čtyř intervalů, na které rozdělí čísla 0, a, 2 reálnou osu.
Nejprve budeme předpokládat, že $a \leqq 2$.
V intervalu $x < 0$ má rovnice (1) tvar

$$a - x + a = -x + \frac{2 - x}{2}$$

a řešení

$$x = -4a + 2,$$

právě když $a > \frac{1}{2}$.

V intervalu $0 \leqq x < a$ má rovnice (1) tvar

$$a - x + a = x + \frac{2 - x}{2}$$

a řešení

$$x = \frac{4a - 2}{3},$$

právě když $\frac{1}{2} \leqq a < 2$.

V intervalu $a \leqq x < 2$ má rovnice (1) tvar

$$x - a + a = x + \frac{2 - x}{2}$$

a řešení nemá pro žádné a.

V intervalu $x \geqq 2$ má rovnice (1) tvar

$$x - a + a = x + \frac{x - 2}{2}$$

a řešení $x = 2$ pro každé a.

Vidíme, že pro každé reálné $a \leqq 2$ má rovnice (1), a tedy i daná soustava, nanejvýš tři řešení. Tři různá řešení dostaneme pro $\frac{1}{2} < a < 2$ (snadno se přesvědčíme, že pro žádné takové a některé z hodnot $-4a + 2$, $\frac{4a - 2}{3}$, 2 nesplynou).

Při vyšetřování případu $a > 2$ postupujeme obdobně. Zjistíme, že ve dvou ze čtyř vyšetřovaných intervalů je nanejvýš po jednom řešení a ve dvou intervalech žádné. V tomto případě se tedy pro žádné a nestane, že by daná soustava rovnic měla tři řešení.

8. Abychom se vyhnuli absolutním hodnotám, rozdělíme rovinu na čtyři podmnožiny složené z bodů, jejichž souřadnice splňují podmínky

$$x + y \geqq 0, y \geqq 0,$$

$$x + y \geqq 0, y \leqq 0,$$

$$x + y \leqq 0, y \geqq 0,$$

$$x + y \leqq 0, y \leqq 0.$$

Na obr. 2 jsou jednotlivé části znázorněny. Zadaná rovnice bude mít v jednotlivých případech tvar

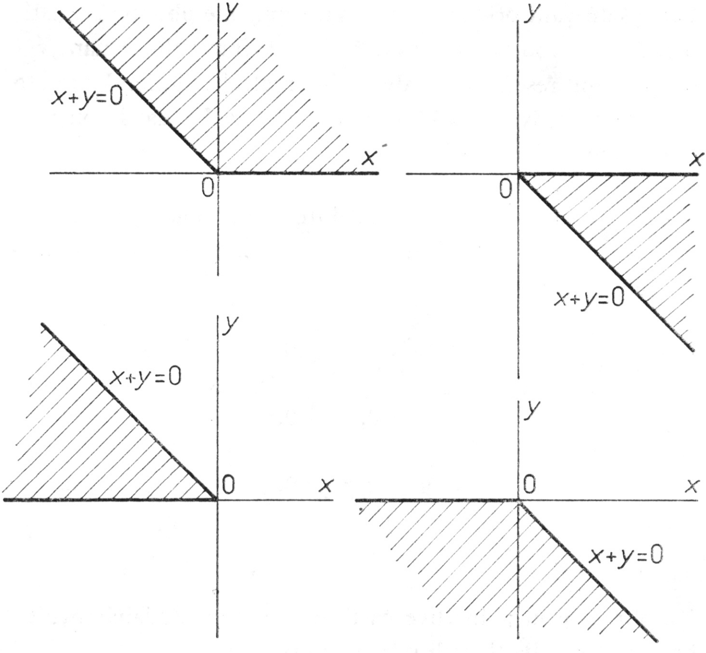
$$x + (1 + a)y = 1, \tag{1}$$

$$x + (1 - a)y = 1, \tag{2}$$

$$x + (1 - a)y = -1, \tag{3}$$

$$x + (1 + a)y = -1, \tag{4}$$

což jsou rovnice dvou dvojic rovnoběžných přímek. Vyplní-li řešení obvod čtyřúhelníku, bude tedy každá jeho strana



Obr. 2

ležet na jedné z uvedených přímek a každý vrchol bude ležet na jednom ramenu úhlů, na něž jsme rozdělili rovinu. Hned je vidět, že přímky (1), (2) procházejí bodem [1, 0], přímky (3), (4) bodem [−1, 0], a to jsou tedy dva protilehlé vrcholy čtyřúhelníku. Je-li to pravoúhelník, leží zbývající dva vrcholy na přímce $x + y = 0$ souměrně podle počátku, od kterého jsou vzdáleny 1, tedy v bodech $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

V těchto vrcholech se protínají přímky (1), (3) a (2), (4). Dosadíme-li souřadnice vrcholů do rovnic příslušných přímek, dostaneme pro parametr podmínku $a = \sqrt{2}$ nebo $a = -\sqrt{2}$. Snadno se přesvědčíme, že obě hodnoty vyhovují.

9. Odečteme-li dvojnásobek druhé rovnice od první, dostaneme

$$(p + 4)y = 16 - p^2. \tag{1}$$

Prozatím budeme předpokládat, že $p \neq -4$, což nám umožní vyjádřit $y = 4 - p$ a z druhé rovnice pak

$$x = \tfrac{1}{2}p^2 + 2y = \tfrac{1}{2}p^2 - 2p + 8. \tag{2}$$

Existuje-li tedy v případě $p \neq -4$ řešení, platí pro ně (1), (2). Dosadíme odtud do daných rovnic a ověříme, jsou-li splněny. Zjistíme, že první dvě rovnice jsou splněny vždy, zatímco třetí, právě když

$$p^3 - 5p^2 - 8p + 12 = 0.$$

Všimneme si, že součet koeficientů této rovnice je 0, jejím kořenem je tedy $p = 1$. Po vydělení kořenovým činitelem $(p - 1)$ dostaneme rovnici

$$p^2 - 4p - 12 = 0$$

s kořeny 6, -2. V uvažovaném případě má tedy soustava řešení, právě když $p = 1$ nebo $p = 6$ nebo $p = -2$. Příslušná řešení dostaneme dosazením za p do (1), (2).

Zbývá ještě prozkoumat případ $p = -4$. Pak má soustava tvar

$$2x - 4y = 16$$

$$x - 2y = 8$$

$$-5x + 2y = -54$$

a snadno najdeme její jediné řešení $x = \frac{23}{2}, y = \frac{7}{4}$.

Závěr: Soustava má pro $p = -4$ jediné řešení $x = \frac{23}{2}$, $y = \frac{7}{4}$, v případě $p = -2$ jediné řešení $x = 14$, $y = 6$, v případě $p = 1$ jediné řešení $x = \frac{13}{2}$, $y = 3$ a v případě $p = 6$ jediné řešení $x = 14$, $y = -2$. Pro ostatní p řešení nemá.

10. Nejprve předpokládejme, že $a = 0$. Soustava má pak tvar

$$\frac{b}{y} = 1, by = 1$$

a je-li $b = 1$ nebo $b = -1$, má nekonečně mnoho řešen ($y = b$, x libovolné), pro ostatní b řešení nemá.
Analogický výsledek dostaneme v případě $b = 0$, protože výměnou a, b v soustavě dostaneme soustavu, která se od původní liší jen výměnou neznámých.
Zbývá vyšetřit případ $ab \neq 0$.

Je-li x, y řešení dané soustavy, je $xy \neq 0$. Vyjádříme-li z druhé rovnice

$$y = \frac{x - a}{bx}, \qquad (1)$$

dosadíme do první rovnice a upravíme, zjistíme, že x je kořenem kvadratické rovnice

$$ax^2 - (a^2 - b^2 + 1)x + a = 0. \qquad (2)$$

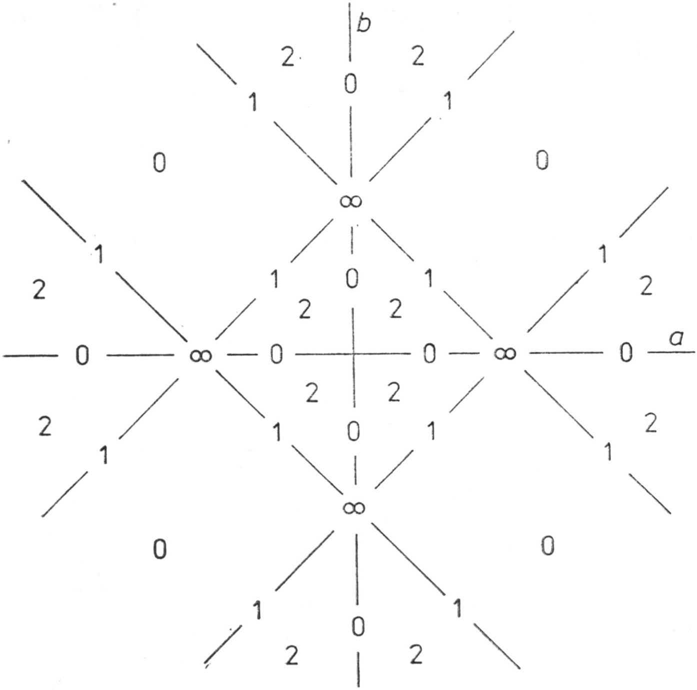
Obráceně, je-li x kořenem rovnice (2), je $x \neq a$, $x \neq 0$ (tato čísla rovnici zřejmě nevyhovují). Rovnici (2) vydělíme číslem $x - a$ a napíšeme ve tvaru

$$ax + \frac{b}{\dfrac{x - a}{bx}} = 1\,.$$

Odtud vidíme, že položíme-li pro každé řešení x kvadratické rovnice (2) y podle předpisu (1), vyhovuje dvojice x, y jako řešení dané soustavy. Daná soustava je tedy ekvivalentní se soustavou (1), (2). Počet řešení je dán počtem řešení rovnice (2), a ten závisí na jejím diskriminantu

$$(a + b + 1)(a + b - 1)(a - b + 1)(a - b - 1).$$

Výsledek diskuse je znázorněn na obr. 3.



Obr. 3

11. Ze třetí rovnice vyjádříme

$$z = 1 - a^2x + ay \tag{1}$$

a dosadíme do prvních dvou rovnic. Dostaneme tak

$$(1 - a^4)x = 1 - a^2, \tag{2}$$

$$(1 - a^2)y = 1 + a. \tag{3}$$

Nejprve budeme předpokládat, že $a \neq 1$ i $a \neq -1$. To umožní z (2) a (3) vyjádřit

$$x = \frac{1}{1 + a^2}, \tag{4}$$

$$y = \frac{1}{1 - a} \tag{5}$$

a po dosazení do (1)

$$z = \frac{a^3 + 1}{(1 - a)(1 + a^2)}. \tag{6}$$

Existuje-li tedy v našem případě řešení, má tvar (4), (5), (6). Dosadíme-li do dané soustavy, zjistíme, že jí opravdu vyhovuje. Zbývají případy $a = 1$, $a = -1$. Pro $a = 1$ dostaneme soustavu

$$x - y + z = 1$$

$$x - y + z = -1$$

$$x - y + z = 1,$$

která zřejmě nemá řešení. Pro $a = -1$ dostaneme soustavu

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 1,$$

která má nekonečně mnoho řešení.

12. Změna znaménka parametru a odpovídá výměně neznámých x_1, x_2 a změna znaménka parametru b odpovídá výměně neznámých x_3, x_4. Stačí tedy, omezíme-li se na případ $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = a + b$$

a srovnáním se třetí rovnicí máme

$$a + b = \sqrt{a^2 + b^2} - 2(x_2 + x_4) \leqq \sqrt{a^2 + b^2},$$

neboť vyžadujeme nezáporná řešení. Nerovnost

$$a + b \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$$

platí v našem případě, jak zjistíme umocněním, právě když $ab = 0$. Přitom v ní nastává rovnost, takže musí být $x_2 = 0$, $x_4 = 0$.

Je-li $a = 0$, je z první rovnice $x_1 = x_2$, a tedy $x_1 = 0$, z druhé rovnice $x_3 = b$. V tomto případě může být hledaným řešením jen čtveřice $(0, 0, b, 0)$. Je-li $b = 0$, je z druhé rovnice $x_3 = x_4$. Je tedy $x_3 = 0$ a z první rovnice $x_1 = a$. V tomto případě může být hledaným řešením jen čtveřice $(a, 0, 0, 0)$. Obě čtveřice vyhovují, jak se snadno přesvědčíme.

Přihlédneme-li k úvaze o omezení na případ $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, dojdeme k tomuto závěru:

Pro $a = b = 0$ je jedinou čtveřicí nezáporných čísel vyhovujících soustavě čtveřice $(0, 0, 0, 0)$. Pro $a > 0$, $b = 0$ je to čtveřice $(a, 0, 0, 0)$. Pro $a < 0$, $b = 0$ je to čtveřice $(0, -a, 0, 0)$. Pro $a = 0$, $b > 0$ je to čtveřice $(0, 0, b, 0)$. Pro $a = 0$, $b < 0$ je to čtveřice $(0, 0, 0, -b)$. Pro ostatní hodnoty parametrů nemá úloha řešení.

Jiné řešení:
Dosazením z prvních dvou rovnic do třetí dostaneme

$$2x_2 + 2x_4 = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b,$$

a tedy

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b\right) - x_4.$$

Dále je

$$x_1 = x_2 + a = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\right) - x_4,$$

$$x_3 = b + x_4.$$

Aby byla všechna x_i nezáporná, musí být

$$x_4 \geqq 0, \tag{1}$$

$$x_4 \geqq -b, \tag{2}$$

$$x_4 \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b\right), \tag{3}$$

$$x_4 \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\right). \tag{4}$$

Takové x_4 existuje, právě když

$$0 \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b\right),$$

$$0 \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\right),$$

$$-b \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b\right) \text{ neboli } 0 \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a + b\right),$$

$$-b \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\right) \text{ neboli } 0 \leqq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a + b\right),$$

tj. právě když

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqq |a| + |b|,$$

což nastane, právě když $ab = 0$. Je-li $a = 0$, je podle (1) a (3) $x_4 = 0$ v případě $b \geqq 0$ a podle (2) a (3) je $x_4 = -b$ v případě $b < 0$. Je-li $b = 0$, je podle (3) a (4) $x_4 = 0$. Zbývá vypočíst hodnoty ostatních neznámých a provést zkoušku.

Jiné řešení:
Předpokládejme, že nezáporná čísla x_1, x_2, x_3, x_4 vyhovují soustavě. Dosadíme-li do třetí rovnice z první za a a z druhé za b, dostaneme

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2}$$

a po umocnění obou stran

$$4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 = 0.$$

Všechny sčítance jsou nezáporné, a tedy nulové. Odtud je vidět, že nejvýše jedno z čísel x_1, x_2, x_3, x_4 může být nenulové. Z prvních dvou rovnic dále vyplývá, že nejvýše jeden z parametrů a, b může být nenulový. Zbývá už jen prozkoumat jednotlivé případy.

13. Protože $pq \leqq 1$, $q > 0$, je $\dfrac{1}{q} \geqq p$, a tedy

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \geqq \left(1 + \frac{1}{p}\right)(1 + p) = \frac{(p + 1)^2}{p}. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že $p > 0$ a

$$(p + 1)^2 - 4p = (p - 1)^2 \geqq 0, \tag{2}$$

je

$$\frac{(p + 1)^2}{p} \geqq 4$$

a dokazovaná nerovnost platí. Rovnost nastane, právě když nastane v (1) i ve (2), tj. právě když $p = q = 1$.

Jiné řešení:
Roznásobíme

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}\,.$$

Podle předpokladu je $\dfrac{1}{pq} \geqq 1$, ukážeme ještě, že

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqq 2.$$

Protože

$$(p + q)^2 \geqq 4pq \geqq 4p^2q^2,$$

je

$$p + q \geqq 2pq,$$

a tedy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p + q}{pq} \geqq \frac{2pq}{pq} = 2.$$

Tím je důkaz proveden. I z této úvahy je vidět, že rovnost nastane, právě když $p = q = 1$.

14. Hned vidíme, že dokazovaná nerovnost platí v případech $n = 1$ nebo $a = b$ nebo $b = 0$ a ve všech těchto případech nastane rovnost.
Zbývá vyšetřit případ, kdy $n > 1$ a zároveň $a > b > 0$. Vzhledem k tomu, že

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

je dokazovaná nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \geqq (a - b)^{n-1}. \quad (1)$$

Protože za našeho předpokladu je

$$a^{n-1} > (a - b)^{n-1},$$

je nerovnost (1), a tedy i dokazovaná nerovnost splněna, dokonce s ostrým znaménkem.

Jiné řešení.
Podle binomické věty je

$$a^n = [b + (a - b)]^n = b^n + (a - b)^n +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^k (a - b)^{n-k}.$$

V případě $n = 1$ poslední suma odpadá, v případě $n > 1$

obsahuje samé nezáporné sčítance, které jsou kladné, pokud $a > b > 0$, jinak nulové. Je tedy

$$a^n - b^n \geqq (a - b)^n$$

a rovnost nastane, právě když je buď $n = 1$, nebo $a = b$, nebo $b = 0$.

15. Při řešení úlohy nám pomůže následující tvrzení: Je-li $a > 0$, pak

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2. \tag{1}$$

Rovnost nastane, právě když $a = 1$.

Pomocné tvrzení je důsledkem toho, že nerovnost (1) je pro $a > 0$ ekvivalentní s nerovností

$$a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geqq 0.$$

Abychom dokázali nerovnost z úlohy, uspořádáme součet na levé straně takto:

$$\left(\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_2}\right) + \ldots$$

Na součty dvojic zlomků v závorkách můžeme použít pomocné tvrzení - podle něho je každý aspoň roven 2. Je-li n sudé, $n = 2k$, dostaneme tak k dvojic a levá strana je tedy aspoň $k.2 = n$. Je-li n liché, $n = 2k + 1$, dostaneme k dvojic a samostatný prostřední člen $\frac{x_{k+1}}{x_{k+1}} = 1$, levá strana je tedy aspoň $k.2 + 1 = n$. Rovnost nastane, právě když

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{x_2}{x_{n-1}} = \ldots = 1,$$

tj. právě když $x_1 = x_n$, $x_2 = x_{n-1}$ atd.

16. Neztratíme na obecnosti, budeme-li předpokládat, že

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n.$$

Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pak platí

$$0 \leqq (x_1 - x_k)(x_k - x_n) = (x_1 + x_n)x_k - x_1x_n - x_k^2,$$

neboli

$$x_k^2 \leqq (x_1 + x_n)x_k - x_1x_n.$$

Sečteme-li těchto n nerovností, dostaneme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq (x_1 + x_n)(x_1 + x_2 + \ldots$$

$$\ldots + x_n) - nx_1x_n,$$

a protože podle předpokladu je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,\ x_1 = m,\ x_n = M,$$

platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq -nmM.$$

Rovnost nastane, právě když pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bude

$$(x_1 - x_k)(x_k - x_n) = 0,$$

tj. každé x_k bude rovno buď m, nebo M. Pro n-tici čísel s nulovým součtem tedy nastane rovnost, právě když obsahuje nanejvýš dvě různá čísla.

17. Součet přiřazený pořadí

$$a_1, a_{n+2}, a_2, a_{n+3}, \ldots, a_n, a_{2n+1}, a_{n+1}$$

je roven

$$|a_1 - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_2| + |a_2 - a_{n+3}| + \ldots$$
$$\ldots + |a_{2n+1} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_1| =$$

$$= a_{n+2} - a_1 + a_{n+2} - a_2 + a_{n+3} - a_2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{2n+1} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_1 =$$

$$= 2(a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{2n+1}) + a_{n+1} -$$
$$- 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - a_{n+1}. \qquad (1)$$

Pro libovolné uspořádání se uvažovaný součet po úpravě vedoucí k odstranění absolutních hodnot skládá z $2(2n + 1)$

sčítanců, mezi nimiž se každé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ vyskytuje právě dvakrát. Přitom u $2n + 1$ sčítanců je kladné znaménko a u $2n + 1$ záporné. Odtud vidíme, že součet (1) je největší možný, kladná znaménka má u $2n + 1$ největších členů

$$a_{2n+1}, a_{2n+1}, a_{2n}, a_{2n}, \ldots, a_{n+2}, a_{n+2}, a_{n+1}$$

a záporná u $2n + 1$ nejmenších členů

$$a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n, a_{n+1}.$$

18. Je hned vidět, že pokud bod $[x, y]$ nerovnici vyhovuje, vyhovují jí také body $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[y, x]$, $[-y, -x]$. To znamená, že hledaná množina je souměrná podle osy x, podle osy y, podle přímky $y = x$ a podle přímky $y = -x$. Stačí proto najít tu část množiny, kde pro souřadnice bodů platí

$$0 \leqq y \leqq x. \tag{1}$$

Za této podmínky bude mít nerovnice tvar

$$1 \leqq |x + y - (x - y)| \leqq 2,$$

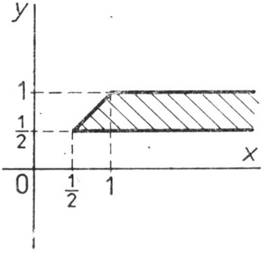
neboli

$$1 \leqq |2y| \leqq 2$$

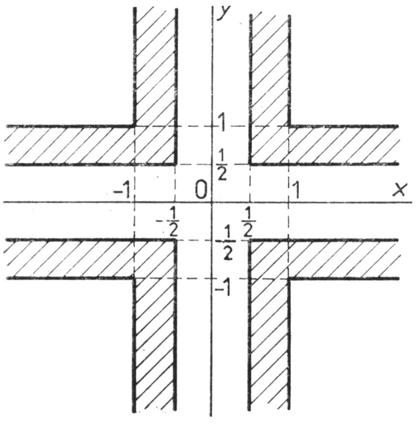
a vyhovují jí právě ty body, pro které platí

$$\tfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1. \tag{2}$$

Množina všech bodů vyhovujících nerovnicím (1) a (2) je znázorněna na obr. 4. Využijeme-li souměrností, o nichž jsme se zmínili, dostaneme celou hledanou množinu (obr. 5).



Obr. 4

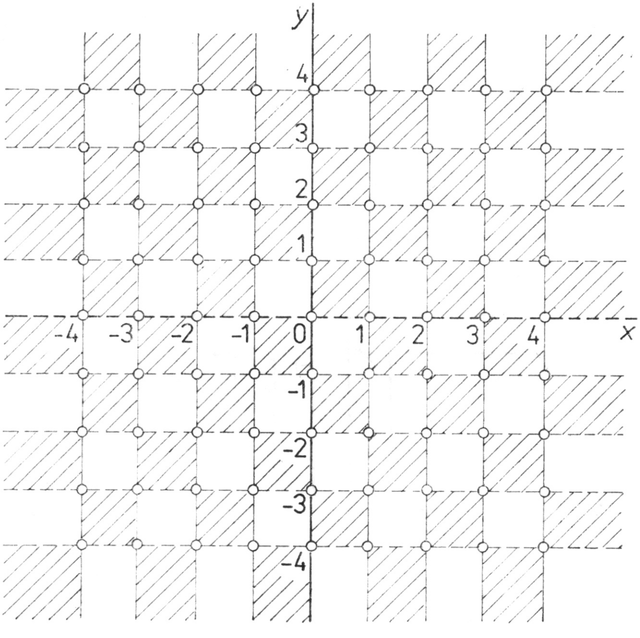


Obr. 5

19. Jednoduchou úpravou dáme nerovnici tvar

$$\frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)(x-3)}{(y+4)(y+3)(y+2)(y+1)\,y\,(y-1)(y-2)(y-3)} \cdot \frac{(x-4)}{(y-4)} \geqq 0.$$

Vidíme, že pro žádné $y \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ není levá strana definována (jmenovatel je nulový), a tedy



Obr. 6

žádný bod ležící na některé z devíti vodorovných přímek $y = -4$, $y = -3, \ldots, y = 4$ nerovnici nevyhovuje. Body ležící na devíti svislých přímkách $x = -4$, $x = -3, \ldots,$ $x = 4$, s výjimkou bodů už vyloučených, nerovnici vyhovují - levá strana je v nich nulová. Uvedených 18 přímek rozdělí rovinu na 100 částí, jejichž vnitřní body zbývá vyšetřit. Levá strana je v nich definována a je různá od nuly. Přitom pro všechny body uvnitř téže části má stejné znaménko, které se při přechodu k sousední části ve vodorovném nebo svislém směru změní. Hledaná množina má tedy »šachovnicový« tvar a vidíme ji na obr. 6.

20. Jmenovatele zlomků jsou nenulové pro $x \neq 0$. Odmocniny mají smysl, právě když současně

$$\frac{1 + x^2}{2x} + 1 \geqq 0, \quad \frac{1 + x^2}{2x} - 1 \geqq 0;$$

snadno zjistíme, že to nastane právě pro $x \geqq 0$. Funkce je tedy definována pro všechna $x > 0$.
Upravujme výraz definující funkci. Postupně dostaneme

$$y = \sqrt{x \frac{\sqrt{1 + x^2 + 2x} - \sqrt{1 + x^2 - 2x}}{\sqrt{1 + x^2 + 2x} + \sqrt{1 + x^2 - 2x}}} =$$

$$= \sqrt{x \frac{\sqrt{(1 + x)^2} - \sqrt{(1 - x)^2}}{\sqrt{(1 + x)^2} + \sqrt{(1 - x)^2}}} =$$

$$= \sqrt{x \frac{|1 + x| - |1 - x|}{|1 + x| + |1 - x|}}\,.$$

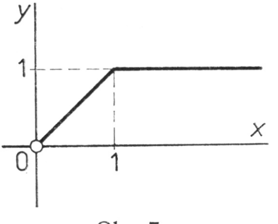
Abychom odstranili absolutní hodnoty, rozdělíme definiční obor na dvě části:
Pro $0 < x \leqq 1$ jde o funkci

$$y = \sqrt{x \frac{(1 + x) - (1 - x)}{(1 + x) + (1 - x)}} = \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

pro $x > 1$ o funkci

$$y = \sqrt{x \frac{(1 + x) + (1 - x)}{(1 + x) - (1 - x)}} = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1.$$

Graf funkce vidíme na obr. 7.



Obr. 7

21. V bodě $x = -1$ funkce nabývá hodnoty

$$a + b\,|1 + k| = 0 \tag{1}$$

a v bodě $x = 3$ hodnoty

$$3a + b|3 - k| = 0. \tag{2}$$

Odečteme-li od trojnásobku podmínky (1) podmínku (2), dostaneme

$$b(|3 - k| - 3|1 + k|) = 0. \tag{3}$$

Kdyby bylo $b = 0$, plynulo by z (1), že $a = 0$, a funkce by byla nulová; nenabývala by tedy hodnoty 2. Je tedy $b \neq 0$ a

$$|3 - k| = 3|1 + k|. \tag{4}$$

Snadno zjistíme, že podmínce (4) vyhovují jen $k = 0$ a $k = -3$. V případě $k = 0$ dostaneme z (1) $b = -a$ a funkce má tvar

$$y = a|x| - a|x - 0| = 0$$

a nenabývá hodnoty 2. V případě $k = -3$ dostaneme z (1) $a = -2b$ a funkce má tvar

$$y = -2b|x| + b|x + 3|.$$

Prozkoumáme průběh této funkce a určíme b tak, aby její největší hodnota byla 2.

Pro $x \leqq -3$ můžeme funkci psát

$$y = bx - 3b,$$

pro $-3 \leqq x \leqq 0$

$$y = 3bx + 3b$$

a pro $x \geqq 0$

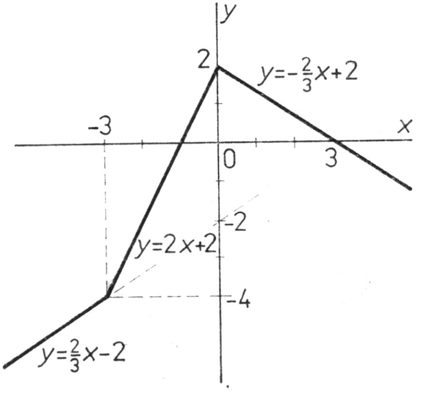
$$y = -bx + 3b.$$

Jak už víme, je $b \neq 0$. Kdyby bylo $b < 0$, nabývala by funkce pro dostatečně velká x hodnot větších než 2. Aby funkce vyhovovala podmínkám úlohy, musí tedy být $b > 0$. V tomto případě v intervalu $(-\infty, -3\rangle$ funkce dosahuje největší hodnoty $-6b$ v bodě $x = -3$, v intervalu $\langle -3, 0\rangle$ největší hodnoty $3b$ v bodě $x = 0$ a v intervalu $\langle 0, +\infty)$ největší hodnoty $3b$ v bodě $x = 0$. Aby byla největší hodnota dané funkce 2, musí tedy být $3b = 2$, tj. $b = \dfrac{2}{3}$. Pak je

$a = -2b = -\dfrac{4}{3}$ a hledaná funkce je

$$y = -\frac{4}{3}|x| + \frac{2}{3}|x + 3|.$$

Její graf je na obr. 8.



Obr. 8

22. Hledáme všechny trojice reálných koeficientů a, b, c tak, aby funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ splňovala danou podmínku, tj. aby

$$a(2x + 1)^2 + b(2x + 1) + c = 4a[(-x)^2 + b(-x) + c],$$

neboli

$$(4a + 6b)x + (a + b - 3c) = 0$$

pro každé reálné x. To nastane, právě když koeficienty a, b, c jsou řešením soustavy rovnic

$$4a + 6b = 0$$

$$a + b - 3c = 0.$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení; jsou to právě všechny trojice

$$a = 9t, b = -6t, c = t,$$

kde t probíhá všechna reálná čísla. Pro $t = 0$ však dostaneme $a = 0$, což nedává kvadratickou funkci.
Řešením úlohy jsou všechny kvadratické funkce tvaru $f(x) = t(9x^2 - 6x + 1)$, kde t je nenulové reálné číslo.

23. V bodě $x = 0$ nabývá funkce hodnoty

$$-1 \leqq c \leqq 1, \tag{1}$$

v bodě $x = 1$ hodnoty

$$-1 \leqq a + b + c \leqq 1 \tag{2}$$

a v bodě $x = -1$ hodnoty

$$-1 \leqq a - b + c \leqq 1. \tag{3}$$

Z (1) plyne, že

$$-2 \leqq -2c \leqq 2. \tag{4}$$

Sečteme-li nerovnosti (2), (3), (4), dostaneme

$$-4 \leqq 2a \leqq 4$$

neboli $|a| \leqq 2$.

Splňuje-li funkce $f(x) = 2x^2 + bx + c$ podmínku úlohy, platí pro koeficienty b, c nerovnosti

$$-1 \leqq c \leqq 1, \tag{1}$$

$$-1 \leqq 2 + b + c \leqq 1, \tag{5}$$

$$-1 \leqq 2 - b + c \leqq 1. \tag{6}$$

Sečteme-li nerovnosti (5) a (6), dostaneme

$$-3 \leqq c \leqq -1$$

a z (1) vidíme, že musí být $c = -1$. Z (5) a (6) pak dostaneme

$$-2 \leqq b \leqq 0,\ 0 \leqq b \leqq 2,$$

takže musí být $b = 0$ a podmínce může vyhovovat jedině funkce

$$f(x) = 2x^2 - 1.$$

Snadno zjistíme, že skutečně vyhovuje. Analogicky pro $a = -2$ vyhovuje jediná funkce

$$f(x) = -2x^2 + 1.$$

24. Ušetříme si práci, když si všimneme, že pro každou funkci z dané množiny platí

$$f(x) = f(-x)$$

pro každé reálné číslo x. Z toho totiž vyplývá, že funkce

$$f(x) = x^2 + b|x| + c$$

nabývá v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$ stejných hodnot jako funkce

$$g(x) = x^2 + bx + c$$

v intervalu $\langle 0,1\rangle$. Pochopitelně budeme raději pracovat s funkcí $g(x)$. Můžeme ji upravit na tvar

$$g(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Odtud vidíme, že pro uvažované funkce mohou nastat tři případy:

1. Je-li $-\dfrac{b}{2} \in (0,1)$, nabývá funkce $g(x)$ v intervalu $\langle 0,1\rangle$ nejmenší hodnoty v bodě $x = -\dfrac{b}{2}$, a to hodnoty $c - \dfrac{b^2}{4}$. Největší hodnoty pak nabývá v bodě $x = 0$, a to c, nebo v bodě $x = 1$, a to $b + c + 1$. Aby v tomto případě byla splněna podmínka úlohy, muselo by pro koeficienty b, c platit

$$-2 < b < 0, c - \frac{b^2}{4} = 1$$

a buď $c = 2$ nebo $b + c + 1 = 2$. Snadno zjistíme, že žádná dvojice reálných čísel b, c těmto podmínkám nevyhovuje.

2. Je-li $-\dfrac{b}{2} \leqq 0$, nabývá funkce $g(x)$ v intervalu $\langle 0,1\rangle$ nejmenší hodnoty v bodě $x = 0$ a největší hodnoty v bodě $x = 1$. Aby v tomto případě byla podmínka splněna, musí pro koeficienty b, c platit

$$b \geqq 0, c = 1, b + c + 1 = 2.$$

Vyhovují koeficienty $b = 0$, $c = 1$.

3. Je-li $-\dfrac{b}{2} \geqq 1$, nabývá funkce $g(x)$ v intervalu $\langle 0,1\rangle$ největší hodnoty v bodě $x = 0$ a nejmenší hodnoty v bodě $x = 1$. Aby v tomto případě byla podmínka splněna, musí pro koeficienty b, c platit

$$b \leqq -2, c = 2, b + c + 1 = 1.$$

Vyhovují koeficienty $b = -2$, $c = 2$.

Snadno se přesvědčíme, že obě nalezené funkce $g(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$ skutečně v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ nabývají nejmenší hodnoty 1 a největší hodnoty 2. Řešením úlohy jsou funkce $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

25. Nejprve si všimneme, že jmenovatel

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0,$$

takže funkce $f(x)$ je skutečně definována pro všechna reálná x. Vzhledem k tomu, že jmenovatel je kladný, je nerovnice

$$\left| \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2} \right| < 2$$

ekvivalentní nerovnici

$$|x^2 + 2px - 2| < 2(x^2 - 2x + 2),$$

tj. soustavě dvou nerovnic

$$x^2 + 2px - 2 < 2(x^2 - 2x + 2)$$

$$x^2 + 2px - 2 > -2(x^2 - 2x + 2),$$

neboli

$$x^2 - (2p + 4)x + 6 > 0$$

$$3x^2 + (2p - 4)x + 2 > 0.$$

Poslední soustava je splněna pro každé x, právě když oba diskriminanty

$$(2p + 4)^2 - 4.6 = 4(p + 2)^2 - 24,$$

$$(2p - 4)^2 - 4.3.2 = 4(p - 2)^2 - 24$$

budou záporné. Odtud dostaneme hledanou podmínku

$$2 - \sqrt{6} < p < 2 + \sqrt{6}.$$

26. Protože

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

je zlomek v absolutní hodnotě opravdu definován pro každé reálné x. Nerovnice z úlohy je ekvivalentní nerovnici

$$|2x^2 + x - 1| < a(x^2 - x + 1),$$

tj. soustavě nerovnic

$$2x^2 + x - 1 < a(x^2 - x + 1)$$

$$2x^2 + x - 1 > -a(x^2 - x + 1),$$

neboli

$$(a - 2)x^2 - (a + 1)x + (a + 1) > 0$$

$$(a + 2)x^2 - (a - 1)x + (a - 1) > 0.$$

Číslo $a = -2$ zřejmě úloze nevyhovuje (musí být $a > 0$). Ani číslo $a = 2$ nevyhovuje, protože pak první nerovnice soustavy má tvar

$$-3x + 3 > 0$$

a není splněna pro všechna reálná x. Soustavě nerovnic tedy vyhovují všechna reálná x, právě když současně

$$a - 2 > 0, a + 2 > 0$$

a oba diskriminanty

$$(a + 1)^2 - 4(a - 2)(a + 1) < 0,$$

$$(a - 1)^2 - 4(a + 2)(a - 1) < 0,$$

tj. právě když $a > 3$.

27. Připustíme, že rovnice má racionální kořen $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla. Po dosazení do rovnice a vynásobení číslem q^2 dostaneme

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

První dva členy jsou dělitelné číslem p, a protože p, q jsou nesoudělná čísla, jsou p, q^2 také nesoudělná čísla, takže koeficient c je dělitelný číslem p. Protože c je liché číslo, je i p liché číslo. Analogicky ukážeme, že q dělí koeficient a, a je tedy liché. Všechny tři sčítance jsou tedy liché a jejich součet nemůže být nula. Odvodili jsme spor.

28. Protože

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

je pro každá dvě celá čísla x, y rozdíl $f(x) - f(y)$ násobkem čísla $x - y$. Zvolme libovolné celé číslo k. Čísla $f(k) - f(m)$, $f(k) - f(m + 1)$, $f(k) - f(m + 2)$ jsou po řadě násobky čísel $k - m$, $k - m - 1$, $k - m - 2$. Protože $k - m$, $k - m - 1$, $k - m - 2$ jsou tři po sobě následující přirozená čísla, je právě jedno z nich násobkem tří a aspoň jedno z čísel $f(k) - f(m)$, $f(k) - f(m + 1)$, $f(k) - f(m + 2)$ je tedy násobkem tří. Předpokládáme-li, že čísla $f(m)$, $f(m + 1)$, $f(m + 2)$ jsou násobky tří, je tedy i $f(k)$ násobkem tří.

29. Rozložíme

$$p^4 - q^4 = (p^2 - q^2)(p^2 + q^2).$$

Obě prvočísla p, q jsou lichá, liché jsou tedy i jejich mocniny, oba činitelé $p^2 - q^2$, $p^2 + q^2$ jsou sudá čísla a $p^4 - q^4$ je proto dělitelné čtyřmi. Prozkoumáme ještě dělitelnost obou činitelů třemi a pěti. Uvědomme si, že dává-li číslo c při dělení číslem d zbytek z, číslo c^2 dává při dělení číslem d stejný zbytek jako dává číslo z^2. Při dělení třemi dávají čísla p, q zbytky 1 nebo 2 a čísla p^2, q^2 tedy jedině zbytek 1. Číslo $p^2 - q^2$ je tedy dělitelné třemi. Při dělení pěti dávají čísla p, q zbytky 1, 2, 3 nebo 4 a čísla p^2, q^2 zbytky 1 nebo 4; jsou-li zbytky u p^2, q^2 stejné, je $p^2 - q^2$ dělitelné pěti, jsou-li různé, je pěti dělitelné $p^2 + q^2$.

30. Činitelé součinu

$$k(k+1)\ldots(3k-3)$$

jsou $2k-2$ za sebou následujících přirozených čísel. Uvědomíme-li si, že mezi každými $2c$ za sebou následujícími přirozenými čísly jsou aspoň dva násobky čísla c, vidíme, že v případě $m < k$ obsahuje součin aspoň dva násobky čísla m. Zbývá případ $m = k$, kdy součin obsahuje činitele k, $2k$ (protože $k \geqq 3$, je $3k - 3 \geqq 2k$).

31. Dá-li se číslo N rozložit na součet

$$N = a + (a+1) + \ldots + (a+b), \tag{1}$$

kde a, b jsou přirozená čísla, dostaneme sečtením této rovnosti s rovností

$$N = (a+b) + (a+b-1) + \ldots + a$$

vztah

$$2N = (2a+b)(b+1).$$

Je-li b liché, je $2a + b$ liché. Je-li b sudé, je $b + 1$ liché. Číslo $2N$, a tedy i N, má, jak vidíme, aspoň jednoho lichého prvočinitele, a není proto mocninou čísla 2.
Předpokládejme, že číslo $N > 2$ není mocninou čísla 2. Má tedy aspoň jednoho lichého prvočinitele a číslo $2N$ můžeme rozložit na součin dvou činitelů p, q, z nichž jeden je

sudý, druhý lichý a každý z nich je větší než 1. Pokusíme se najít přirozená čísla a, b tak, aby platilo

$$p = b + 1, q = 2a + b.$$

Vyhovují čísla

$$b = p - 1, a = \frac{q - p + 1}{2}. \qquad (2)$$

Pokud zvolíme označení tak, aby $p \leqq q$, jsou takto zavedená čísla a, b skutečně přirozená. Číslo N pak můžeme rozložit na součet (1).

Při rozkladu čísla $N = 100$ na takový součet vyjdeme z rozkladu čísla $2N = 200$ na součin dvou činitelů různé parity. Tak např. ze součinu $200 = 8.25$ sestavíme podle (2)

$$b = 8 - 1 = 7, a = \frac{25 - 8 + 1}{2} = 9$$

a dostaneme rozklad (1)

$$100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16.$$

Vyjdeme-li ze součinu $200 = 5.40$, dostaneme $b = 4$, $a = 18$,

$$100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22.$$

32. Nejprve zjistíme, kolika přirozenými čísly je dělitelné číslo 9 000. Jeho rozklad na prvočinitele je

$$9\,000 = 2^6 \,.\, 3^2 \,.\, 5^6$$

a jeho přirození dělitelé jsou tedy právě všechna čísla tvaru $2^p . 3^q . 5^r$, kde $0 \leqq p \leqq 6$, $0 \leqq q \leqq 2$, $0 \leqq r \leqq 6$, je jich tedy $7.3.7 = 147$.

Označme je $a_1, a_2, \ldots, a_{147}$. Zvolme přirozené číslo n a zbytky po dělení čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{147}$ číslem n označme $z_1, z_2, \ldots, z_{147}$. Je-li $n < 147$, jsou mezi čísly $z_1, z_2, \ldots, z_{147}$ aspoň dvě stejná; označme je z_j, z_k. Rozdíl čísel a_j, a_k je pak dělitelný číslem n. Můžeme vzít $d_1 = a_j$, $d_2 = a_k$.

Zbývá prozkoumat čísla $147 \leqq n \leqq 150$. Pro $n = 147$ najdeme $d_1 = 150$, $d_2 = 3$, pro $n = 148$ $d_1 = 150$, $d_2 = 2$, pro $n = 149$ $d_1 = 150$, $d_2 = 1$ a pro $n = 150$ $d_1 = 300$, $d_2 = 150$.

33. Zkusíme najít takové přirozené číslo X, že dekadický zápis jeho 1977násobku končí na 1978. Číslice čísla X označme $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$, tj.

$$X = b_0 + 10b_1 + 100b_2 + 1000b_3 + \ldots$$

Číslo $X.1977$ má končit čtyřčíslím 1978. Číslo $b_0.7$ má tedy končit číslicí 8, takže musí být $b_0 = 4$. Číslo

$$(10b_1 + b_0).77 = (10b_1 + 4).77 = 770b_1 + 308$$

má končit dvojčíslím 78, takže musí být $b_1 = 1$. Číslo

$$(100b_2 + 10b_1 + b_0).977 = (100b_2 + 14).977 = \\ = 97\,700b_2 + 13\,678$$

má končit trojčíslím 978, takže musí být $b_2 = 9$. Číslo

$$(1000b_3 + 100b_2 + 10b_1 + b_0).1977 =$$

$$= (1000b_3 + 914).1977 = 1\,977\,000b_3 + 1\,806\,978$$

má končit čtyřčíslím 1978, takže musí být $b_3 = 5$. Existuje-li tedy hledané číslo X, končí čtyřčíslím 5 914, přičemž číslice vyšších řádů nemají vliv na poslední čtyřčíslí násobků čísla X. Hledaná čísla X jsou právě všechna přirozená čísla končící čtyřčíslím 5 914.

Jiné řešení.
Označme pro každé přirozené číslo n jako a_n $4n$-ciferné číslo

$$a_n = 19781978\ldots1978.$$

Ukážeme, že mezi prvními 1977 členy této posloupnosti je číslo dělitelné 1977. Předpokládejme, že takové číslo mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{1977}$ není. Pak jsou mezi nimi dvě čísla, která dávají po dělení číslem 1977 stejný zbytek, nechť jsou to a_i, a_k $(i < k)$. Označme $m = k - i$. Číslo

$$a_k - a_i = 1978\ldots1978.10^{4(k-i)} = a_m.10^{4m}$$

je dělitelné 1977. Protože 10^{4m} je nesoudělné s 1977, je a_m dělitelné 1977 a přitom $1 \leq m < 1977$, což je spor s naším předpokladem. (Tento důkaz umožňuje zobecnit dokazované tvrzení.)

34. Při dělení dvanácti mohou prvočísla dávat jen zbytky 1, 5, 7 nebo 11. Součin čísel, která při dělení dvanácti dávají zbytky 1 nebo 11, dává opět zbytek 1 nebo 11.

Po těchto předběžných úvahách zkonstruujeme požadované prvočíslo k libovolnému $k \geqq 7$. Součin všech prvočísel větších než 5 a menších než k označme s a uvažujme číslo $12s + 5$. V jeho rozkladu na prvočinitele musí být podle předběžných úvah prvočíslo p tvaru $12n + 5$ nebo $12n + 7$. Toto prvočíslo p není 5 (pak by s číslem $12s + 5$ dělilo i číslo s a to odporuje definici čísla s) a je větší než k (jinak by podle definice čísla s dělilo s a nedělilo by pak $12s + 5$). Vidíme, že p má požadované vlastnosti.

35. Je-li n hledané číslo, pak 2^n může končit buď číslicí 2, nebo číslicí 4.
Končí-li číslicí 2, má 2^n nanejvýš tři další nenulové číslice. Má-li jedinou, je to číslice 3 a 2^n má tvar $3 . 10^k + 2$. Nemůže být $k > 1$, to by 2^n bylo dělitelné čtyřmi a $3 . 10^k + 2$ ne. Je tedy $k = 1$ a $n = 5$ vyhovuje úloze. Má-li 2^n právě dvě další nenulové číslice, jsou to 1 a 2. Na místě desítek nemůže mít 2^n číslici 2 (spor s dělitelností čtyřmi), 1 (spor s dělitelností osmi) ani 0 (spor s dělitelností čtyřmi). Má-li 2^n právě tři další nenulové číslice, jsou to 1, 1, 1. Poslední možná trojčíslí jsou 002, 012, 102, 112. Prvé tři možnosti vedou opět ke sporu s dělitelností osmi. Čísla 1112, 10 112 nejsou mocniny čísla 2, a proto poslední možnost může být jen číslo končící na 00 112. To však není dělitelné číslem 32. Končí-li 2^n číslicí 4, má jedinou další nenulovou číslici, a to 1. Čísla 14 ani 104 nejsou mocniny čísla 2 a čísla končící trojčíslím 004 nejsou dělitelná osmi.
Závěr: Úloha má jediné řešení $n = 5$.

36. Pro každé dvě číslice A, B můžeme dané číslo napsat jako součet

$$23A5B6 = 230\,506 + 1000 . A + 10 . B.$$

Vzhledem k tomu, že 230 506 dává při dělení devatenácti zbytek 17, je dané číslo dělitelné devatenácti, právě když $1000 . A + 10 . B$ dává zbytek 2. Avšak 1000 dává zbytek 12, takže $1000 . A + 10 . B$ dává stejný zbytek jako $12 . A + 10 . B$. Protože 19 je prvočíslo, dává $12 . A + 10 . B$ zbytek 2, právě když $6 . A + 5 . B$ dává zbytek 1. Zbytky násobků šesti a pěti po dělení 19 jsou v tabulce:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$6t$	0	6	12	18	5	11	17	4	10	16
$5t$	0	5	10	15	1	6	11	16	2	7

Odtud vidíme, že vyhovují jedině kombinace číslic

$$A = 0, B = 4;$$

$$A = 3, B = 8;$$

$$A = 4, B = 3;$$

$$A = 7, B = 7;$$

$$A = 8, B = 2.$$

Úloze vyhovuje pět čísel: 230 546, 233 586, 234 536, 237 576 a 238 526.

37. Pravá strana nemůže být menší než $16 + 7.2 + 48 = 78$, a tedy musí být $x > 4$. Pak je levá strana násobkem čísla 16 a aby to platilo i pro pravou stranu, musí být $x \geqq 6$. V tomto případě můžeme rovnici zkrátit číslem 16, dostaneme

$$4^{x-3} + 7.2^{x-4} + 3 = x(x-1) \ldots 8.7.45.$$

Je-li $x > 7$, je na pravé straně sudé číslo a na levé liché, musí tedy být $x \leqq 7$. Zbývají jen dvě možnosti: $x = 6$ nebo $x = 7$. Zkouškou zjistíme, že vyhovuje jen $x = 7$.

38. Předpokládejme, že pro dvě přirozená čísla x, y platí

$$x^y = y^{x-y}. \tag{1}$$

Protože vlevo je přirozené číslo, je přirozené číslo i vpravo, a je proto exponent $x - y \geqq 0$. Pro základy je tedy $x \geqq y$, takže pro exponenty platí $y \leqq x - y$. Vydělíme-li rovnost (1) číslem y^y, dostaneme

$$\left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{x-2y}, \tag{2}$$

kde vpravo je přirozené číslo. Vlevo je proto také přirozené číslo, takže $x = ky$, kde k je přirozené číslo. Dosazením do (2) dostaneme

$$k^y = y^{(k-2)y}$$

a po odmocnění

$$k = y^{k-2}.$$

Tento vztah platí, jak snadno zjistíme, jen pro $k = 1$ a $y = 1$, $k = 3$ a $y = 3$, $k = 4$ a $y = 2$. Odpovídající dvojice jsou $x = 1$ a $y = 1$, $x = 9$ a $y = 3$, $x = 8$ a $y = 2$. Dosazením do dané rovnice se přesvědčíme, že všechny tyto dvojice jí vyhovují.

39. Mocniny čísla 2 rostou pomaleji než mocniny čísla 5, což signalizuje, že pro žádné řešení úlohy nebude $x \leqq y$. Skutečně, pro $x \leqq y$ je

$$|2^x - 10^y| = 10^y - 2^x = 2^x(2^{y-x}5^y - 1) \geqq 2(5 - 1) = 8.$$

Řešení nerovnice tedy můžeme najít jen pro dvojice $x > y$. Pro taková řešení platí

$$|2^x - 10^y| = 2^y|2^{x-y} - 5^y| \leqq 5,$$

odkud

$$|2^{x-y} - 5^y| \leqq \frac{5}{2^y} \leqq \frac{5}{2},$$

takže

$$|2^{x-y} - 5^y| = 1,$$

protože je to liché číslo. Je tedy buď

$$5^y + 1 = 2^{x-y}, \text{ nebo } 5^y - 1 = 2^{x-y}.$$

První případ nemůže nastat, protože číslo na levé straně končí dvojčíslím 06 nebo 26 a není dělitelné čtyřmi. Ve druhém případě rozložíme levou stranu

$$5^y - 1 = (5 - 1)(1 + 5 + \ldots + 5^{y-1}).$$

Je tedy

$$2^{x-y} = 4(1 + 5 + \ldots + 5^{y-1}).$$

Kdyby bylo $y \geqq 2$, byl by vpravo buď lichý počet členů, a tedy liché číslo, nebo nenulový počet členů, a tedy číslo dělitelné šesti, což není možné. V úvahu tedy přichází jen $y = 1$, čemuž odpovídá $x = 3$. Tato dvojice, jak se přesvědčíme dosazením, vyhovuje.

40. Protože $13^3 > 1979$, $5^5 > 1979$, dostaneme z první rovnice, že pro každou trojici vyhovující soustavě platí

$$x \leqq 12, y \leqq 12, z \leqq 4.$$

Z druhé rovnice ještě dostaneme

$$y^2 \leqq y^2 z = x,$$

a tedy

$$y \leqq 3.$$

Kdyby bylo $y = 1$, bylo by $x = z$ a

$$z^3(1 + z^2) = 1978,$$

což nesplňuje žádné $z \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Kdyby bylo $y = 2$, bylo by $x = 4z$ a

$$z^3(64 + z^2) = 1971,$$

což platí jen pro $z = 3$ a příslušná trojice by byla $x = 12$, $y = 2$, $z = 3$.
Kdyby bylo $y = 3$, bylo by $x = 9z$ a

$$z^3(729 + z^2) = 1952,$$

což nesplňuje žádné z.
Danou soustavu rovnic může tedy splňovat jen trojice 12, 2, 3, která skutečně vyhovuje.

Jiné řešení:
Dosadíme-li z druhé rovnice do první za z, dostaneme kvadratickou rovnici pro y^3

$$y^6z^3 + y^3 + z^5 - 1979 = 0.$$

Ta má v oboru reálných čísel řešení

$$y^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4z^3(z^5 - 1979)}}{2z^3}.$$

Dosazujeme-li sem za z hodnoty 1, 2, 3, 4, vyjde y přirozené jen pro $z = 3$ a to vede k trojici 12, 2, 3.

41. Jsou-li obě čísla

$$\frac{1 + x}{y}, \quad \frac{1 + y}{x} \tag{1}$$

celá, platí

$$|y| \leqq |1 + x|, \ |x| \leqq |1 + y|,$$

a odtud

$$|x| - 1 \leqq |1 + y| - 1 \leqq |y| \leqq |1 + x| \leqq |x| + 1.$$

Vyhovuje-li tedy dvojice $[x, y]$ požadavkům úlohy, platí pro ni

$$|x| - 1 \leqq |y| \leqq |x| + 1.$$

Může tedy nastat jen následujících šest případů:

I. $y = x$

Čísla (1) mají tvar

$$\frac{1+x}{x}, \quad \frac{1+x}{x}.$$

Kdyby bylo $|x| > 1$, čitatel by při dělení jmenovatelem x dával zbytek 1 a zlomky by nebyly celá čísla. Prozkoumáním všech možností $x = 1$, $x = -1$ najdeme dvojice $[1, 1]$, $[-1, -1]$.

II. $y = -x$

Čísla (1) mají tvar

$$\frac{1+x}{-x}, \quad \frac{1-x}{-x}$$

a podobně jako v I. musí být $|x| \leqq 1$. Zde najdeme další dvě dvojice $[1, -1]$, $[-1, 1]$.

III. $y = x + 1$

Čísla (1) mají tvar

$$\frac{1 + x}{1 + x}, \quad \frac{x + 2}{x}.$$

Aby byl druhý zlomek celé číslo, musí být $|x| \leqq 2$. Probráním všech možností najdeme tři dvojice $[-2, -1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$.

IV. $y = -x - 1$

Čísla (1) mají tvar

$$\frac{1 + x}{-1 - x}, \quad \frac{-x}{x}$$

a jsou to celá čísla pro všechna $x \neq 0$, $x \neq -1$. Dostáváme nekonečně mnoho dvojic ..., $[-4, 3]$, $[-3, 2]$, $[-2, 1]$, $[1, -2]$, $[2, -3]$, $[3, -4]$, ...

V. $y = x - 1$

Čísla (1) mají tvar

$$\frac{1 + x}{x - 1}, \quad \frac{x}{x}.$$

Aby byl první zlomek celé číslo, musí být $|x - 1| \leqq 2$. Najdeme tři dvojice $[-1, -2]$, $[2, 1]$, $[3, 2]$.

VI. $y = 1 - x$

Čísla (1) mají tvar

$$\frac{1 + x}{1 - x}, \quad \frac{2 - x}{x}.$$

Aby byl první zlomek celé číslo, musí být $|x - 1| \leqq 2$, pro druhý zlomek dostaneme podmínku $|x| \leqq 2$. Najdeme dvě dvojice $[-1, 2]$, $[2, -1]$.

42. Je-li $m = n$, je aritmetický i geometrický průměr roven m. Obě číslice průměru jsou tedy stejné. Úloze v tomto případě vyhovuje devět dvojic $[11, 11]$, $[22, 22]$, ..., $[99, 99]$. Je-li $m \neq n$ dvojice vyhovující úloze, platí pro číslice p, q

$$0 < p < 10, 0 < q < 10,$$

$$\frac{m + n}{2} = 10p + q, \quad \sqrt{mn} = 10q + p,$$

neboli

$$(m + n)^2 = 4(100p^2 + 20pq + q^2),$$

$$4mn = 4(100q^2 + 20pq + p^2).$$

Odečtením posledních dvou podmínek dostaneme

$$(m - n)^2 = 4.99(p^2 - q^2) = 4.9.11(p + q)(p - q).$$

Protože $m \neq n$, je $p > q$ (to plyne i z vlastností průměrů) a číslo na pravé straně je čtvercem přirozeného čísla. Buď $p + q$, nebo $p - q$ musí tedy být dělitelné číslem 11. Protože $p - q < 9$, $p + q < 19$, je $p + q = 11$. Dále musí být $p - q$ čtvercem přirozeného čísla a musí to být liché číslo, protože $p + q$ je liché. Jediná možnost je $p - q = 1$. Těmto podmínkám vyhovují jen číslice $p = 6$, $q = 5$. Pro čísla m, n má platit

$$\frac{m+n}{2} = 65, \ (m-n)^2 = 4.9.11^2 = 66^2.$$

Tyto podmínky splňuje jediná dvojice 98, 32. Jen ta může být řešením úlohy. Snadno se o tom přesvědčíme.

43. Rychlost malého člunu ve stojaté vodě označme c a hledanou vzdálenost d. Malému člunu trvá cesta k mostu a zpět celkem

$$\frac{d}{c+2} + \frac{d}{c-2} = 33.60 \text{ s} \tag{1}$$

a velkému člunu

$$\frac{d}{2c+2} + \frac{d}{2c-2} = 16.60 \text{ s}.$$

Je tedy

$$\frac{\dfrac{d}{c+2} + \dfrac{d}{c-2}}{\dfrac{d}{2c+2} + \dfrac{d}{2c-2}} = \frac{33}{16}$$

a po úpravě

$$\frac{4c^2-4}{2(c^2-4)} = \frac{33}{16}.$$

Odtud dostaneme $c = 10$ m/s a pak z (1) vyjde $d = 9\,904$ m.

44. Označme t_k dobu, která uplyne od startu do k-tého setkání cyklistů, v odhadovanou rychlost druhého cyklisty a s délku kruhové dráhy. První cyklista ujede první okruh za dobu $\frac{s}{6}$ a druhého cyklistu potká dvakrát, takže

$$t_2 \leqq \frac{s}{6} < t_3. \tag{1}$$

První dva okruhy ujede za dobu $\frac{2s}{6}$ a druhého cyklistu potká pětkrát, takže

$$t_5 \leqq \frac{2s}{6} < t_6. \tag{2}$$

První tři okruhy ujede za dobu $\frac{3s}{6}$ a druhého cyklistu potká sedmkrát, takže

$$t_7 \leqq \frac{3s}{6} < t_8. \tag{3}$$

Vzhledem k tomu, že k setkání nikdy nedošlo v místě startu, jsou všechna znaménka nerovností v (1), (2), (3) ostrá. Uvědomme si ještě, že při k-tém setkání ujeli oba cyklisté celkem vzdálenost

$$ks = 6t_k + vt_k,$$

odkud

$$t_k = \frac{ks}{6 + v}.$$

Dosadíme-li to do (1), (2) a (3), dostaneme

$$\frac{2s}{6+v} < \frac{s}{6} < \frac{3s}{6+v},$$

$$\frac{5s}{6+v} < \frac{2s}{6} < \frac{6s}{6+v},$$

$$\frac{7s}{6+v} < \frac{3s}{6} < \frac{8s}{6+v}$$

a po úpravě

$$6 < v < 12,$$

$$9 < v < 12,$$

$$8 < v < 10,$$

tj. $9 < v < 10$. Rychlost druhého cyklisty byla tedy mezi 9 a 10 m/s.

45. Počítáme-li každé pole tolikrát, v kolika vyznačených šachovnicích je obsaženo, je na 31 vyznačených šachovnicích celkem

$$S = 31 . 8 . 8 = 1984$$

polí.

Předpokládejme, že dokazované tvrzení neplatí, tj. že každé pole velké šachovnice patří nejvýše pěti vyznačeným šachovnicím. Některá pole v okolí rohů velké šachovnice ne-

4	3	2	1
		4	2
			3
			4

Obr. 9

mohou ležet dokonce ani v pěti vyznačených šachovnicích (na obr. 9 znamenají čísla počet různých šachovnic 8×8, v nichž leží příslušná pole šachovnice 20×20). Z našeho předpokladu dostáváme odhad

$$S \leqq 4(1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 3 + 4) + \\ + (400 - 4.8).5 = 1932$$

a to je spor.

Jiné řešení:

Na šachovnici 20×20 zaveďme přirozeným způsobem souřadnice polí a všimněme si polí o souřadnicích (8, 8), (8, 16), (16, 8) a (16, 16). Každá šachovnice 8×8 obsahuje, jak snadno zjistíme, právě jedno z nich. Některé z těchto čtyř polí tedy leží dokonce aspoň v osmi z 31 vyznačených šachovnic.

46. Každou figurku budeme počítat tolikrát, v kolika šachovnicích 4×4 stojí na diagonále, a celkový počet označíme S. Na obr. 10 je znázorněno, do diagonály kolika šachovnic 4×4 patří jednotlivá pole. Vidíme, že S je minimální, právě když jsou figurkami obsazena všechna pole

1	1	1	2	2	1	1	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	3	5	6	6	5	3	1
2	4	6	8	8	6	4	2
2	4	6	8	8	6	4	2
1	3	5	6	6	5	3	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	1	1	2	2	1	1	1

Obr. 10

s hodnotami 1, 2, 3 a ještě dvě pole s hodnotami 4. Pro jakékoli rozestavení figurek je tedy

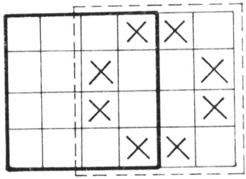
$$S \geqq 20.1 + 12.2 + 8.3 + 2.4 = 76.$$

Šachovnice 8×8 obsahuje právě 25 šachovnic 4×4. Kdyby každá měla na diagonálách nanejvýš tři figurky, bylo by

$$S \leqq 3.25 = 75$$

a to je spor.

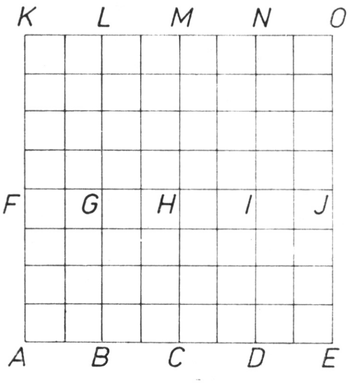
Jiné řešení:
Rozdělme šachovnici 8×8 na čtyři šachovnice 4×4. Na některé z nich musí být aspoň 11 figurek, takže obsahují aspoň čtyři diagonální pole nebo všech 8 nediagonálních polí. Ve druhém případě dostaneme šachovnici 4×4 s aspoň čtyřmi figurkami na diagonálních polích posunutím o dvě pole doprava nebo doleva (obr. 11).



Obr. 11

Jiné řešení (obr. 12):

Uvažujme následujících šest šachovnic 4×4: *ACHF*, *BDIG*, *CEJH*, *FHMK*, *GINL*, *HJOM*. Každé pole šachovnice *AEOK* leží buď v diagonále jediné z uvedených šesti šachovnic (48 polí), nebo žádné (16 polí). Na diagonálních polích uvedených šesti šachovnic stojí tedy aspoň 42 — — 16 = 26 figurek. Aspoň pro jednu šachovnici 4×4 tedy platí, že na jejích diagonálních polích stojí aspoň pět figurek.



Obr. 12

47. Označme S počet figurek stojících na šachovnici 1000×1000, přičemž každou budeme počítat tolikrát, na obvodu kolika šachovnic 8×8 stojí. Abychom se vyhnuli komplikacím u okraje šachovnice 1000×1000, omezíme se na prostředních 986^2 polí - každé z nich leží na obvodu právě 28 různých šachovnic 8×8. Okrajových polí je $1000^2 - 986^2$ a na prostředních polích stojí tedy aspoň $800\,000 - (1000^2 - 986^2)$ figurek. Označíme-li S_1 počet figurek na prostředních polích i s násobností, dostaneme

$$S \geqq S_1 \geqq (800\,000 - (1000^2 - 986^2)).28.$$

Šachovnice 1000×1000 obsahuje právě 993^2 různých šachovnic 8×8. Kdyby na obvodu každé z nich stálo nanejvýš 21 figurek, bylo by

$$S \leqq 993^2.21$$

a to je, jak snadno spočteme, spor.
(Poznamenejme, že kdybychom se neomezili jen na prostřední pole, byl by odhad pracnější, ale přesnější. Mohli bychom tak dokázat, že na obvodu nějaké šachovnice 8×8 stojí aspoň 23 figurky.)

48. a) Vzhledem ke komutativitě sčítání a násobení reálných čísel je zřejmé, že

$$x * y = y * x$$

pro každá dvě reálná čísla x, y a operace je komutativní. Abychom zjistili asociativnost operace, porovnáme $(x * y) * z$ s $x * (y * z)$:

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z = x + y + xy + z +$$

$$+ (x + y + xy) z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz,$$

$$x * (y * z) = x + (y * z) + x(y * z) =$$

$$= x + y + z + yz + x(y + z + yz) = x + y +$$

$$+ z + xy + xz + yz + xyz.$$

Operace $*$ je tedy komutativní a asociativní. Neutrálním prvkem může být jen takové reálné číslo e, že pro všechna x platí

$$e * x = x * e = x,$$

neboli

$$x + e + xe = x,$$

tj.

$$e(1 + x) = 0.$$

Tuto podmínku splňuje jedině číslo $e = 0$, které je skutečně neutrálním prvkem.

b) Převedeme-li si rovnici s operací $*$ na rovnici se sčítáním a násobením, dostaneme po úpravě rovnici

$$(a + 1)x^2 + (2a - b + 1)x + (a - b) = 0.$$

Je-li $a = -1$, jde o lineární rovnici

$$(-b - 1)x + (-b - 1) = 0.$$

Té vyhovuje v případě $b = -1$ každé reálné číslo x a v případě $b \neq -1$ jedině $x = -1$.
Je-li $a \neq -1$, má kvadratická rovnice diskriminant

$$(2a - b + 1)^2 - 4(a + 1)(a - b) = (b + 1)^2.$$

V případě $b = -1$ má jediný kořen -1 a v případě $b \neq -1$ dva kořeny $\dfrac{b - a}{a + 1}$, -1.

49. Máme dokázat, že pro každou trojici přirozených čísel x, y, z platí

$$(xy) * z = (x * z)(y * z).$$

Snadno se přesvědčíme, že rovnost je splněna v případě, kdy je některé z čísel x, y, z rovno 1.
Zbývá ověřit rovnost v případě, kdy všechna tři čísla x, y, z jsou větší než jedna. Jsou-li jejich rozklady na součin prvočinitelů

$$x = p_1 \dots p_a,\ y = q_1 \dots q_b,\ z = r_1 \dots r_c,$$

má číslo xy rozklad

$$xy = p_1 \dots p_a \cdot q_1 \dots q_b$$

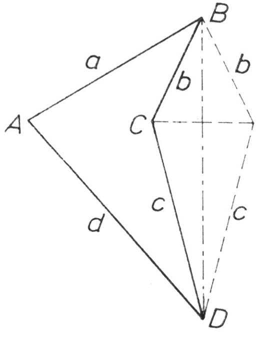
a na levé straně dokazované rovnosti je tedy součin všech $(a + b)c$ činitelů $p_i + r_k$, $q_j + r_k$ ($i \in \{1, \dots, a\}$, $j \in \{1, \dots, b\}$,

$k \in \{1, \ldots, c\}$). Na pravé straně je součin všech ac činitelů $p_i + r_k$ ($i \in \{1, \ldots, a\}$, $k \in \{1, \ldots, c\}$) násobený součinem všech bc činitelů $q_i + r_k$ ($i \in \{1, \ldots, b\}$, $k \in \{1, \ldots, c\}$), což je totéž.

50. Nejprve se budeme zabývat množinou C všech celých čísel. Není těžké uhádnout, že podmínkám úlohy vyhovují např. podmnožiny $A = S$, $B = L$, kde S je množina všech sudých čísel a L množina všech lichých čísel.
Abychom dokázali, že je to jediné řešení, nejprve si uvědomíme, že vyhovují-li nějaké dvě podmnožiny A, B úloze, jsou disjunktní. Předpokládejme, že pro nějaké celé číslo p by platilo $p \in A \cap B$. Jakékoli celé číslo c můžeme psát jako $c = p + (c - p)$. Je-li pak $c - p \in A$, vzhledem k tomu, že $p \in A$, je $c \in A$ a vzhledem k tomu, že $p \in B$, je $c \in B$, takže $c \in A \cap B$. I v případě $c - p \in B$ dojdeme k tomu, že $c \in A \cap B$, tj. $C \subset A \cap B$, tedy $A = B = C$. Z předpokladu $A \cap B \neq \emptyset$ jsme odvodili spor s podmínkou úlohy.
Jsou-li A, B nějaké dvě podmnožiny splňující podmínky úlohy, je $S \subset A$. Skutečně, libovolné sudé číslo s můžeme psát jako součet dvou stejných celých čísel $s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2}$, takže $s \in A$.
Podmnožina B tedy obsahuje jen lichá čísla (A, B jsou disjunktní), a to aspoň jedno (je neprázdná). Nechť např. $k \in B$ a zvolme si libovolné liché číslo l. To můžeme psát jako $l = k + m$, kde m je sudé, tj. $m \in A$. Je tedy $l \in B$ a vidíme, že $L \subset B$. Vzhledem k tomu, že $A \cup B = C$, je $A = S$, $B = L$.
Závěrem ukážeme, že když množinu C nahradíme množinou R všech reálných čísel, úloha nemá řešení. Kdyby podmnožiny A, B vyhovovaly v tomto případě požadavkům úlohy, byly

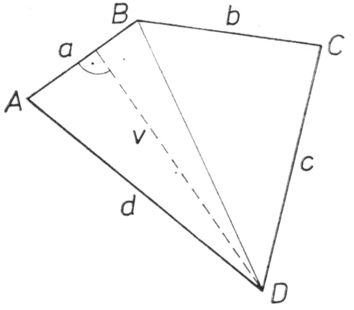
by disjunktní. To je vidět analogicky jako v případě celých čísel. Také by bylo $A = R$, což lze odvodit analogicky jako $A = S$ v případě celých čísel. Bylo by tedy $B = \emptyset$ a to odporuje jedné z podmínek úlohy.

51. Nechť je $ABCD$ čtyřúhelník daného obvodu $4p$, velikosti jeho stran AB, BC, CD a DA označíme a, b, c, d a jeho obsah P. Není-li čtyřúhelník $ABCD$ konvexní (obr. 13),



Obr. 13

existuje konvexní čtyřúhelník se stejně velkými stranami, jehož obsah je větší než P. Najdeme-li mezi všemi konvexními čtyřúhelníky daného obvodu čtyřúhelník s největším obsahem, bude to též čtyřúhelník s maximálním obsahem mezi všemi, i nekonvexními čtyřúhelníky daného obvodu. Nic se tedy nestane, budeme-li předpokládat, že čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní. Matematikové říkají, že »bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní«. Pro takový čtyřúhelník je jeho obsah P roven součtu obsahů

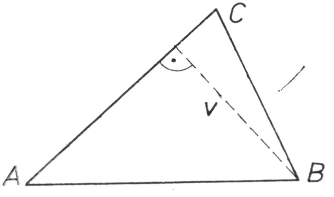


Obr. 14

trojúhelníků ABD a BCD (obr. 14). Obsah trojúhelníku ABD se rovná polovičnímu součinu av, kde v je velikost výšky v trojúhelníku ABD, příslušné k straně AB. Je $v \leqq d$ a rovnost nastane právě tehdy, když jsou strany AB a AD na sebe kolmé. Je proto $2P \leqq ad + bc$, přičemž znaménko rovnosti platí v této nerovnosti právě tehdy, když je $AB \perp AD$ a současně $BC \perp CD$. Obdobně bychom dostali $2P \leqq ab + cd$ s rovností pouze pro $AB \perp BC$ a zároveň $CD \perp DA$. Sečtením posledních dvou nerovností dostaneme $4P \leqq (a + c)(b + d)$ a znaménko rovnosti platí pouze pro pravoúhelníky. Dále již víme, že ze všech pravoúhelníků daného obvodu má největší obsah čtverec. Složením těchto dvou úvah dostáváme konečný výsledek: ze všech čtyřúhelníků daného obvodu má největší obsah čtverec.

52. Nechť trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Zvolme označení jeho vrcholů tak, že pouze strana AB je větší než 6 cm, tedy $|BC| \leqq 6$, $|AC| \leqq 6$. Pak platí pro obsah P trojúhelníku ABC (obr. 15)

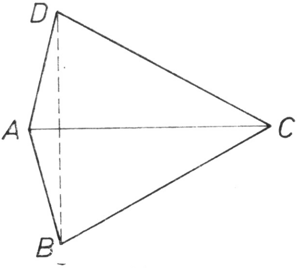
$$P = \tfrac{1}{2}\,|AC|\,v \leqq \tfrac{1}{2}\,|AC|\,.\,|BC| \leqq \tfrac{1}{2}\,(6.6) = 18.$$



Obr. 15

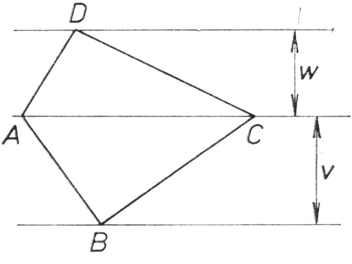
Protože v našem případě je $P = 18$, musí ve všech uvedených nerovnostech platit znaménko rovnosti. Musí tedy být $v = |BC|$, tj. trojúhelník ABC musí být nutně pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, a dále musí platit $|AC| = |BC| = 6$. Pak je trojúhelník ABC pravoúhlý a rovnoramenný s odvěsnami délky 6 cm, jeho přepona má délku $6\sqrt{2}$ cm a je to jeho jediná strana, která je delší než 6 cm. Protože jeho obsah je 18 cm^2, vyhovuje všem podmínkám úlohy a je to jediný trojúhelník požadovaných vlastností.

53. Úloha nežádá sestrojit všechny čtyřúhelníky požadovaných vlastností, stačí sestrojit některý, například deltoid $ABCD$, souměrný podle úhlopříčky AC (obr. 16), pro který je $|AC| = 10$, $|AB| = |AD| = 5$ a vzdálenost bodů B, D od přímky AC je větší než 4,9 a menší než 5. Čtenáře však možná napadne otázka, jak nalézt toto nebo některé další řešení úlohy. Můžeme postupovat asi takto: nechť v čtyř-



Obr. 16

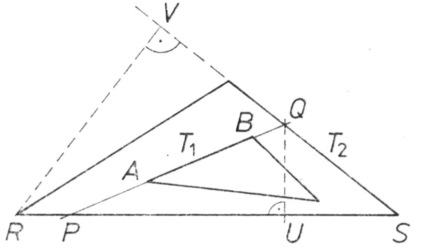
úhelníku $ABCD$ je součet délek úseček AB, AC, AD roven 20. Pokusíme se odhadnout shora jeho obsah P. Můžeme předpokládat, že body B, D leží v opačných polorovinách ohraničených přímkou AC, jinak bychom nahradili bod B bodem souměrně sdruženým podle přímky AC, čímž bychom obsah čtyřúhelníku $ABCD$ zvětšili. Pak se P rovná součtu obsahů trojúhelníků ACB a ACD. Označme v, w velikosti výšek v těchto trojúhelnících, příslušných společné základně AC. Je tedy $2P = |AC|\,(v + w)$, a protože $v \leqq |AB|$, $w \leqq |AD|$, máme $2P \leqq |AC|(|AB| + |AD|) = |AC|(20 - |AC|) = 100 - (10 - |AC|)^2 \leqq 100$, tudíž $P \leqq 50$. Vidíme, že úloha by neměla řešení, kdyby měl být obsah čtyřúhelníku $ABCD$ větší než 50 cm². Kdyby mělo platit $P = 50$, muselo by být $|AC| = 10$ a zároveň $v = |AB|$, $w = |AD|$. To by však musely být obě přímky AB, AD na přímku AC kolmé. Pak by ležely body B, A, D na jedné přímce, body A, B, C, D by netvořily čtyřúhelník. Úloha tudíž nemá řešení ani v případě $P = 50$. Protože podle zadání úlohy je $P > 49$, musí být $98 < 2P < 100 - (10 - |AC|)^2$, odkud plyne $(10 - |AC|)^2 < 2$, tedy $10 - \sqrt{2} < |AC| < 10 + \sqrt{2}$. Vidíme, že se velikost úhlopříčky AC nemůže příliš lišit od hodnoty 10. Při volbě bodů A, C tak, aby velikost $|AC|$ byla z uvedeného intervalu, volíme dále hodnoty v, w tak, aby platilo $\frac{98}{|AC|} < v + w < 20 - |AC|$, což lze, protože je $\frac{98}{|AC|} < 20 - |AC|$. Ve vzdálenostech v, w vedeme rovnoběžné přímky s přímkou AC, a to tak, aby ležely v opačných polorovinách ohraničených přímkou AC (obr. 17). Na první



Obr. 17

zvolíme bod B a na druhé bod D tak, aby $|AB| \geqq v$, $|AD| \geqq w$, $|AB| + |AD| = 20 - |AC|$. To opět lze, protože je $v + w < 20 - |AC|$ a z téhož důvodu bude alespoň jedna z nerovností $|AB| \geqq v$, $|AD| \geqq w$ ostrá. Můžeme dokonce volit body B, D tak, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ konvexní. Kdybychom volili $|AC| = 10$, $v = w = 4{,}95$ a $|AB| = |AD| = 5$, dostali bychom deltoid, jaký jsme uvedli na začátku.

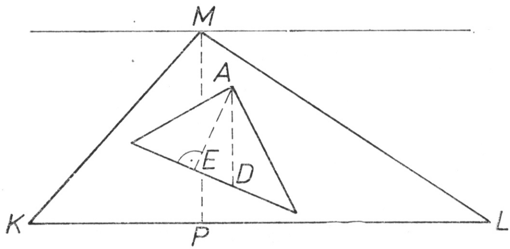
54. Zvolme libovolnou stranu AB trojúhelníku T_1. Je-li úsečka AB částí některé strany trojúhelníku T_2, je délka úsečky AB nejvýše rovna velikosti této strany trojúhelníku T_2. V opačném případě prodloužíme úsečku AB na úsečku PQ, jejíž krajní body P, Q leží na hranici trojúhelníku T_2 (obr. 18). Je pak $|AB| \leqq |PQ|$. Označme U patu kolmice



Obr. 18

vedené bodem Q k té straně trojúhelníku T_2, na které leží bod P. Alespoň jeden krajní bod R této strany má od bodu U vzdálenost větší nebo stejnou než bod P. Pak je $|PQ| \leqq |RQ|$. Bodem R vedeme kolmici k té straně trojúhelníku T_2, na které leží bod Q, patu kolmice označíme V. Alespoň jeden krajní bod S strany trojúhelníku T_2, na které leží bod Q, nemá od bodu V vzdálenost menší než bod Q, tj. platí tedy $|SV| \geqq$ $\geqq |QV|$. Pak je $|RS| \geqq |RQ| \geqq |PQ| \geqq |AB|$. Kdyby bod P nebo Q byl vrcholem trojúhelníku T_2, mohli bychom ho vzít za bod R nebo S, a tím celý postup zkrátit. V každém případě jsme však dokázali, že libovolná strana trojúhelníku T_1 je menší nebo nejvýše rovna délce některé strany trojúhelníku T_2. Pak je též každá strana trojúhelníku T_1 menší nebo rovna nejdelší straně trojúhelníku T_2, a protože to platí pro každou stranu trojúhelníku T_1, platí to i o jeho nejdelší straně, což jsme měli dokázat.

Nechť je nyní KL libovolná strana trojúhelníku T_2 a P pata výšky vedené třetím vrcholem M trojúhelníku T_2 na stranu KL. Pak leží celý trojúhelník T_2 v pásu ohraničeném přímkou KL a přímkou s ní rovnoběžnou, vedenou bodem M (obr. 19). Vrcholy trojúhelníku T_1 vedeme nyní přímky rovno-



Obr. 19

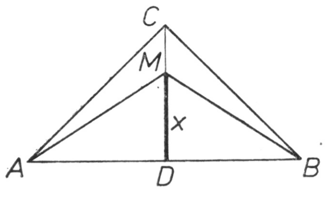
běžné s přímkou PM. Aspoň jedna z nich protíná protější stranu trojúhelníku T_1. Nechť je to například ta, která prochází vrcholem A, průsečík s protější stranou označíme D. Body A, D patří trojúhelníku T_1, a tím i trojúhelníku T_2, proto je $|PM| \geqq |AD|$. Dále je $|AD| \geqq |AE|$, kde je E pata výšky trojúhelníku T_1, procházející bodem A. Máme tedy $|MP| \geqq |AE|$, každá výška trojúhelníku T_2 je tedy větší nebo nejvýše rovna některé výšce trojúhelníku T_1. Odtud plyne, že každá výška trojúhelníku T_2 je větší nebo rovna nejmenší výšce trojúhelníku T_1. A protože toto tvrzení platí pro každou výšku trojúhelníku T_2, platí i pro jeho nejmenší výšku. Tím je dokázána i druhá část tvrzení úlohy.

55. Nechť je v nejmenší výška trojúhelníku ABC. Označení vrcholů zvolíme tak, aby v byla výška k straně AB, která je pak největší stranou trojúhelníku ABC. Proto je protější vnitřní úhel γ největším vnitřním úhlem trojúhelníku ABC, tedy $\gamma \geqq 60°$. Sestrojme v polorovině ABC bod D tak, aby byl trojúhelník ABD rovnostranný a opišme trojúhelníku ABD kružnici. Protože je $\gamma \geqq 60°$, leží bod C ve vnitřní oblasti této kružnice. Proto není jeho výška větší než výška rovnostranného trojúhelníku ABD, tj. $v \leqq |AB|\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vynásobíme-li tuto nerovnost číslem v, dostaneme $v^2 \leqq P\sqrt{3}$, kde P je obsah trojúhelníku ABC a poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností $v \leqq \sqrt{P\sqrt{3}}$, kterou jsme měli dokázat. Rovnost platí právě tehdy, když je $D = C$, tedy když je trojúhelník ABC rovnostranný.

56. Položme $|DM| = x$, pak je $|CM| = 1 - x$, a tedy $|AM| + |BM| + |CM| = 1 - x + 2\sqrt{1 + x^2}$ (obr. 20). Máme dokázat, že $1 - x + 2\sqrt{1 + x^2} \geqq 1 + \sqrt{3}$ pro všechna x z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokazovanou nerovnost postupně upravíme na ekvivalentní nerovnosti

$$2\sqrt{1 + x^2} \geqq \sqrt{3} + x$$



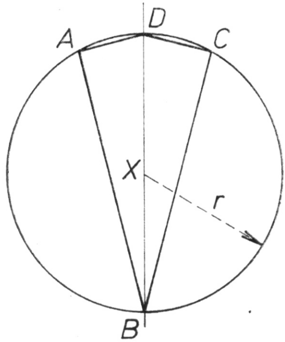
Obr. 20

$$3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \geqq 0$$

$$3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geqq 0.$$

Poslední nerovnost je splněna dokonce pro každé reálné číslo x, tím je nerovnost úlohy dokázána. Zároveň vidíme, že znaménko rovnosti platí v poslední, a tím i v dokazované nerovnosti právě tehdy, když je $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. V tom případě je $|AD| : |DM| = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 1 = \operatorname{tg} 60°$. Bod M sestrojíme tak, aby $\sphericalangle MAD = 30°$.

57. Označme Y průsečík přímek AX, CD. Je $|AX| + |XY| < |AD| + |DY|$ (protože $|AX| + |XY| = |AY|$), $|BX| < |BD|$, $|CX| < |CY| + |YX|$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat. Prochází-li přímka AX bodem C, je $Y = C$, poslední z uvedených tří nerovností sice neplatí, ale dokazovaná nerovnost je součtem prvních dvou, a tedy platí. Protíná-li přímka AX vnitřek úsečky BC, nerovnost v textu úlohy už nemusí platit. Kdyby bod X splynul s bodem B, bylo by $|AX| + |BX| + |CX| = |AB| + |BC|$. Zvolme proto čtyřúhelník, pro který je $|AB| + |BC| > |AD| + |BD| + |CD|$. Stačí zvolit body A, C, D tak, aby AD, CD byly malé ve srovnání s $|AB|$, $|BC|$. Zvolme například deltoid vepsaný kružnici o poloměru r, pro který je $|AD| = |CD| < \frac{r}{2}$, a za bod X zvolme střed

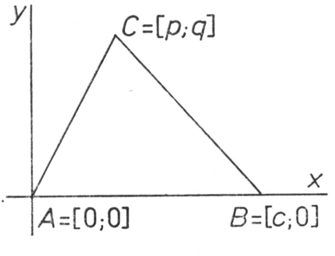


Obr. 21

kružnice (obr. 21). Je pak $|AX| + |BX| + |CX| = 3r$, $|AD| + |BD| + |CD| < 3r$. To tedy znamená, že nerovnost v zadání úlohy obecně neplatí, jestliže přímka AX neprotíná úsečku CD.

58. Nechť je X libovolný bod obdélníku $ABCD$. Označme x jeho vzdálenost od přímky AD a y jeho vzdálenost od přímky AB. Pak je jeho vzdálenost od strany CD rovna $b - y$ a od strany BC rovna $a - x$. Dále je $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + y^2 + x^2 + (b - y)^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 = a^2 + b^2 + (2x - a)^2 + (2y - b)^2$. Odtud je ihned vidět, že součet druhých mocnin vzdáleností bodu X od vrcholů obdélníku je vždy roven alespoň hodnotě $a^2 + b^2$ a této hodnotě se uvažovaný součet rovná právě tehdy, když je bod X středem obdélníku. Snad bychom ještě měli dodat, že tvrzení platí i v případě čtverce.

59. Úlohu je nejlépe řešit analyticky. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby počátek splynul s bodem A, bod B ležel



Obr. 22

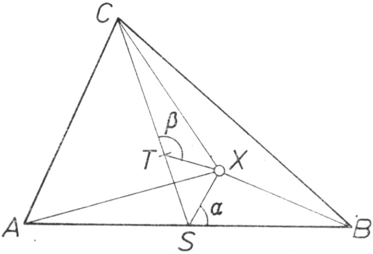
na kladné poloose x a bod C ležel v polorovině $y > 0$ (obr. 22), tedy $A = [0, 0]$, $B = [c, 0]$, $C = [p, q]$, přičemž $p^2 + q^2 = b^2$, $(p - c)^2 + q^2 = a^2$. Nechť $X = [x, y]$, pak je $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = x^2 + y^2 + (x - c)^2 + y^2 + (x - p)^2 + (y - q)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2x(c + p) - 2qy + c^2 + p^2 + q^2$. Tento výraz upravíme na tvar

$$3\left[\left(x - \frac{c + p}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{3}\right)^2\right] + \frac{2}{3}(p^2 + q^2 + c^2 - pc).$$

Je vidět, že uvažovaný součet je nejmenší v případě $x = \frac{c + p}{3}$, $y = \frac{q}{3}$, tedy právě tehdy, když je bod X totožný s těžištěm trojúhelníku ABC, protože první, resp. druhá, souřadnice těžiště trojúhelníku je aritmetickým průměrem prvních, resp. druhých souřadnic vrcholů trojúhelníku. Všimněme si, že jsme ani nepoužili předpokladu, že bod X je bodem trojúhelníku ABC. Dokázali jsme tedy, že těžiště trojúhelníku má ze všech bodů roviny ABC nejmenší součet druhých mocnin vzdáleností od vrcholů trojúhelníku. Ještě musíme tento nejmenší součet vyjádřit pomocí velikostí stran trojúhelníku. Je

$$2\,\frac{p^2 + q^2 + c^2 - pc}{3} = \frac{p^2 + q^2 + (p - c)^2 + q^2 + c^2}{3} =$$

$= \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$. Pro těžiště je tedy uvažovaný součet roven jedné třetině součtu druhých mocnin délek stran trojúhelníku.



Obr. 23

Uveďme ještě jeden postup, který místo analytické geometrie používá pouze kosinovou větu. Označme S střed strany AB a T těžiště trojúhelníku ABC (obr. 23). Je pak

$$|AX|^2 = |AS|^2 + |SX|^2 + 2\,|AS||SX| \cos \alpha,$$

$$|BX|^2 = |BS|^2 + |SX|^2 - 2\,|BS||SX| \cos \alpha,$$

protože $\cos (180° - \alpha) = - \cos \alpha$.

Dále máme

$$|CX|^2 = |CT|^2 + |TX|^2 - 2\,|CT||TX| \cos \beta,$$

$$2\,|SX|^2 = 2\,|TS|^2 + 2\,|TX|^2 + 4\,|ST||TX| \cos \beta.$$

Sečtením všech čtyř rovnic dostáváme užitím vztahů $|CT| = 2\,|ST|$, $|CS| = 3\,|ST|$ rovnost

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 + \frac{2\,|CS|^2}{3} + 3\,|TX|^2.$$

Podobně dostaneme

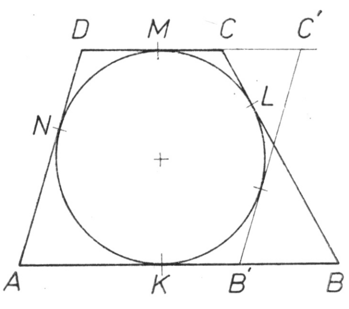
$$2\,|CS|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2\,|AS|^2$$

a po dosazení do poslední rovnice máme

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = 3\,|TX|^2 + \frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2}{3}.$$

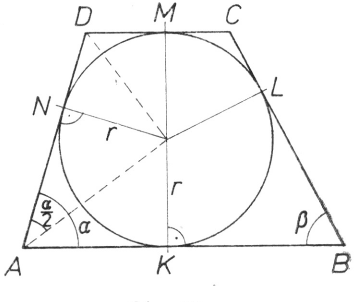
Odtud je vidět, že součet na levé straně je nejmenší, když bod X splývá s těžištěm T trojúhelníku a rovná se pak jedné třetině součtu $a^2 + b^2 + c^2$, kde a, b, c jsou velikosti stran trojúhelníku.

60. Lichoběžník $ABCD$ je tečnový (obr. 24). Porovnejme lichoběžník s kosočtvercem $AB'C'D$, opsaným téže kružni-



Obr. 24

ci k. Body dotyku stran lichoběžníku s kružnicí k označíme K, L, M, N. Můžeme předpokládat, že základna AB je větší než základna CD, jinak bychom pouze změnili označení vrcholů lichoběžníku. Je pak $|KB'| < |KB|$, $|MC'| > |MC|$. Dále platí $|BC| = |BL| + |CL| = |BK| + |CM|$, a proto je $|BC| < |BK| + |MC'| = |BK| + |AK| = |AB|$, $|BC| >$ $> |KB'| + |CM| = |DM| + |CM| = |CD|$ a současně $|CD| < |C'D| = |AD| = |AB'| < |AB|$. Jsou tedy obě dvě ramena AD, BC lichoběžníku $ABCD$ menší než větší základ-



Obr. 25

na AB a větší než menší základna CD, což jsme měli dokázat.

Jiný důkaz: Označme r poloměr kružnice k, α úhel DAB, β úhel CBA (obr. 25). Pak je $\sphericalangle ADC = 180° - \alpha$, $\sphericalangle DCB = 180° - \beta$, $|AK| = |AN| = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$, $|DN| = |DM| = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $|CM| = |CL| = r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $|BL| = |BK| = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$, a tedy

$$|AB| = r \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\right),$$

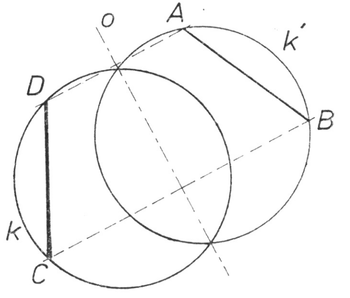
$$|CD| = r \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right),$$

$$|AD| = r \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$|BC| = r \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\right).$$

Protože je $ABCD$ lichoběžník, je $\alpha + \beta \neq 180°$, a tudíž $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \neq \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$. Je-li $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, je $\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, a tudíž $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} < \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, tj. $|AB| < |AD| < |CD|$ a zároveň $|AB| < |BC| < |CD|$. Obdobně bychom postupovali v případě $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} > \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$.

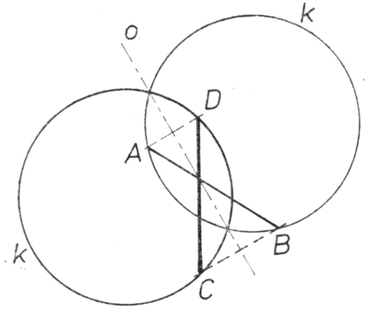
61. Předpokládejme, že body C, D na dané kružnici k (obr. 26) tvoří s body A, B rovnoramenný lichoběžník se základnami BC, AD. Označme o osu tohoto lichoběžníku a k' kružnici souměrně sdruženou ke kružnici k podle osy o.



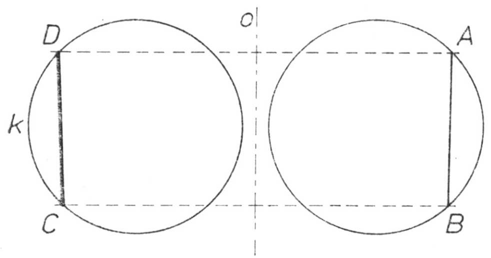
Obr. 26

Kružnice k' prochází body A, B a má stejně velký poloměr r jako kružnice k. Odtud vychází konstrukce úlohy. Sestrojíme kružnici k' o poloměru r (r je poloměr kružnice k), která prochází body A, B. Dále sestrojíme osu o souměrnosti kružnic k, k' a k bodům A, B body D, C souměrně sdružené podle osy o. Musíme však nyní ověřit, zda obdržené body C, D splňují podmínky úlohy. Podle jejich konstrukce je $|AB| = |CD|$ a $AD \| BC$. Přesto netvoří body A, B, C, D rovnoramenný lichoběžník, jestliže nastane některá z těchto situací:

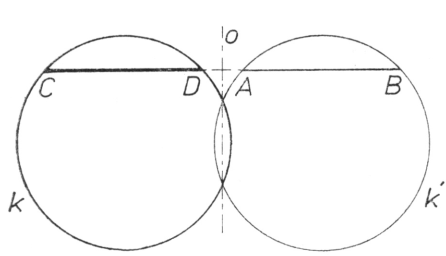
a) Úsečky AB, CD mají společný bod (obr. 27). Tento případ nastane právě tehdy, když má osa o společný bod s úsečkou AB. Body A, B, C, D pak tvoří trojúhelník nebo nekonvexní čtyřúhelník.



Obr. 27



Obr. 28



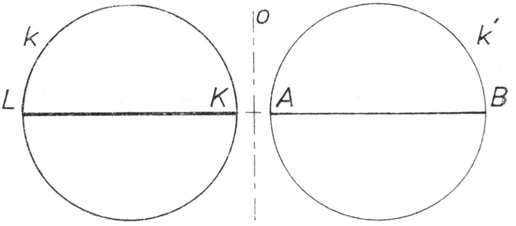
Obr. 29

b) Úsečky AB, CD jsou rovnoběžné s osou o, $ABCD$ je pravoúhelník (obr. 28).
c) Úsečky AB, CD jsou na osu o kolmé, body A, B, C, D leží na jedné přímce (obr. 29).

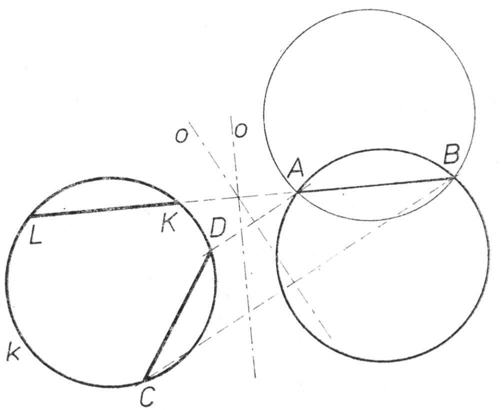
Proveďme teď diskusi řešitelnosti úlohy. Je ihned vidět, že úloha nemá řešení, jestliže je $|AB| > 2r$, protože pak neexistuje kružnice k'. Nechť je tedy $|AB| \leqq 2r$. Rozlišíme čtyři případy:

1. Body A, B leží na kružnici k. Jsou-li body A, B krajní body průměru kružnice k, nemá úloha řešení, protože jediná kružnice o poloměru r, procházející body A, B, je kružnice k sama a každá její osa prochází středem kružnice, protíná tedy úsečku AB. Je-li $|AB| < 2r$, existuje kromě kružnice k ještě jedna kružnice téhož poloměru, procházející body A, B. Jenže osou souměrnosti, podle které jsou tyto kružnice souměrně sdružené, je přímka AB, což nevede k řešení úlohy. Můžeme však vzít libovolný průměr o kružnice k, neprotínající úsečku AB, a body D, C souměrně sdružené podle o k bodům A, B jsou řešením úlohy, která má v tomto případě nekonečně mnoho řešení.
2. Jeden z bodů A, B leží na kružnici k, druhý nikoli. Úloha nemá řešení, protože osa o má společný bod s úsečkou AB.
3. Ke stejnému výsledku dospějeme v případě, kdy jeden z bodů A, B leží ve vnitřní a druhý ve vnější oblasti kružnice k.
4. Body A, B jsou oba z vnější nebo oba z vnitřní oblasti kružnice k. Jsou-li stejně vzdáleny od středu kružnice k,

je $AB \parallel o$, kde o je osa souměrnosti, podle níž je kružnice k souměrně sdružená s libovolnou kružnicí téhož poloměru, procházející body A, B. Úloha pak nemá řešení. V opačném případě musíme ještě vyloučit situaci, při které je $AB \perp o$. Ta nastane, jestliže přímka AB protíná kružnici k v tětivě KL stejně velké, jako je úsečka AB. Je-li KL průměrem kružnice k, nemá úloha řešení (obr. 30). Není-li KL průměrem kružnice k (obr. 31), existují dvě kružnice



Obr. 30



Obr. 31

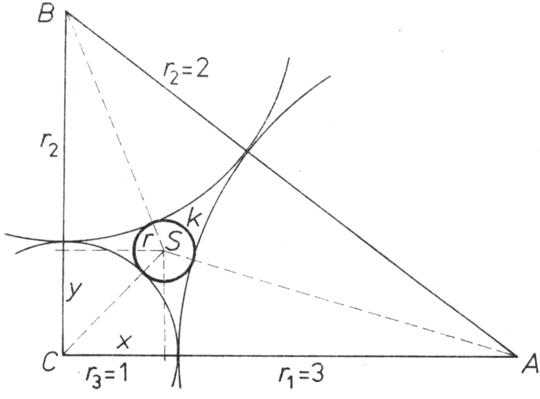
o poloměru r, procházející body A, B, pro jednu z nich je sice $AB \perp o$, druhá však vede k jednomu řešení úlohy. V nevyloučených případech má úloha vždy jedno řešení, je-li $|AB| = 2r$, a dvě řešení pro $|AB| < 2r$.

62. Označme r_A, r_B, r_C, r_D poloměry kružnic k_A, k_B, k_C, k_D. Podle podmínek úlohy je $r_A + r_B = a$, $r_B + r_C = b$, $r_C + r_D = c$, $r_D + r_A = d$. Sečteme-li první a třetí rovnici a od součtu odečteme druhou a čtvrtou rovnici, dostaneme dokazovaný vztah $a + c = b + d$. Nechť je obráceně tento vztah splněn. Zvolme libovolně hodnotu r_A v intervalu $(0, d)$ a položme $r_D = d - r_A$, $r_C = c - d + r_A$, $r_B = b - - c + d - r_A$. Pak je též $r_A + r_B = a$. Ptejme se ještě, zda můžeme zvolit r_A tak, aby i r_B, r_C, r_D byly kladné. Tyto hodnoty budou kladné, bude-li kromě nerovností $0 < r_A < d$ platit také $a = b - c + d > r_A > d - c$. Zvolme tedy r_A tak, aby $\max[0, d - c] < r_A < \min[d, a]$. To lze právě tehdy, když je $d - c < a$, což platí, protože je $d - c = = a - b$.

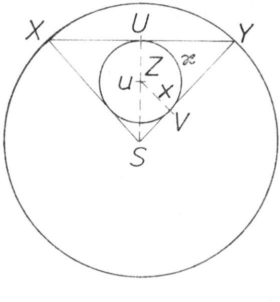
63. Poloměry kružnic k_1, k_2, k_3 označíme r_1, r_2, r_3. Podle podmínek úlohy platí $r_1 + r_3 = 4$, $r_2 + r_3 = 3$, $r_1 + r_2 = 5$, odkud plyne $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$. Označme ještě r poloměr kružnice k a S její střed. Pak platí (obr. 32)

$$x^2 + y^2 = (1 + r)^2, \; x^2 + (3 - y)^2 = (2 + r)^2,$$

$(4 - x)^2 + y^2 = (3 + r)^2$. Odtud plyne odečtením první rovnice od druhé a od třetí $x = 1 - \dfrac{r}{2}$, $y = 1 - \dfrac{r}{3}$ a po dosazení těchto hodnot do rovnice $x^2 + y^2 = (1 + r)^2$ dostaneme rovnici $23r^2 + 132r - 36 = 0$, která má jediný kladný kořen $r = \frac{6}{23}$.



Obr. 32



Obr. 33

64. Uvažujme trojúhelník SXY, kde X, Y jsou body kružnice k (obr. 33). Označme U střed tětivy XY a $u = |SU|$ $(0 < u < r)$ a vypočítejme poloměr x kružnice $\varkappa$ vepsané trojúhelníku SXY. Střed kružnice $\varkappa$ označíme Z a patu kolmice vedené bodem Z k přímce SY označíme V. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků UYS, VZS plyne

$$\frac{|UY|}{|YS|} = \frac{|VZ|}{|ZS|}, \text{ tj. } \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{r} = \frac{x}{u - x},$$

odkud dostáváme

$$x = \frac{u\sqrt{r^2 - u^2}}{r + \sqrt{r^2 - u^2}}, \; |SZ| = u - x = \frac{ur}{r + \sqrt{r^2 - u^2}}.$$

Označíme-li ještě $z = |SZ|$, dostaneme z poslední rovnice postupně

$$zr + z\sqrt{r^2 - u^2} = ur,$$

$$z\sqrt{r^2 - u^2} = r(u - z),$$

$$z^2r^2 - z^2u^2 = r^2u^2 + r^2z^2 - 2uzr^2,$$

a protože $u \neq 0$, je

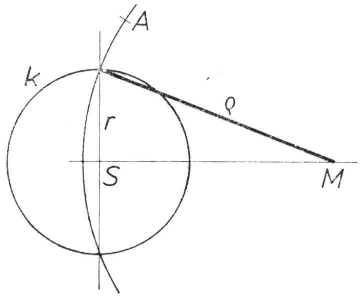
$$u = \frac{2r^2}{r^2 + z^2}\, z.$$

Nechť je obráceně dán bod Z tak, že pro $z = |SZ|$ platí $0 < z < r$. Na polopřímce SZ sestrojíme bod U tak, aby platilo

$$|SU| = u = \frac{2r^2}{r^2 + z^2}\,z.$$

Protože je $z < r$, je $\dfrac{2r^2}{r^2 + z^2} > 1$ a $2rz < r^2 + z^2$, tedy $z < u < r$. K bodu U sestrojíme tětivu XY kružnice k tak, aby bod U byl jejím středem. Střed kružnice vepsané trojúhelníku SXY leží na polopřímce SU ve vzdálenosti $\dfrac{ur}{r + \sqrt{r^2 - u^2}}$ od bodu S. Dosadíme-li za u výraz $\dfrac{2r^2z}{r^2 + z^2}$, zjistíme, že je tato vzdálenost rovna z. Je tedy středem kružnice vepsané trojúhelníku SXY daný bod Z. Tím jsme dokázali tvrzení, obsažené v úloze. Ke každému bodu Z z vnitřní oblasti kružnice k, různému od jejího středu S, jsme sestrojili bod U a na kružnici k body X, Y tak, že bod Z je středem kružnice vepsané trojúhelníku SXY.

65. Označme střed hledané kružnice M. Kružnice se středem M o poloměru ϱ dělí kružnici k právě tehdy na dvě polokružnice, jestliže platí $\varrho^2 = r^2 + |SM|^2$, tj. $|SM| = \sqrt{\varrho^2 - r^2}$ (obr. 34). Tím dostáváme první podmínku řešitelnosti úlohy: $\varrho > r$. Hledaná kružnice o poloměru ϱ má procházet bodem A, tedy $|AM| = \varrho$. Bod M musí tedy ležet na průniku kružnic k_1, k_2, kde k_1 má střed v bodě S a poloměr $\sqrt{\varrho^2 - r^2}$, kružnice k_2 má střed v bodě A a poloměr ϱ. Tyto kružnice mají právě tehdy společný bod, jestliže je



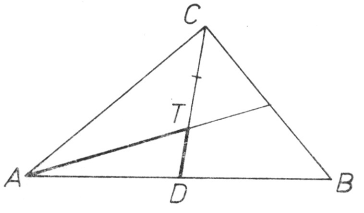
Obr. 34

$$\varrho - \sqrt{\varrho^2 - r^2} \leqq |SA| \leqq \varrho + \sqrt{\varrho^2 - r^2}.$$

To je další podmínka řešitelnosti úlohy. Obráceně: Jsou-li tyto dvě nerovnosti a samozřejmě též nerovnost $\varrho > r$ splněny, mají kružnice k_1, k_2 aspoň jeden společný bod a každý jejich společný bod M je středem kružnice o poloměru ϱ, která je řešením naší úlohy.

66. Označme opět M střed hledané kružnice. Podle podmínek úlohy má platit $\varrho^2 = r_1^2 + |S_1M|^2$ a zároveň $r_2^2 = \varrho^2 + |S_2M|^2$, tedy $|S_1M| = \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}$ a současně $|S_2M| = \sqrt{r_2^2 - \varrho^2}$. Nutnou podmínkou řešitelnosti úlohy je tedy splnění nerovností $r_1 < \varrho < r_2$, $|\sqrt{r_2^2 - \varrho^2} - \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}| \leqq |S_1S_2| \leqq \sqrt{r_2^2 - \varrho^2} + \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}$. Stejně jako v předcházející úloze můžeme ukázat, že splnění těchto čtyř nerovností je též postačující podmínkou pro existenci řešení.

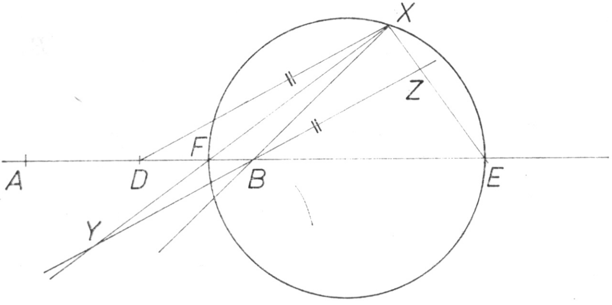
67. Nechť trojúhelník ABC má požadované vlastnosti (obr. 35). Označme D střed přepony a T těžiště. Předpoklá-



Obr. 35

dejme, že je dána délka t těžnice na stranu BC, v opačném případě bychom zaměnili označení bodů A, B. Víme, že $|AT| = \frac{2t}{3}$, protože těžiště dělí těžnici v poměru 2 : 1. Dále víme, že $|CD| = \frac{c}{2}$, protože v pravoúhlém trojúhelníku je střed přepony středem kružnice trojúhelníku opsané. Pak je $|TD| = \frac{c}{6}$. V trojúhelníku ADT tedy známe velikosti všech jeho tří stran. Známe-li trojúhelník ADT, můžeme již sestrojit trojúhelník ABC. Stačí sestrojit bod B tak, aby bod D byl středem úsečky AB, a na polopřímce DT bod C tak, aby $|DC| = 3\,|DT| = \frac{c}{2}$. Takto vzniklý trojúhelník je pravoúhlý a má těžiště v bodě T. Úloha je řešitelná právě tehdy, existuje-li trojúhelník ADT s předepsanými stranami $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{6}$, $\frac{2t}{3}$, a ten existuje právě tehdy, platí-li $c < 2t < 2c$.

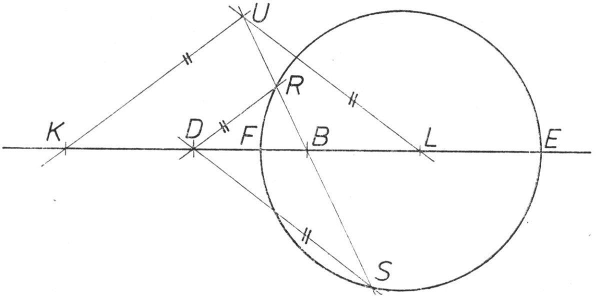
68. Předpokládejme, že trojúhelník ABC má požadované vlastnosti, a označme D střed strany AB (obr. 36). Známe velikosti stran AB, AC a víme, že $|CD| : |CB| = 3 : 2$. Patří tedy bod C do množiny všech bodů, jejichž poměr vzdáleností od bodů D, B je $3 : 2$. Do této množiny patří



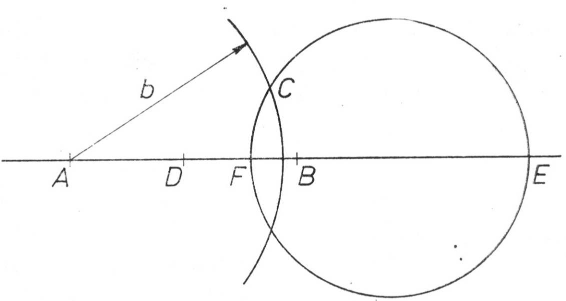
Obr. 36

bod F úsečky DB, který ji dělí v poměru $3 : 2$, a také bod E na polopřímce DB, pro který je $|DE| = 3|DB|$. Ukážeme, že množinou všech bodů X, pro které platí $|XD| : |XB| = 3 : 2$, je kružnice k nad průměrem FE (tzv. Apolloniova kružnice). Předpokládejme, že bod X leží na kružnici k. Spojme bod X s body D, B i F a E, bodem B veďme rovnoběžku s přímkou DX, její průsečíky s přímkami FX, EX označíme Y, Z. Z podobnosti trojúhelníků DXF, BYF plyne $|DX| : |BY| = |DF| : |BF| = 3 : 2$, z podobnosti trojúhelníků DXE, BZE plyne $|DX| : |BZ| = |DE| : |BE| = 3 : 2$. Porovnáním těchto dvou úměr dostáváme $|BY| = |BZ|$. Je tedy bod B středem přepony pravoúhlého trojúhelníku YXZ, a proto $|BY| = |BZ| = |BX|$. Dosazením

$|BX|$ za $|BY|$ do první z odvozených dvou úměr dostaneme $|DX| : |BX| = 3 : 2$. Musíme ještě ukázat, že body mimo kružnici k tuto vlastnost nemají. Zvolme bod U (obr. 37), který neleží na kružnici k, jeho spojnice s bodem B protne kružnici k v bodech R, S, pro které platí $|DR| : |BR| = |DS| : |BS| = 3 : 2$, jak jsme právě dokázali. Bodem U vedeme rovnoběžky s přímkami DR, DS, jejich průsečíky s přímkou DB označíme K, L. Je pak $|KU| : |BU| =$



Obr. 37



Obr. 38

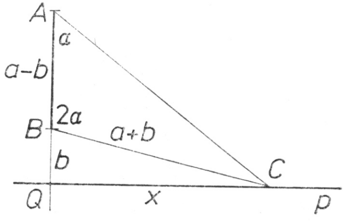
$= |DR| : |BR| = 3 : 2$ a zároveň $|LU| : |BU| = |DS| : |BS| = 3 : 2$. Kdyby platilo též $|DU| : |BU| = 3 : 2$, muselo by platit $|KU| = |LU| = |BU|$, bod U by měl od tří navzájem různých bodů K, B, L přímky DB stejnou vzdálenost, což nemůže nastat.

Vraťme se k naší úloze. Víme, že bod C leží na kružnici k sestrojené nad průměrem FE (obr. 38). Současně však leží na kružnici se středem A a s poloměrem b. Podle těchto vztahů můžeme trojúhelník ABC sestrojit. Zvolíme úsečku AB velikosti c, sestrojíme body F, E a kružnici k nad průměrem FE. Existuje-li průsečík C kružnice k s kružnicí (A, b), který neleží na přímce AB, je trojúhelník ABC řešením naší úlohy. Úloha má tedy až na shodnost nejvýše jedno řešení, protože druhý průsečík obou kružnic by vedl pouze k trojúhelníku souměrně sdruženému podle přímky AB. Toto řešení existuje právě tehdy, když se budou uvažované dvě kružnice protínat ve dvou bodech. Je $|AF| = \frac{4c}{5}$, $|AE| = 2c$, proto $|AO| = \frac{7c}{5}$, kde je O střed kružnice k, jejíž poloměr je $\frac{3c}{5}$. Naše úloha má tedy právě tehdy řešení, platí-li

$$\frac{|b - 3c|}{5} < \frac{7c}{5} < \frac{b + 3c}{5}, \text{ tj. } \frac{4c}{5} < b < 2c.$$

K tomuto výsledku bychom došli snadněji, kdybychom si uvědomili, že se uvažované dvě kružnice protínají ve dvou bodech právě tehdy, když je $|AF| < b < |AE|$.

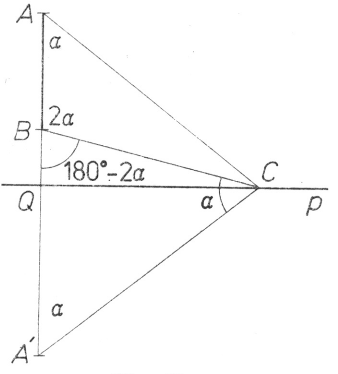
69. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy, označme $\sphericalangle BAC = \alpha$, tedy $\sphericalangle ABC = 2\alpha$ (obr. 39). Dále označíme Q průsečík přímek AB, p a $a = |QA|$, $b = |QB|$. Protože proti většímu úhlu leží v trojúhelníku větší strana a obráceně, je $|AC| > |BC|$, a tudíž $|AQ| > |BQ|$, tj. $a > b$. To je nutná podmínka řešitelnosti úlohy, dále budeme předpokládat, že je splněna. Mohli bychom vyšetřit



Obr. 39

nejdříve množinu všech bodů X, pro které platí $\sphericalangle ABX = 2 . \sphericalangle BAX$, a najít její společné body s přímkou p. Touto množinou je část hyperboly, nepočítáme-li polopřímku opačnou k polopřímce BA. To však přesahuje rámec středoškolské matematiky, a proto si ukážeme raději jiný postup, vlastně dva postupy. První postup není zrovna pěkný. Nevíme-li totiž, jak na to, zkusíme třeba vzdálenost $x = |QC|$ vypočítat. Podle podmínek úlohy je $\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{x}{b} = \operatorname{tg}(180° - 2\alpha) = -\operatorname{tg} 2\alpha$. Ze vzorce pro tangens dvojnásobného úhlu pak vyplývá $x^2 = a^2 + 2ab$, protože $x = 0$ není řešením naší úlohy. Pak je podle Pythagorovy věty $|AC| = \sqrt{a^2 + x^2} =$

$= \sqrt{2a(a + b)}$, $|BC| = \sqrt{b^2 + x^2} = a + b$. Zvolíme-li obráceně na přímce p bod C tak, že $|BC| = a + b$, zjistíme užitím trigonometrických vztahů, že $2 . \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$. A protože vzdálenost bodu B od přímky p se rovná b, $b < a + b$, má úloha vždy dvě řešení (stále předpokládáme $a > b$).

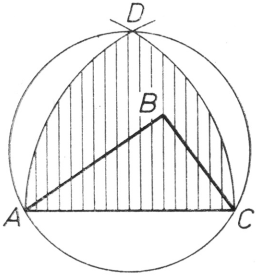


Obr. 40

Když už teď řešení úlohy známe, pokusíme se je vylepšit, najít elegantnější postup. Nechť je trojúhelník ABC řešením úlohy (obr. 40). (Podle předcházejícího víme, že je $|BC| = a + b$, to však nepoužijeme.) Sestrojme na polopřímce BQ bod A' tak, aby byl trojúhelník BCA' rovnoramenný, $|BC| = |BA'|$. Protože tento trojúhelník má při vrcholu B úhel $180° - 2\alpha$, je $\sphericalangle BA'C = \alpha$, tj. $\sphericalangle QA'C = \sphericalangle QAC$. Pak je bod A' bodem souměrně sdruženým k bodu A podle přímky p. Důsledkem toho je $|QA'| = a$, $|BA'| = a + b$, tudíž $|BC| = a + b$. Zvolme obráceně na přímce p bod C

tak, aby $|BC| = a + b$, a nechť je A' bod souměrně sdružený k bodu A podle přímky p. Pak je trojúhelník BCA' rovnoramenný, tedy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BCA'$, označme velikost těchto úhlů α. Z trojúhelníku BCA' pak plyne, že $\sphericalangle A'BC = 180° - 2\alpha$, tudíž $\sphericalangle ABC = 2\alpha$. Stejně jako při předcházejícím postupu vidíme, že úloha má pro $a > b$ vždy dvě řešení, jinak řešení nemá.

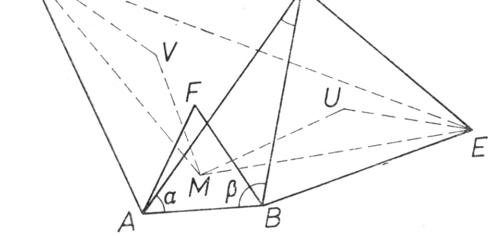
70. Předpokládejme, že v trojúhelníku ABC není žádná strana větší než 3 a že AC je jeho nejdelší strana, tj. $|AB| \leqq |AC|$ a současně $|BC| \leqq |AC| \leqq 3$. Sestrojme rovnostranný trojúhelník ADC tak, aby body B, D ležely v téže polorovině, ohraničené přímkou AC (obr. 41). Protože je $|AB| \leqq$



Obr. 41

$\leqq |AC|$, leží bod B ve vnitřní oblasti kružnice $(A, |AC|)$. Stejně tak leží bod B ve vnitřní oblasti kružnice $(C, |AC|)$. Tyto dvě kružnice se protínají v bodě D a v bodě k němu souměrně sdruženém podle přímky AC. Leží tedy bod B, a tím i celý trojúhelník ABC ve vyšrafované části, která leží celá v kruhu, jehož hraniční kružnicí je kružnice opsaná trojúhelníku ADC. Její poloměr je $r = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$ (rovná se dvěma třetinám výšky v rovnostranném trojúhelníku o straně $|AC|$). Jelikož je $|AC| \leqq 3$, je $r \leqq \sqrt{3}$. Tím jsme dokázali, že trojúhelník ABC leží v kruhu, jehož poloměr se nejvýše rovná $\sqrt{3}$.

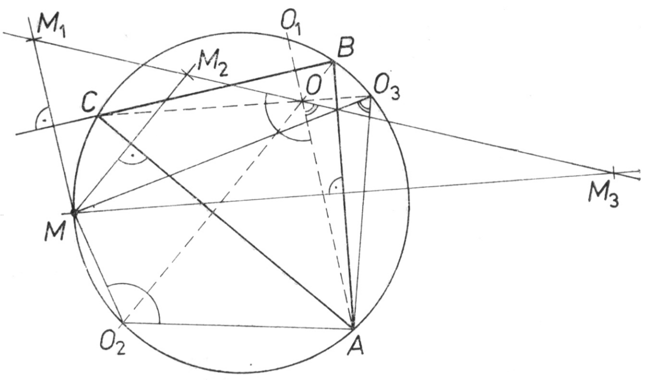
71. Označme a, b, c délky stran a α, β, γ velikosti úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, V a U nechť jsou těžiště trojúhelníků ACD a BCE (obr. 42). Potom otočení kolem bodu A, které převede polopřímku AC do polopřímky AB, zobrazí polopřímku AV na polopřímku AM. Proto je $\sphericalangle VAM = \alpha$, stejně tak je $\sphericalangle MBU = \beta$. Dále je $|DV| = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $|AM| = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $|BU| = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Jsou tudíž trojúhelníky ABC, AMV a MBU podobné, důsledkem toho je $|VM| = \frac{a}{\sqrt{3}} =$



Obr. 42

$= |EU|$, $|MU| = \dfrac{b}{\sqrt{3}} = |DV|$. Porovnejme ještě úhly DVM, MUE. Je $\sphericalangle DVM = 120° + \sphericalangle AVM = 120° + \gamma$ a totéž platí pro $\sphericalangle MUE$. (To ovšem za předpokladu $\gamma \leqq 60°$, v opačném případě je analogicky $\sphericalangle DVM = \sphericalangle MUE = 360° - (120° + \gamma) = 240° - \gamma$.) Jsou tedy trojúhelníky DVM, MUE shodné, v případě $\gamma = 60°$ jsou to shodné úsečky. V každém případě je $|DM| = |ME|$. Zbývá ještě vypočítat velikost úhlu DME. Víme, že v případě $\gamma \leqq 60°$ je $\sphericalangle VMA = \beta$, $\sphericalangle AMB = 120°$, $\sphericalangle BMU = \alpha$. Velikosti úhlů UME, VMD sice neznáme, víme však, že $\sphericalangle UME = \sphericalangle VDM$ a že $\sphericalangle VMD + \sphericalangle VDM = 180° - \sphericalangle DVM = 60° - \gamma$, takže $\sphericalangle UME + \sphericalangle VMD = 60° - \gamma$. Pak je $\sphericalangle DME = 360° - \sphericalangle VMA - \sphericalangle AMB - \sphericalangle BMU + \sphericalangle UME + \sphericalangle VMD = 360° - \beta - 120° - \alpha + 60° - \gamma = 120°$. Podobně bychom postupovali v případě $\gamma > 60°$.

72. Označme O průsečík výšek v trojúhelníku ABC a O_1, O_2, O_3 body souměrně sdružené k bodu O podle stran BC, AC, AB trojúhelníku (obr. 43). Kružnice nad průměrem AO prochází patami výšek vedených body B a C, proto je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle O_2OO_3 = 180°$. Je ale $\sphericalangle O_2OO_3 = \sphericalangle COB = \sphericalangle CO_1B$, tedy $\sphericalangle CO_1B + \sphericalangle CAB = 180°$, přičemž přímka CB odděluje body O_1, A. Proto je čtyřúhelník ACO_1B tětivový, jinými slovy bod O_1 a stejně tak body O_2, O_3 leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC (označme ji k). Zvolme na kružnici k libovolný bod M, různý od bodů A, B, C. Označme M_2, M_3 body souměrně sdružené k bodu M podle přímek AC, AB. Ze souměrnosti podle přímky AC



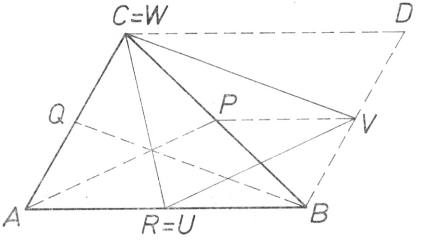
Obr. 43

plyne $\sphericalangle AOM_2 = \sphericalangle AO_2M$, obdobně $\sphericalangle AOM_3 = \sphericalangle AO_3M$. Body A, M, O_2, O_3 leží na kružnici k, proto se buď úhly AO_2M, AO_3M sobě rovnají, nebo se jejich součet rovná přímému úhlu. Totéž musí proto platit i o úhlech AOM_2, AOM_3. Leží tudíž body O, M_2, M_3 na jedné přímce. Podrobný důkaz by však vyžadoval ještě diskusi podle polohy bodu M, popřípadě zavedení orientovaných úhlů. Podobně se dokáže, že i body M_2, M_1 leží na jedné přímce, procházející bodem O, a tím je dokázáno, že všechny body O, M_1, M_2, M_3 leží na jedné přímce. S malými obměnami si můžete tvrzení úlohy dokázat i pro trojúhelník, který není ostroúhlý.

73. Předpokládejme, že trojúhelník UVW požadovaných vlastností existuje. Protože strany trojúhelníku UVW jsou kolmé k stranám trojúhelníku BCA, jsou tyto trojúhelníky podobné. Existuje tedy kladné číslo k tak, že $|BC| = k|UV|$, $|AC| =$

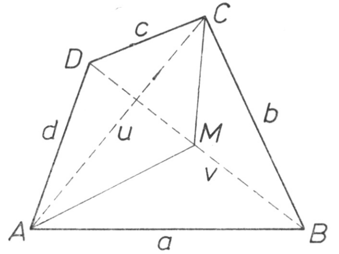
$= k|VW|$, $|AB| = k|UW|$, tedy $|BC| \cdot |UV| = k|UV|^2$, $|AB| \cdot |UW| = k|UW|^2$, $|AC| \cdot |VW| = k|VW|^2$. Protože $|UV| = |AP|$ a analogicky pro další strany trojúhelníků, jsou levé strany posledních tří rovnic sobě rovny, rovnají se totiž dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC. Pak tedy nutně platí $|UV| = |UW| = |VW|$, a tudíž je původní trojúhelník rovnostranný. K rovnostrannému trojúhelníku můžeme zřejmě sestrojit trojúhelník UVW, který je opět rovnostranný.

74. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABDC$ (obr. 44). Označme V střed úsečky BD. Pak jsou $ARVP$, $BVCQ$ rovnoběžníky. Stačí tedy za trojúhelník UVW zvolit trojúhelník RVC. Označíme-li S obsah trojúhelníku ABC, je obsah rovnoběžníku $ABDC$ roven $2S$, obsahy trojúhelníků AUC a CVD jsou $\frac{S}{2}$ a obsah trojúhelníku UBV je $\frac{S}{4}$. Proto je obsah trojúhelníku UVW roven $\frac{3S}{4}$, poměr obsahů trojúhelníků UVW a ABC je $\frac{3}{4}$.



Obr. 44

75. Délky úhlopříček AC, BD označíme u, v, délky stran čtyřúhelníku označíme $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, střed úsečky BD označíme M (obr. 45). Pak je $|CM|$ délka těžnice v trojúhelníku BCD a je $|CM|^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{v^2}{4}$. Tento vzorec pro délku těžnice si lehce odvodíme

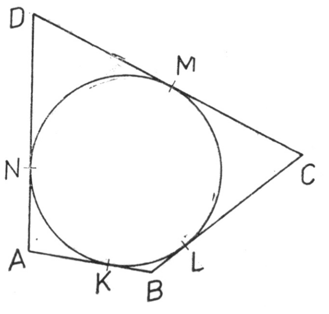


Obr. 45

užitím Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky CPM, CPD, CPB, kde je P pata výšky v trojúhelníku CDB na stranu BD. Stejně tak je $|AM|^2 = \frac{a^2 + d^2}{2} - \frac{v^2}{4}$, a tedy $|AM|^2 + |CM|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - v^2}{2} = \frac{u^2}{2}$ (použili jsme předpoklad $u^2 + v^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$). Podle trojúhelníkové nerovnosti je $|AM| + |CM| \geqq u$, tedy $|AM|^2 + |CM|^2 + 2|AM||CM| \geqq u^2 = 2(|AM|^2 + |CM|^2)$, odkud plyne $0 \geqq (|AM| - |CM|)^2$. Musí proto být $|AM| = |CM|$ a ze vztahu $|AM|^2 + |CM|^2 = \frac{u^2}{2}$ ještě vyplývá

$|AM| = |CM| = \dfrac{u}{2}$. Pak je bod M středem úsečky AC. Tím jsme dokázali, že se úhlopříčky čtyřúhelníku navzájem půlí, a proto je čtyřúhelník rovnoběžníkem.

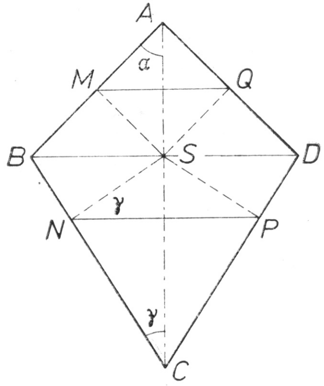
76. Čtyřúhelník je tečnový, body dotyku jeho stran s kružnicí mu vepsanou označíme K, L, M, N (obr. 46). Je $|AK| = |AN|$, $|BK| = |BL|$ a podobně, tedy $a + c = b + d$. Podle prvního předpokladu úlohy platí $a^2 + b^2 +$



Obr. 46

$+ ac + bd = (a + c)(b + d)$. Dosadíme-li za $b + d$ hodnotu $a + c$ a dělíme-li nenulovým číslem $a + c$, dostaneme $b = c$ a současně $a = d$. To znamená, že trojúhelníky ABD a BCD jsou oba rovnoramenné se společnou základnou BD, tedy je čtyřúhelník $ABCD$ deltoid. Dosadíme-li $d = a$, $c = b$ do druhého předpokladu úlohy, dostaneme $a = b$. Pak jsou všechny strany čtyřúhelníku stejně dlouhé, čtyřúhelník je kosočtverec.

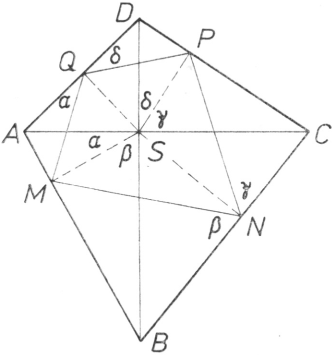
77. Ze souměrnosti podle přímky AC vyplývá, že jsou body M, Q a také N, P dvě dvojice bodů souměrně sdružených podle přímky AC (obr. 47). Proto jsou spojnice MQ, NP obě kolmé na AC, a tudíž spolu rovnoběžné. Čtyřúhelník $MNPQ$ je proto podle přímky AC souměrný lichoběžník nebo pravoúhelník. Poslední možnost nastane právě tehdy, když je $MN \parallel AC \parallel PQ$, tj. $MN \perp MQ$. Čtyřúhelník



Obr. 47

$MBNS$ je tětivový, lze mu opsat kružnici, protože má při vrcholech M, N pravé úhly. Proto je $\sphericalangle NMS = \sphericalangle NBS$. Označíme-li α, γ velikosti úhlů BAS, BCS, je $\sphericalangle SMQ = \alpha$, $\sphericalangle NBS = \sphericalangle NMS = 90° - \gamma$ tedy $\sphericalangle NMQ = \sphericalangle NMS + \sphericalangle SMQ = 90° + \alpha - \gamma$. Je tudíž čtyřúhelník $MNPQ$ právě tehdy pravoúhelník, když je $\alpha = \gamma$. A tato rovnost platí právě tehdy, když jsou trojúhelníky ABD a CBD shodné, neboli když je čtyřúhelník $ABCD$ kosočtverec. Někdy se však kosočtverec nepovažuje za deltoid, tak jako nepovažuje-me pravoúhelník za lichoběžník. Deltoidem se pak rozumí čtyřúhelník, který je souměrný jen podle jedné své úhlopříčky. Pak je ovšem čtyřúhelník $MNPQ$ vždy jen lichoběžníkem.

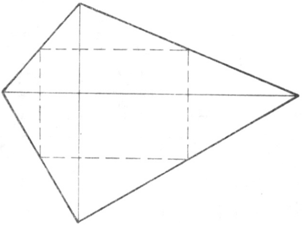
78. Označení zvolíme podle obr. 48. Stejně jako v předcházející úloze jsou čtyřúhelníky $AMSQ$, $BNSM$, $CPSN$ a $DQSP$ tětivové. Proto je $\sphericalangle ASM = \sphericalangle AQM$, označme



Obr. 48

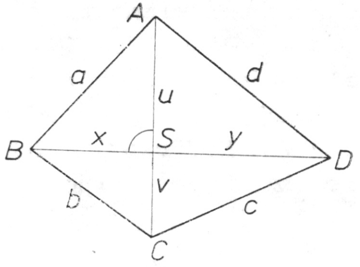
tuto velikost α. Podobně $\beta = \sphericalangle MSB = \sphericalangle MNB$, $\gamma = \sphericalangle PSC = \sphericalangle PNC$, $\delta = \sphericalangle PSD = \sphericalangle PQD$ a $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Dále je $\sphericalangle PQM = 180° - (\alpha + \delta)$, $\sphericalangle PNM = 180° - (\beta + \gamma)$. Čtyřúhelník $PQMN$ je právě tehdy tětivový (lze mu opsat kružnici), když je $\sphericalangle PQM + \sphericalangle PNM = 180°$, tj. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, tedy $\alpha + \beta = 90°$, což znamená, že jsou úhlopříčky čtyřúhelníku na sebe kolmé.

79. Středy stran čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník (obr. 49), jehož strany jsou rovnoběžné s úhlopříčkami čtyřúhelníku. Vrcholy rovnoběžníku leží právě tehdy na jedné kružnici, když je to pravoúhelník. V našem případě to nastane právě tehdy, když budou úhlopříčky daného čtyřúhelníku na sebe kolmé. Podle předcházející úlohy je to podmínka ekvivalentní s podmínkou, aby kolmé průměty průsečíku úhlopříček na jeho strany ležely na kružnici.



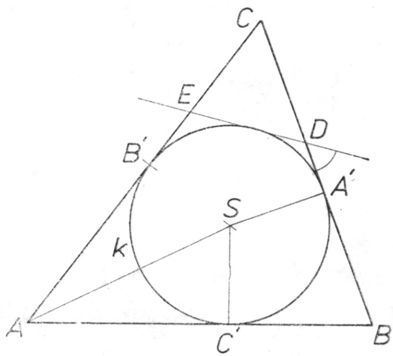
Obr. 49

80. Předpokládejme, že úhlopříčky AC, BD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou na sebe kolmé. Zavedeme označení podle obr. 50. Je pak $a^2 + c^2 = u^2 + x^2 + v^2 + y^2$, $b^2 + d^2 = x^2 + v^2 + u^2 + y^2$, tedy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Nechť je teď $\sphericalangle ASB \neq 90°$, třeba $\sphericalangle ASB < 90°$. Pak je $a^2 < x^2 + u^2$, $c^2 < v^2 + y^2$ a $\sphericalangle BSC > 90°$, tedy $b^2 > x^2 + v^2$, $d^2 > u^2 + y^2$. Důsledkem je nerovnost $a^2 + c^2 < b^2 + d^2$. Obdobně bychom dokázali, že $a^2 + c^2 > b^2 + d^2$, kdybychom předpokládali $\sphericalangle ASB > 90°$. Tím jsme dokázali, že $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ právě tehdy, když jsou úhlopříčky čtyřúhelníku na sebe kolmé.



Obr. 50

81. Předpokládejme, že jsme body D, E již sestrojili. Kružnice k, která je vepsána čtyřúhelníku $ABDE$, je i kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC (obr. 51). Kromě toho lze podle předpokladu čtyřúhelníku $ABDE$ i opsat kružnici, proto je $\sphericalangle EAB + \sphericalangle EDB = 180°$. Přímka ED je tedy tečnou kružnice k, pro kterou je $\sphericalangle EDB = 180° - \alpha$, $\alpha = \sphericalangle CAB$. Tím je již dána konstrukce tečny ED, kterou ovšem musíme zvolit tak, aby neoddělovala body A, B. Označme S střed



Obr. 51

kružnice k a A', B', C' body dotyku kružnice k se stranami BC, CA, AB. Protože bod S leží na osách úhlů CAB, EDB, je $\sphericalangle SAC' = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle SDA' = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky SAC', DSA' podobné, takže $|SC'| : |AC'| = |DA'| : |SA'|$. Víme, že $|SA'| = |SC'| = \varrho$ (poloměr kružnice trojúhelníku vepsané), odkud $|AC'| \, . \, |DA'| = \varrho^2$. Kromě toho je $|AC'| = |AB'|$, $|CB'| = |CA'|$, $|BC'| = |BA'|$ a $|CA'| + |BA'| = a$, tudíž $|AC'| = s - a$, kde je s poloviční obvod trojúhelníku ABC. Dále je $s\varrho$ obsah trojúhelníku ABC a podle Heronova vzorce

$$s\varrho = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Použitím všech těchto vztahů dostáváme

$$|DA'| = \frac{\varrho^2}{s - a} = \frac{(s - b)(s - c)}{s}, \; |EB'| = \frac{(s - a)(s - c)}{s},$$

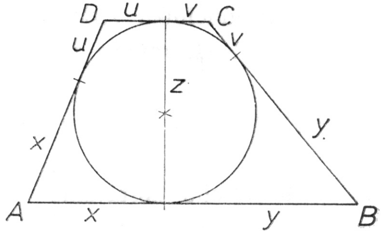
$$|CE| = b - (s - a) - \frac{(s - a)(s - c)}{s} = \frac{a(s - c)}{s},$$

$|CD| = \frac{b(s - c)}{s}$, obvod čtyřúhelníku $ABDE$ je proto

$$\frac{2c(2s - c)}{s}.$$

82. Označme v tečnovém lichoběžníku $ABCD$ vzdálenosti jeho vrcholů od bodů dotyku kružnice vepsané se stranami

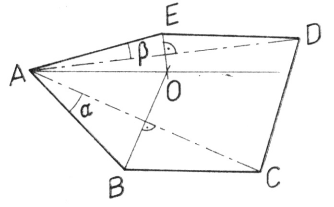
lichoběžníku x, y, u, v podle obr. 52. Pro výšku z lichoběžníku pak platí $z^2 = (v + y)^2 - (v - y)^2 = 4yv$ a stejně tak $z^2 = 4xu$, takže je $yv = xu$. Délky ramen lichoběžníku jsou $x + u$, $y + v$, jeho základny mají délky $u + v$, $x + y$. Je $(x + u)(y + v) - (u + v)(x + y) = (y - u)(x - v)$. Kdyby bylo $y = u$, plynulo by ze vztahu $yv = xu$ také $v = x$, čtyřúhelník by byl kosočtvercem. Je-li $y > u$, je v důsledku $yv = xu$ také $x > v$ a podobně je pro $y < u$ také $x < v$.



Obr. 52

V každém případě je proto $(x + u)(y + v) > (u + v)(x + y)$. Odmocněním dostaneme dokazovaný vztah, protože geometrický průměr dvou nezáporných čísel se rovná druhé odmocnině jejich součinu.

83. Nechť pětiúhelník $ABCDE$ splňuje podmínky úlohy (obr. 53). Označme α úhel BAC a β úhel DAE. Protože $\sphericalangle BAE = 2 . \sphericalangle CAD$, je $\sphericalangle CAD = \alpha + \beta$. Proto bod O souměrně sdružený k bodu B podle přímky AC splývá s bodem souměrně sdruženým k bodu E podle přímky AD a je vnitřním bodem úhlu CAD, který je ostrý, neboť se rovná jedné polovině nevypuklého úhlu BAE. Využili jsme přitom



Obr. 53

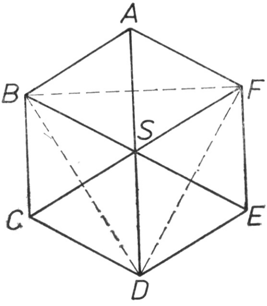
též předpokladu rovnostrannosti daného pětiúhelníku. Z tohoto předpokladu též plyne $|AO| = |CO| = |DO|$, neboť $|AO| = |AB| = |CB| = |CO|$ a stejně tak $|AO| = |AE| = |DE| = |DO|$. Je tedy bod O středem kružnice opsané trojúhelníku ACD, a protože leží v jeho ostrém úhlu, je bod O jeho vnitřním bodem. Je tudíž trojúhelník ACD nutně ostroúhlý. Trojúhelník CDO je rovnostranný, z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne $\sphericalangle CAD = \frac{1}{2} \sphericalangle COD = 30°$. Z těchto úvah vyplývá konstrukce pětiúhelníku. Sestrojíme trojúhelní ACD, v němž známe délky dvou stran AC, AD a úhel jimi sevřený je $30°$. Dále sestrojíme střed O kružnice opsané trojúhelníku ACD. Není-li trojúhelník ACD ostroúhlý, neleží bod O uvnitř trojúhelníku ACD a úloha nemá řešení. V opačném případě tvoří body B a E souměrně sdružené k bodu O podle přímek AC, AD zbývající dva vrcholy hledaného pětiúhelníku. Jaké jsou nutné a postačující podmínky, aby byl trojúhelník ACD ostroúhlý? Je-li $|AC| = |AD| \cos 30°$, je trojúhelník ACD pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C; je-li $|AC| > |AD| \cos 30°$, je v trojúhelníku ACD při vrcholu C úhel ostrý a také obráceně, je-li úhel ACD ostrý, je splněna uvedená nerovnost. Podobně to platí pro vrchol D. Trojúhelník ACD je tedy právě tehdy ostroúhlý, když platí

$$2|AC| > |AD|\sqrt{3} \text{ a zároveň } 2|AD| > |AC|\sqrt{3},$$

tj.

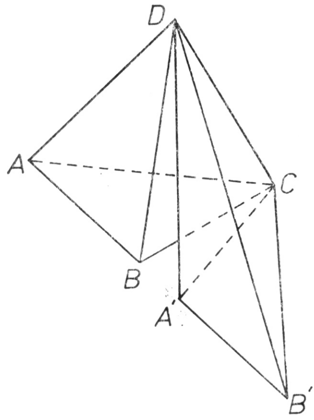
$$\frac{|AD|\sqrt{3}}{2} < |AC| < \frac{2|AD|}{\sqrt{3}}.$$

84. *Z* trojúhelníku BDF (obr. 54) je vidět, že přímky BE, DA, FC jsou osami jeho vnitřních úhlů, protínají se tudíž v jednom bodě, který označíme S. Protože $\sphericalangle SBF =$



Obr. 54

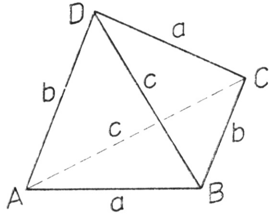
$= \sphericalangle FBA$ a $\sphericalangle SFB = \sphericalangle BFA$ a přímka BF odděluje body S a A, jsou tyto body souměrně sdružené podle přímky BF, tedy $SA \perp BF$. To znamená, že přímka DS je výškou v trojúhelníku BDF, obdobně přímky FS a BS. Je tudíž bod S také průsečíkem výšek v trojúhelníku BDF, který je proto rovnostranný. Protože A a S jsou body souměrně sdružené podle přímky BF a obdobně dvojice S, E podle přímky DF a S, C podle BD, je šestiúhelník $ABCDEF$ pravidelný.



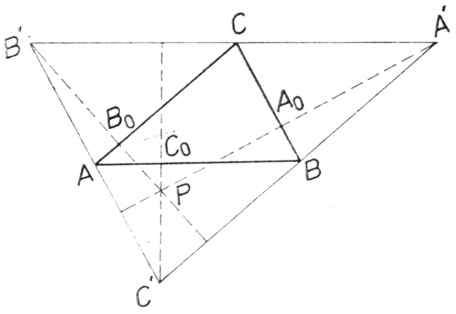
Obr. 55

85. Uvažujme nejdříve čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'CD$ (obr. 55). Trojúhelníky ABC, $A'B'C$ leží v téže rovině, jejich základny leží na téže přímce a jsou stejně dlouhé, protilehlý vrchol mají společný, mají tudíž stejné výšky k těmto základnám, a tedy stejný obsah. Protože trojúhelníky ABC, $A'B'C$ mají stejný obsah a leží v téže rovině, mají čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'CD$ stejný objem. Stačí si totiž uvědomit, že tyto čtyřstěny mají společnou výšku vedenou bodem D. Stejně tak dokážeme, že čtyřstěny $A'B'CD$ a $A'B'C'D'$ mají stejný objem. Tím je pak dokázáno, že i čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ mají stejný objem.

86. Stěny čtyřstěnu se stejně dlouhými protilehlými hranami jsou navzájem shodné trojúhelníky (obr. 56). Sestrojme si síť našeho čtyřstěnu. Dostaneme ji tak, že trojúhelníky ABD, BCD a CAD otočíme podle přímek AB, BC, CA

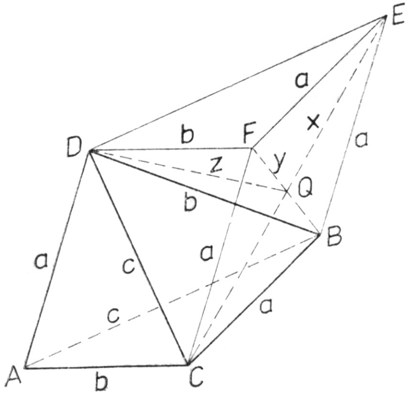


Obr. 56



Obr. 57

do roviny ABC (obr. 57). Dostaneme tak trojúhelník $A'B'C'$, úsečky AB, BC, CA jsou jeho středními příčkami. Průsečík P výšek trojúhelníku $A'B'C'$ je kolmým průmětem bodu D do roviny ABC. To pochopíme snadno, stačí si rozmyslet, jak se pohybuje vrchol D trojúhelníku ABD při jeho otáčení do polohy ABC'. Označíme-li C_0 průsečík přímek AB, $C'P$, je C_0P kolmý průmět úsečky C_0D. Proto musí být $|C_0P| < |C_0D| = |C_0C'|$ a stejně tak $|B_0P| < |B_0B'|$, $|A_0P| < |A_0A'|$. Bod P je tedy vnitřním bodem trojúhelníku $A'B'C'$, který je tudíž ostroúhlý a stejně tak trojúhelník ABC. Obráceně, je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, leží bod P uvnitř trojúhelníku $A'B'C'$, ne nutně uvnitř trojúhelníku ABC, a dá se pak z popsané sítě čtyř shodných trojúhelníků složit čtyřstěn $ABCD$. Protože je trojúhelník o stranách a, b, c ostroúhlý, jak budeme dále předpokládat, jsou hodnoty $c^2 + b^2 - a^2$, $a^2 + b^2 - c^2$, $a^2 + c^2 - b^2$ kladné. Vypočteme teď objem čtyřstěnu $ABCD$. K tomu doplníme čtyřstěn na trojboký hranol $ABCDEF$ (obr. 58) čtyřbokým jehlanem $CBEFD$.



Obr. 58

Stěna $CBEF$ je kosočtverec, který rozdělíme úhlopříčkou CE. Celý hranol je tak rozdělen na tři jehlany $ABCD$, $CEFD$ a $CBED$. První dva mají shodné podstavy ABC, EDF a stejnou výšku (je to vzdálenost rovnoběžných rovin ABC, EDF). Druhý a třetí jehlan mají též shodné objemy, protože mají společný vrchol D a protější stěny leží v téže rovině a mají stejný obsah. Víme tedy, že objem čtyřstěnu $ABCD$

se rovná jedné polovině objemu jehlanu $CBEFD$. Jeho pobočné hrany DC a DE jsou stejně dlouhé, právě tak jeho zbývající dvě pobočné hrany BD, FD. Proto je patou výšky tohoto jehlanu vedené bodem D průsečík Q úhlopříček CE, FB kosočtverce $CBEF$. Označme $|QE| = |QC| = x$, $|QB| = |QF| = y$, $|QD| = z$. Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 + z^2 = c^2, y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = a^2.$$

Objem jehlanu $CBEFD$ je $\frac{2xyz}{3}$ a pro hledaný objem V čtyřstěnu $ABCD$ tedy máme

$$V = \frac{1}{3} xyz =$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{(c^2 + b^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}.$$

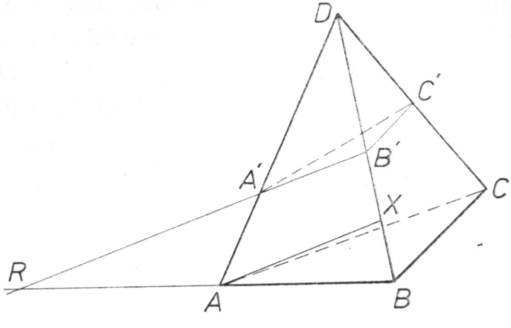
87. Úlohu můžeme řešit pomocí tzv. Menelaovy věty. Podle ní je

$$\frac{|AR|}{|BR|} \frac{|BB'|}{|DB'|} \frac{|DA'|}{|AA'|} = 1, \text{ tedy } |DA'| = \frac{k+1}{k} |AA'|.$$

K témuž výsledku bychom ovšem mohli dospět bez znalosti Menelaovy věty. Stačí bodem A vést rovnoběžku s $A'B'$, její průsečík s přímkou DB označíme X (obr. 59). Z podobnosti trojúhelníků $RB'B$, AXB a též $DA'B'$, DAX dostaneme též výše uvedený vztah. Čtyřstěny $ABCD$, $A'B'C'D$ mají stěny ABD, $A'B'D$ v téže rovině. Vzdálenost bodu C od této roviny se rovná dvojnásobku její vzdálenosti od bodu C'.

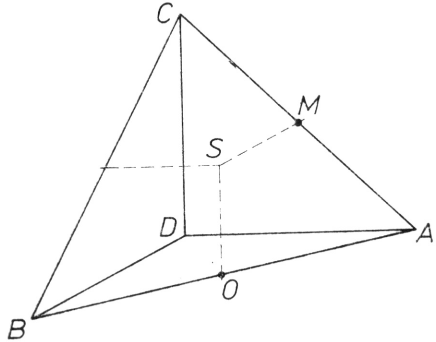
Protože $|DA'| = \dfrac{(k+1)\,|AA'|}{k}$, je $|DA'| = \dfrac{k+1}{2k+1}\,|DA|$,

dále je $|DB'| = \dfrac{|DB|}{2}$. Je proto obsah trojúhelníku $DA'B'$ roven $\dfrac{k+1}{2(2k+1)}$ násobku obsahu trojúhelníku DAB. Uvážíme-li ještě poměr výšek obou čtyřstěnů k těmto stěnám, vidíme, že hledaný poměr je $\dfrac{k+1}{4(2k+1)}$.



Obr. 59

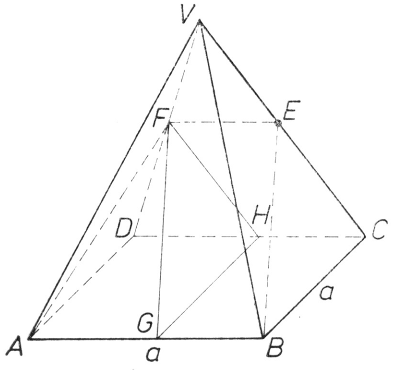
88. Kulová plocha $\varkappa$, která prochází body A, B, C, D, protíná rovinu ABD v kružnici opsané pravoúhlému trojúhelníku ABD, střed O této kružnice je středem přepony AB (obr. 60). Proto leží střed S kulové plochy $\varkappa$ na kolmici vedené bodem O k rovině ABD. Stejně tak leží bod S na přímce



Obr. 60

rovnoběžné s přímkou DB procházející středem M úsečky AC. Úloha přímo vybízí k analytickému řešení. Zvolíme-li počátek soustavy souřadnic v bodě D, přímky DA, DB, DC za osy x, y, z, je $A = [a, 0, 0]$, $B = [0, b, 0]$, $C = [0, 0, c]$.
Pak je $O = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right]$, $U = \left[\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right]$, $T = \left[\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right]$
a $S = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right]$, takže $|ST| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{4}$, zatímco
pro poloměr r kulové plochy $\varkappa$ je $r = |SA| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$,
takže $r = 2|ST|$.

89. Označme a délku strany čtverce $ABCD$ a v výšku jehlanu $VABCD$, jehož objem je tedy $V = \frac{1}{3} a^2 v$. Je $EF \parallel AB$ a $|EF| : |CD| = q$, tedy $|EF| = aq$ (obr. 61). Veďme bodem F rovinu rovnoběžnou s rovinou BEC, její průsečíky s přímkami



Obr. 61

AB a DC označíme G a H. Dostaneme tak trojboký hranol $FGHEBC$ a čtyřboký jehlan $ADHGF$. Objemy těchto těles jsou $V_1 = \dfrac{Pv'}{2}$, kde je P obsah obdélníku $HGBC$, v' je výška hranolu, tj. vzdálenost bodu E od roviny ABC, tedy $V_1 = \frac{1}{2}a^2q(1-q)\,v$ a $V_2 = \frac{1}{3}\,a^2(1-q)^2 v$, sečtením dostaneme objem tělesa $AFDBEC$, který se rovná $a^2v\,\dfrac{(1-q)(2+q)}{6}$.

Odečtením tohoto částečného výsledku od objemu celého jehlanu dostaneme objem jehlanu $AFEBV$, který se tudíž rovná hodnotě $\dfrac{a^2vq\,(1+q)}{6}$, hledaný poměr je pak

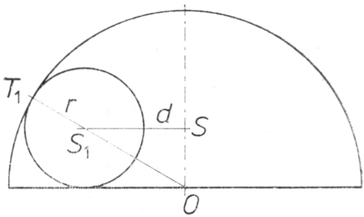
$$\frac{q\,(1+q)}{(1-q)\,(2+q)}.$$

90. Předpokládejme nejdříve, že řešení úlohy existuje. Označme O střed polokoule a S_1, S_2, S_3 středy vepsaných kulových ploch, r jejich poloměr. Body S_1, S_2, S_3 tvoří rovnostranný trojúhelník o straně $2r$, takže jejich vzdálenosti d od středu S rovnostranného trojúhelníku $S_1S_2S_3$ jsou $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Rovina SOS_1 protne polosféru v polokružnici o poloměru 10 a první vepsanou plochu kulovou v kružnici o poloměru r (obr. 62). Tato kružnice se dotýká uvažované polokružnice v bodě T_1, body O, S_1, T_1 leží v přímce, takže $|OS_1| = 10 - r$. Zároveň je

$$|OS_1|^2 = r^2 + \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2, \text{ tedy } r = \frac{5\left(\sqrt{21} - 3\right)}{2},$$

$d = 5\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)$. Obráceně se dá ukázat, že tři sféry o vypočteném poloměru r, jejichž středy mají od osy polokoule vzdálenost d a tvoří rovnostranný trojúhelník, jsou řešením úlohy.



Obr. 62