III. Úlohy logického charakteru

46. Sedm spolužáků si slíbilo na začátku prázdnin, že každý z nich napíše třem dalším zprávu o svých příhodách. Jeden z nich si vzpomněl, že by měl každý žák dostat listy právě od těch tří spolužáků, kterým napsal. Je to možné?

Řešení. Kdyby to bylo možné, musili by si vždy určití dva žáci vyměnit dva dopisy. To znamená, že by všech dopisů musil být sudý počet. Ale víme, že každý žák napsal a odeslal 3 dopisy; celkem tedy bylo vyměněno $7 . 3 = 21$ dopisů, což je lichý počet. Dodatečné podmínce tedy nelze vyhovět. Tato úloha nevyžaduje celkem žádný výpočet; je třeba jen uvažovat. Zároveň je to pěkný příklad úlohy neřešitelné.

47. Šachový kroužek uspořádal turnaj, v němž každý z kamarádů Jirka, Karel, Tonda obsadil právě jedno ze tří prvních míst. Určete pořadí chlapců v šachovém turnaji, víte-li, že právě jeden z výroků

a) Jirka je třetí,

b) Tonda není druhý,

c) Karel není třetí

je pravdivý.

Řešení. Sestavme tabulku, která udává, které z výroků *a*, *b*, *c* jsou pravdivé pro jednotkové permutace *JKT*, *JTK*, *KJT*, *KTJ*, *TJK*, *TKJ*, které udávají pořadí soutěžících.

JKT	*JTK*	*KJT*	*KTJ*	*TJK*	*TKJ*
b, *c*		*b*, *c*	*a*, *c*	*b*	*a*, *b*, *c*

Řešení je tedy jediné: permutace *TJK*.

48. Dopravní síť města se skládá ze tří trolejbusových linek. Celková délka trolejbusového vedení je 13 km. Jednotlivé linky číslované **1**, **2**, **3** mají po řadě délky 5,7 km, 5,8 km, 6,9 km. Linky 1 a **2** mají společný úsek délky 1,8 km, linky 2 a 3 mají společný úsek délky 2,3 km. Linky 3 a 1 mají společný úsek délky 2,7 km. Rozhodněte, zda existuje úsek společný všem třem linkám. Jestliže ano, vypočtěte jeho délku. Načrtněte plánek všech tří tratí a vpište do něho délky jednotlivých úseků.

Řešení (všecky délky jsou udány v kilometrech). Označíme:

a) d_1, d_2, d_3 délky těch částí tratí 1, 2, 3, v nichž jezdí každá linka sama;

b) d_{12}, d_{23}, d_{31} délky těch úseků, jimiž jezdí právě dvě linky (označené indexy);

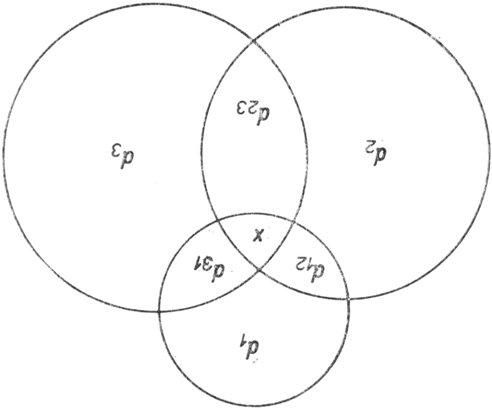
c) x délku úseku, jímž jezdí všecky tři trati.

Úlohu lze řešit velmi jednoduše bez soustavy rovnic. Zobrazme délky tratí kruhy a délky jejich společných úseků částmi kruhů, jako na obr. 3a. Sečteme-li délky jednotlivých linek, dostaneme číslo

$$5{,}7 + 5{,}8 + 6{,}9 = 18{,}4, \tag{1}$$

jež je o 5,4 větší než skutečná délka tratí. Tento rozdíl lze snadno vysvětlit. Z obr. 3a plyne, že v součtu (1) jsme dvakrát započetli úseky d_{12}, d_{23}, d_{31} a úsek x dokonce třikrát. Tedy

$$d_{12} + d_{23} + d_{31} + 2x = 5{,}4. \tag{2}$$



Obr. 3a

Sečteme-li délku společného úseku linek 1 a 2 s délkou společného úseku linek 2 a 3 a s délkou společného úseku linek 3 a 1, dostáváme

$$1{,}8 + 2{,}3 + 2{,}7 = 6{,}8.$$

Z obr. 3a je zřejmé, že

$$d_{12} + d_{23} + d_{31} + 3x = 6{,}8. \tag{3}$$

Podle (2) a (3) je tedy

$$x = 6{,}8 - 5{,}4 = 1{,}4.$$

Nyní již snadno pomocí obr. 3a vypočteme

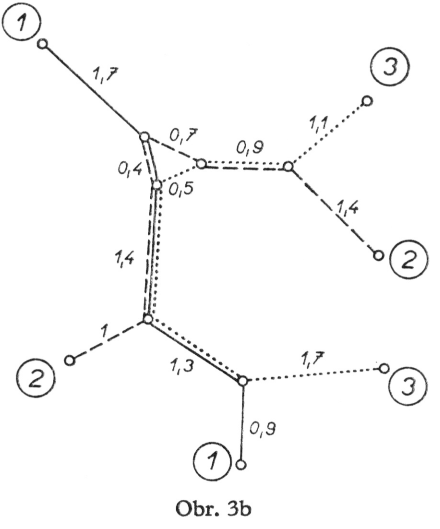
$d_{12} = 1{,}8 - 1{,}4 = 0{,}4,$ $\qquad$ $d_{23} = 2{,}3 - 1{,}4 = 0{,}9,$

$d_{31} = 2{,}7 - 1{,}4 = 1{,}3,$

$d_1 = 5{,}7 - 3{,}1 = 2{,}6,$ $\qquad$ $d_2 = 5{,}8 - 2{,}7 = 3{,}1,$

$d_3 = 6{,}9 - 3{,}6 = 3{,}3.$

Náčrtek plánku tří linek je na obr. 3b.



Obr. 3b

49. Když jsem vkročil na náměstí, odbíjely právě hodiny na radnici 8 hodin, kostelní hodiny však už ukazovaly 8^{02}. Když jsem přešel náměstí a dorazil k zámku, bylo na zámeckých hodinách teprve 8^{01}, ale na kostelních hodinách už 8^{06}. Mám však už s hodinami v našem městě své zkušenosti: zámecké nikdy nejdou napřed, radniční zato vždycky jdou napřed a čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy víc než o 3 minuty. Určete (na minuty), jaký byl správný čas, když jsem vkročil na náměstí.

Řešení. Z údajů kostelních hodin je vidět, že od vstupu na náměstí do příchodu k zámku uplynuly 4 minuty. Tudíž v okamžiku vstupu na náměstí bylo na zámeckých hodinách 7^{57} h. Zámecké hodiny nikdy nejdou napřed, takže ukazují-li 7^{57}, jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{57}, 7^{58}, 7^{59}, 8^{00}, 8^{01}, \ldots \qquad (1)$$

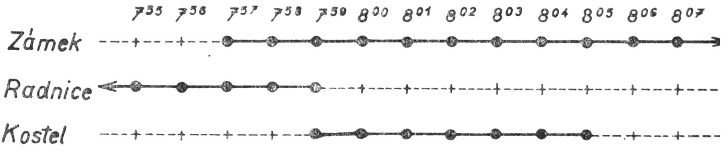
Radniční hodiny jdou vždy napřed, a proto když odbíjejí 8 hodin, ještě 8 hodin není a jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje:

$$7^{59}, 7^{58}, 7^{57}, 7^{56}, \ldots \qquad (2)$$

Čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty, tudíž, když tyto hodiny ukazují 8^{02}, jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{59}, 8^{00}, 8^{01}, 8^{02}, 8^{03}, 8^{04}, 8^{05}. \qquad (3)$$

Porovnáme-li možné časové údaje všech tří hodin, tj. množiny (1), (2) a (3), vidíme, že správný čas (na minuty) byl 7^{59} h. Tento výsledek lze také dostat pomocí grafického znázornění (obr. 4).



Obr. 4

50. Je dána tabulka přirozených čísel připomínající tabulku pro sázení ve sportce.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	**11**	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	**27**	28
29	30	31	32	33	34	**35**
36	37	38	39	**40**	41	42
43	44	**45**	46	47	48	49

Vybereme-li z tabulky sedm čísel tak, aby z každého řádku i z každého sloupce bylo vybráno jediné číslo, pak je součet vybraných čísel vždy týž. Dokažte. (Jeden možný výběr je vyznačen v tabulce tučně.)

Řešení. Postup vybírání čísel si můžeme představit takto: Na každé pole 1. řádku položíme jednu minci. Potom jednu minci necháme v 1. řádku a ostatní mince posuneme ve směru sloupců tak, aby každá z nich ležela právě v jednom řádku. Čísla zakrytá mincemi potom splňují požadavky výběru. Když mince ležely v 1. řádku, byl součet čísel, která zakrývaly,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

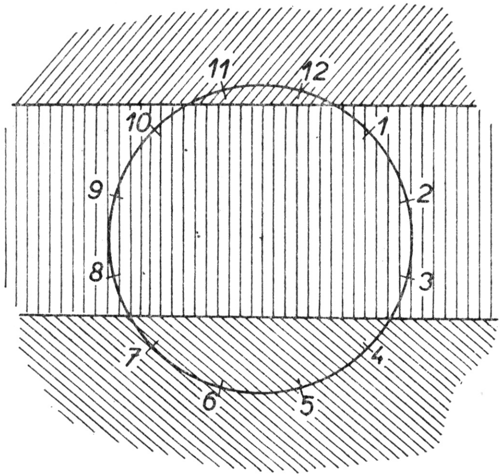
Tím, že jsme jednu minci posunuli do 2. řádku, se součet čísel zakrytých mincemi zvětšil o 7; podobně posunem do 3. řádku o $2 . 7$, ..., posunem do 7. řádku o $6 . 7$. Součet čísel zakrytých mincemi se tedy celkem zvětšil o

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) . 7 = 21 . 7 = 147.$$

Součet čísel vybraných tak, jak požaduje úloha, je tedy vždy

$$28 + 147 = 175.$$

51. Na obrázku (obr. 5) je znázorněn hodinový ciferník a dvě rovnoběžné přímky, z nichž žádná neprochází žádným z bodů 1 až 12. Změňte polohu přímek tak, aby součet čísel ležících v každé ze dvou vyšrafovaných polorovin i ve vyšrafovaném pásu byl týž.



Obr. 5

Řešení. Nejdříve zjistíme součet všech čísel na ciferníku:

$$1 + 2 + \ldots + 12 = 78 = 3.26.$$

Součet v každé z částí ciferníku musí být tedy 26. Určeme nejprve tu část, do níž patří číslo 12. Musíme rozlišit dva případy:

1. Nechť číslo 12 leží v části, jež je polorovinou. Experimentováním zjistíme, že

$$26 = 11 + 12 + 1 + 2.$$

Jedna z hledaných polorovin obsahuje tedy body ciferníku označené 1, 2, 11, 12. Analogicky zjistíme, že

$$26 = (10 + 9) + (3 + 4),$$

takže pás obsahuje body ciferníku označené 3, 4, 9, 10 a zbývající polorovina body ciferníku označené 5, 6, 7, 8.

2. Experimentováním se přesvědčíme, že 12 nemůže ležet v rovnoběžkovém pásu, neboť součty

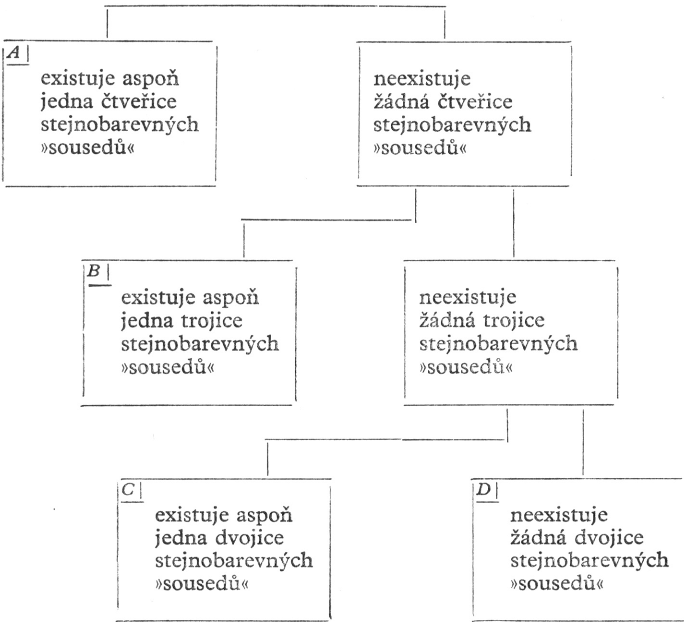
$$(11 + 12) + 3, 12 + (5 + 4 + 3 + 2), (12 + 1) + (7 + 6),$$

$$(12 + 1 + 2) + (6 + 5), (12 + 1 + 2 + 3) + 8$$

nevedou k řešení.

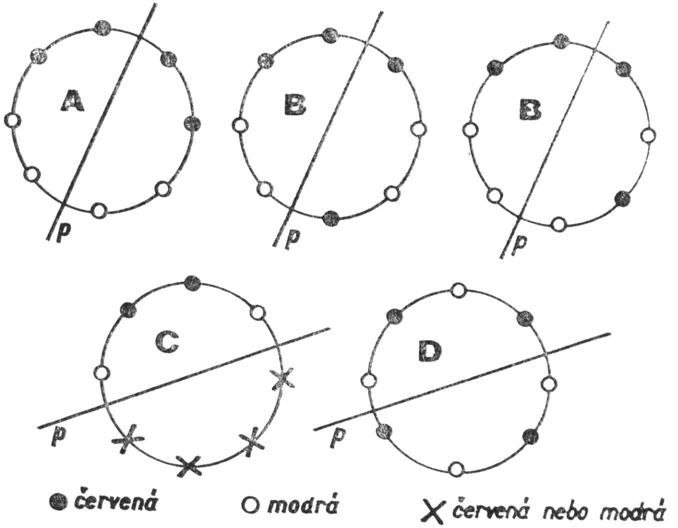
52. Na kružnici k leží 8 různých bodů, z nichž jsou 4 červené a 4 modré. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takovou přímku p, že uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p leží po 2 červených a po 2 modrých bodech.

Řešení. Při hledání přímky p musíme přihlížet k tomu, kolik stejnobarevných bodů je »sousedy«. Nejprve tedy přistoupíme k systematickému výčtu všech možností (dichotomické třídění). Třídění zaznamenáme do schématu zvaného **strom:**



Na obr. 6 jsou nakresleny koncové případy *A*, *B*, *C*, *D*. V případě *B* jsou dvě možnosti. V případě *C* musí být »sousedi« dvou červených dva modré, na uspořádání zbývajících čtyř nezáleží.

Na obr. 6 jsou také naznačeny polohy přímky *p*. Získali jsme je experimentálně.



Obr. 6

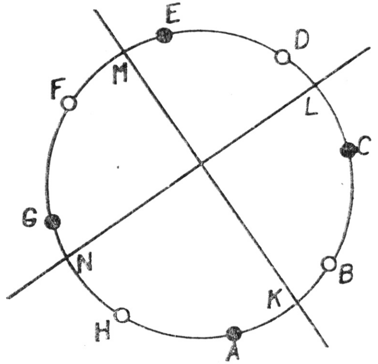
53. Osmiúhelník vepsaný dané kružnici má čtyři vrcholy červené a čtyři modré; přitom žádné tři sousední vrcholy nejsou téže barvy. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takové dvě různoběžné přímky, aby uvnitř každého úhlu jimi určeného ležel jeden červený a jeden modrý vrchol.

Řešení. Rozlišíme dva případy.

I. Žádné dva sousední vrcholy nemají tutéž barvu.

II. Lze najít aspoň jednu dvojici sousedních vrcholů téže barvy.

V případě I se barvy vrcholů střídají. Na kružnici zvolíme čtyři body K, L, M, N tak, aby každý z nich odděloval dvě dvojice červená-modrá a spojíme je přímkami ob jeden (obr. 7).



Obr. 7

V případě II nechť jsou např. body A, B červené; pak jsou vrcholy C, H modré. Přehled barvy vrcholů si zapíšeme »tabulkou«

$$\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \\ \hline \text{č} & \text{č} & \text{m} & & & & & \text{m} \end{array}, \qquad (1)$$

kde v druhé řádce je zaznamenána barva. V tabulce (1) nemůže být červená žádná z dvojic D, E a F, G; pak by totiž byla modrá zbývající dvojice a tři sousední vrcholy by byly modré. »Barvení« vrcholů v tabulce (1) lze tedy **dokončit** některým z těchto způsobů:

$A \downarrow B$		$C \downarrow D$		$E \downarrow F$		$G \downarrow H$	
č	č	m	č	m	č	m	m
č	č	m	č	m	m	č	m
č	č	m	m	č	č	m	m
č	č	m	m	č	m	č	m

Konstrukce bodů K, L, M, N, které je třeba spojit přímkami, je ve všech čtyřech případech zřejmá; ukazují ji šipky.

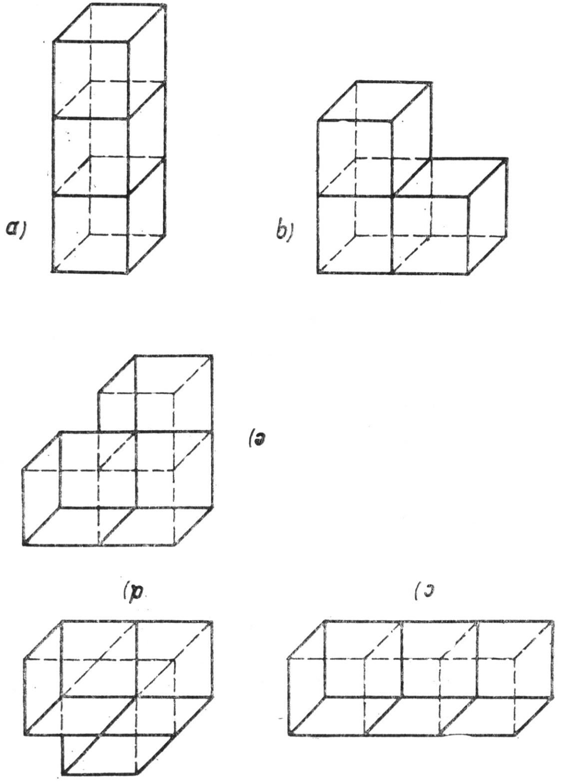
54. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou opatřeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtů ok na dvou protějších stěnách je týž. K hrací kostce přilepíme dvě další stejné hrací kostky vždy celými stěnami. Máme zjistit, jak máme kostky slepit a jak slepenec položit na stůl (aspoň jednou stěnou), aby počet viditelných ok byl a) co největší, b) co nejmenší. (Za viditelné pokládáme všecky stěny slepence, které nepřiléhají ke stolu.)

Řešení. Popsaným slepováním hracích kostek lze získat právě dva různé tvary slepenců; znázorňují je obr. 8 a), b). Tyto útvary můžeme postavit na stůl celkem pěti způsoby. K případům z obr. 8 a), b) přibývají totiž další tři možnosti znázorněné na obr. 8 c), d), e).

Před zjišťováním počtů viditelných ok je třeba spočítat, kolik je součet počtu ok na dvou protějších stěnách. Rovná se sedmi, neboť

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) : 3 = 7.$$

Protější stěny totiž tvoří právě tři různé dvojice.



Obr. 8

Největší a nejmenší možné počty viditelných ok u jednotlivých sestav zapíšeme do tabulky:

Sestava z obr.	Počet viditelných ok	
	největší	nejmenší
8 a)	48	43
8 c)	49	28
8 b)	51	33
8 d)	51	26
8 e)	52	39

Největší počet viditelných ok může být 52 (u sestavy podle obr. 8 e)) a nejmenší 26 (podle obr. 8 d)).

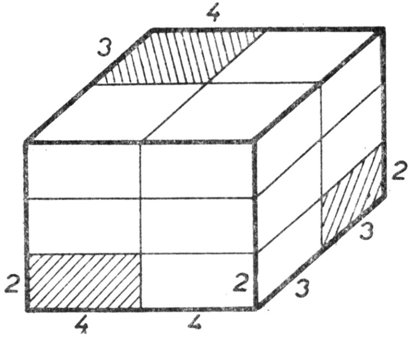
55. Máme 12 kamenů stavebnice; každý z nich je kvádr o rozměrech 2, 3, 4 centimetry. Z těchto kamenů sestavujeme kvádry, a to tak, že vždy shodné stěny kamenů musí být přiloženy k sobě; musíme použít vždy všech 12 kamenů.

a) Udejte rozměry všech kvádrů, které lze sestavit.

b) U každého kvádru udejte, kolika způsoby ho sestavit.

Řešení. Hlavní věcí při řešení úlohy je najít nějaký systém, jak udat všecky kvádry, které z kamenů lze vytvořit. Pak vypočteme rozměry každého z nich a snadno zodpovíme otázku b).

Ze způsobu, jak jsou kvádry tvořeny, vyplývá, že každý kvádr má dvě protější stěny složeny z obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm, další dvě protější stěny složené z obdélníků o rozměrech 2 a 4 cm a konečně další dvě stěny složené z obdélníků o rozměrech 2 a 3 cm. Obrázek 9 ukazuje jeden z »vystavěných« kvádrů; dolní a horní stěna jsou zde složeny ze čtyř obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm, přední a zadní stěny ze šesti obdélníků o rozměrech 2 a 4 cm, pravá a levá stěna ze šesti obdélníků o rozměrech 2 a 3 cm.



Obr. 9

Tabulka (4)

Číslo případu	Počet vrstev x	Počet řad y	Počet sloupců z	Rozměry vytvořeného kvádru v cm		
				$2x$	$3y$	$4z$
1	1	1	12	2	3	48
2	1	2	6	2	6	24
3	1	3	4	2	9	16
4	1	4	3	2	12	12
5	1	6	2	2	18	8
6	1	12	1	2	36	4
7	2	1	6	4	3	24
8	2	2	3	4	6	12
9	2	3	2	4	9	8
10	2	6	1	4	18	4
11	3	1	4	6	3	16
12	3	2	2	6	6	8
13	3	4	1	6	12	4
14	4	1	3	8	3	12
15	4	3	1	8	9	4
16	6	1	2	12	3	8
17	6	2	1	12	6	4
18	12	1	1	24	3	4

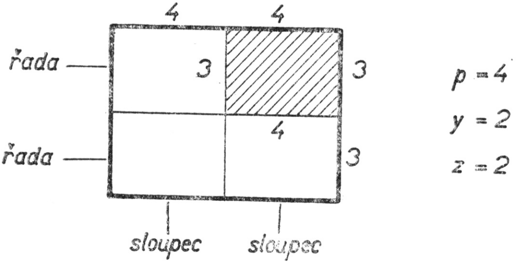
Kvádry budeme tvořit tak, že ze stěny složené z obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm vyjdeme jako z podstavy, počet obdélníků označíme p. Nad touto stěnou je x »vrstev« výšky 2 cm. Pro čísla p, x zřejmě platí

$$p \cdot x = 12, \tag{1}$$

neboť nad každým obdélníkem podstavy je x kamenů a počet všech kamenů stavebnice je 12.

Podstava kvádru složená z p obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm se dá rozdělit v »řady« a »sloupce«, jak ukazuje obr. 10. Počet řad (každá z nich má šířku 3 cm) označíme y; počet sloupců (každý z nich má šířku 4 cm) označíme z; pak platí zřejmě

$$p = yz. \tag{2}$$



Obr. 10

Tabulka (5)

Případy z (4)	Rozměry kvádru v cm
1	2, 3, 48
2	2, 6, 24
3	2, 9, 16
4	2, 12, 12
5	2, 8, 18
6	2, 4, 36
7, 18	3, 4, 24
8, 13, 17	4, 6, 12
9, 15	4, 8, 9
10	4, 4, 18
11	3, 6, 16
12	6, 6, 8
14, 16	3, 8, 12

Spojením vztahů (1), (2) dostaneme

$$xyz = 12. \tag{3}$$

Čísla x, y, z jsou podle (3) dělitelé čísla 12; např. na obr. 9 je $x = 3, y = 2, z = 2$.

Sestavíme nyní tabulku (4) pro všechny možnosti rozkladu čísla 12 podle (3); všimněme si, jak je tabulka konstruována. Nyní vybereme z tabulky (4) kvádry o týchž rozměrech a sestavíme je do tabulky (5); rozměry jsou tu uvedeny vzestupně, čísla případů podle tabulky (4) udávají počet způsobů, kterými lze vytvořit každý z kvádrů. Tím jsou rozřešeny úlohy a) i b).

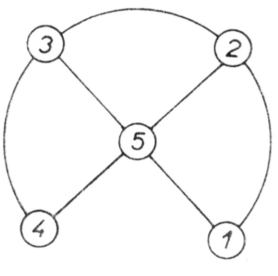
56. Na obr. 11 je znázorněn hrací plán podkovy, hry francouzských dětí. Obsahuje 5 polí označených čísly 1 až 5.

Sousedními poli se nazývají dvě pole spojená úsečkou nebo obloukem. Hru hrají dva hráči, červený ($\check{C}$) a modrý (M), z nichž každý má dva kameny své barvy. Počáteční postavení zaujmou tak, že střídavě kladou po jednom kamenu své barvy na pole 1 až 5; jedno pole zůstane volné. Při samotné hře táhnou hráči střídavě, vždy jeden kámen na sousední volné pole. Vyhrává hráč, který znemožní svému protivníkovi další tah.

a) Kolik počátečních postavení má hra podkova?

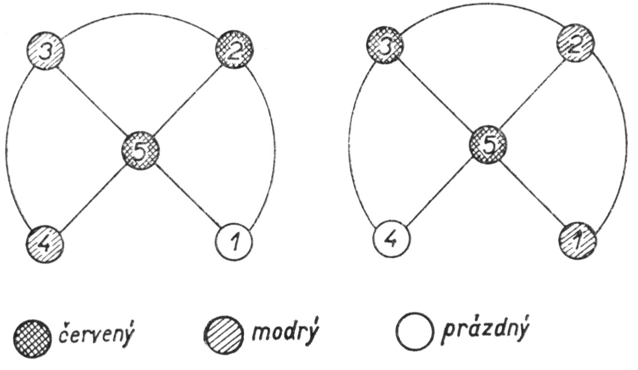
b) Najděte všechna postavení, z nichž modrý nemůže dále táhnout.

c) Je dáno postavení $\check{C}14$, $M35$; červený táhne. Zapište další průběh hry, jestliže červený svým třetím tahem vyhrál.



Obr. 11

Řešení. a) **Jedno** z polí 1 až 5 zůstane neobsazeno, to je 5 možností. Zbývající čtyři pole jsou obsazena dvěma modrými a dvěma červenými kameny, to je celkem 6 možností. Všech počátečních postavení je tedy $5 . 6 = 30$.



Obr. 12

b) Jsou to jedině postavení *Č*25, *M*34 a *Č*35, *M*12 (obr. 12).

Odůvodnění: Je-li volné pole 5, může táhnout *Č* i *M*.
Je-li *M* na 5, může táhnout na některé z polí 1 až 4.
Je tedy *Č* na 5 a stačí vyzkoušet *Č*15 a *Č*25.
Při *Č*15 může *M* vždy táhnout.
Při *Č*25 nemůže *M* táhnout jedině při *M*34.

c) Zápis hry je

*Č*14, *M*35 → *Č*24, *M* 35 → *Č*24, *M*13 → *Č*45, *M*13 → *Č*45,
táhne *Č* | táhne *M* | táhne *Č* | táhne *M* (chyba)

*M*12 → *Č*35, *M*12
táhne *Č*

57. Zdeněk krátil při výpočtech zlomky takto:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{1\cancel{99}}{\cancel{99}5} = \frac{1}{5}.$$

Učitel mu tento způsob »krácení« pochopitelně neschvaluje, ale Zdeněk se hájí tím, že výsledek je správný. Najděte všechny zlomky s a) dvojcifernými, b) trojcifernými čitateli a jmenovateli, které mohl Zdeněk »krátit« svým způsobem a dostal správný výsledek.

Řešení. a) Čitatel i jmenovatel zlomku, který je možno podle Zdeňka »krátit«, jsou dvojciferná čísla, a proto můžeme takový zlomek psát ve tvaru

$$\frac{10a + b}{10b + c}.$$

V případech, kdy má Zdeněk pravdu, platí

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}, \tag{1}$$

přičemž čísla a, b, c jsou přirozená a menší než 10. Z rovnice (1) plyne

$$c = \frac{10ab}{9a + b}. \tag{2}$$

O číslech a, b, c víme, že jsou přirozená a menší než 10, přičemž číslo c splňuje vztah (2). Chceme-li najít všechny zlomky, kde

je možno »krátit« Zdeňkovým způsobem, musíme při volbě čísel a, b postupovat tak, abychom vystřídali všechny možnosti.
1. Zvolme $a = 1$. Pro b a c sestavme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\mathbf{\frac{10}{10}}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\mathbf{\frac{60}{15}}$	$\frac{70}{16}$	$\frac{80}{17}$	$\mathbf{\frac{90}{18}}$

Obdrželi jsme řešení: $a = b = c = 1$, tj. $\frac{11}{11} = \frac{1}{1}$,

$a = 1, b = 6, c = 4$, tj. $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$,

$a = 1, b = 9, c = 5$, tj. $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$.

2. Zvolme $a = 2$. Pro b, c sestavíme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\frac{20}{19}$	$\mathbf{\frac{40}{20}}$	$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\mathbf{\frac{120}{24}}$	$\frac{140}{25}$	$\frac{160}{26}$	$\frac{180}{27}$

Našli jsme další řešení: $a = b = c = 2$, tj. $\frac{22}{22} = \frac{2}{2}$,

$$a = 2, b = 6, c = 5, \text{ tj. } \frac{26}{65} = \frac{2}{5}.$$

3. až 9. Volíme-li postupně $a = 3, 4, \ldots, 9$, najdeme další zlomky, pro něž platí $a = b = c$, tj.

$$\frac{33}{33} = \frac{3}{3}, \frac{44}{44} = \frac{4}{4}, \ldots, \frac{99}{99} = \frac{9}{9},$$

a ještě případ

$$a = 4, b = 9, c = 8, \text{ tj. } \frac{49}{98} = \frac{4}{8}.$$

Závěr. Zlomky $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \ldots, \frac{99}{99}, \frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}$

jsou všechny zlomky vyhovující úloze.

b) Postupujeme obdobně jako v části a). V tomto případě jde o nalezení přirozených čísel a, b, c menších než 10, které splňují rovnost

$$\frac{100a + 10b + b}{100b + 10b + c} = \frac{a}{c}.$$

Snadnou úpravou zjistíme, že pro c platí

$$c = \frac{10ab}{9a + b},$$

tj. vzorec (2). Je tedy možno využít výsledky z části a). Všechny zlomky, které splňují část b) naší úlohy, jsou:

$$\frac{111}{111}, \frac{222}{222}, \ldots, \frac{999}{999}, \frac{166}{664}, \frac{199}{995}, \frac{266}{665}, \frac{499}{998}.$$

58. V písemné práci se vyskytl lomený výraz

$$\frac{ax + b}{x + c}.$$

Luděk se pamatuje, že a, b, c byla určitá čísla a že při dosazení $x = 1$ dostal výsledek 1, při dosazení $x = -1$ dostal -1, a když dosadil $x = 2$, zjistil, že se nedá hodnota daného výrazu vypočítat. Pomozte mu najít čísla a, b, c.

Řešení. Z textu úlohy dostaneme

$$\frac{a + b}{1 + c} = 1, \quad \frac{-a + b}{-1 + c} = -1.$$

Hodnotu výrazu nebylo možno vypočítat pro $x = 2$, protože jmenovatel byl roven nule, tj. $c + 2 = 0$. Z uvedených rovnic dostaneme

$$a = -2, b = 1, c = -2.$$

Lomený výraz, s kterým se Luděk potýkal, byl tedy

$$\frac{1 - 2x}{x - 2}.$$

59. Žák měl řešit rovnici

$$\frac{x+2}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x+1)}. \tag{1}$$

Opsal ji však s chybami: v čitateli na levé straně napsal chybně druhý člen a v jmenovateli na pravé straně místo znaménka plus napsal znaménko minus. Přesto při správném řešení chybně opsané rovnice dostal správné řešení (kořen) dané rovnice. Jak zněla chybně opsaná rovnice?

Řešení. Tato úloha je výstrahou pro učitele, kteří kontrolují jen výsledky; jak je vidět, může být výpočet nesprávný, ale výsledek je přesto »správný«. Jinak patří tato úloha do skupiny úloh »na pátrání po chybě«, které bývají velmi poučné. Nejprve zjistíme, jaké vlastně řešení má daná rovnice (1).

Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} 7(x+1)(x+2) &= (7x+23)(x-2) \\ 7(x^2+3x+2) &= 7x^2+9x-46 \\ 12x &= -60 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = -5$ do pravé i levé strany rovnice, dostaneme vždy $\frac{1}{4}$; zkouška tedy »vyšla«. Zkoušku jsme museli provést, abychom se mimo jiné přesvědčili, že číslo $x = -5$ neanuluje jmenovatele zlomků z rovnice (1).

Nyní: jak opsal žák rovnici (1)? Podle textu úlohy místo čísla 2 v čitateli na levé straně napsal jakési neznámé číslo a; v jmenovateli na pravé straně rovnice (1) spletl znaménko.

Chybně opsaná rovnice tedy zněla

$$\frac{x + a}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x - 1)}. \qquad (2)$$

Číslo a bylo takové, že rovnice (2) měla »správné« řešení $x = -5$. Dosadíme-li do (2) $x = -5$, vyjde

$$\frac{a - 5}{-12} = \frac{-7}{-42},$$

tj. po úpravě $a - 5 = -2$ neboli $a = 3$. Chybně opsaná rovnice tedy zněla

$$\frac{x + 3}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x - 1)}.$$

Jejím řešením se přesvědčíme, že má skutečně řešení $x = -5$. Žák měl tedy šťastnou ruku: obě chyby při opisování »se zrušily«.

60. Žák dostal za úlohu umocnit trojčlen $(a + 2b - 3)^2$ a vyšlo mu $a^2 + 4b^2 - 9$. »Ale to je přece špatně,« namítal učitel, »dosaď si na zkoušku za a i b nějaká určitá přirozená čísla.« Žák poslechl a zkouška mu vyšla. Která čísla dosadil?

Řešení. Vynásobením nebo podle vzorce pro druhou mocninu trojčlenu zjistíme, že správný výsledek je

$$(a + 2b - 3)^2 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b. \qquad (1)$$

Jsou-li a, b přirozená čísla, která žák dosadil, platí podle (1)

$$a^2 + 4b^2 - 9 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b, \qquad (2)$$

neboť zkouška mu »vyšla«, jak praví text úlohy.
Všechny členy v (2) převedeme na pravou stranu; vyjde

$$4ab - 6a - 12b + 18 = 0,$$

po dělení dvěma

$$2ab - 3a - 6b + 9 = 0.$$

Postupným vytýkáním dostaneme

$$a(2b - 3) - 3(2b - 3) = 0,$$
$$(a - 3)(2b - 3) = 0. \qquad (3)$$

Pro žádné přirozené číslo b neplatí $2b - 3 = 0$, neboť pro každé přirozené b je $2b - 3$ vždy číslo liché a nula je číslo sudé. Z rovnice (3) tedy plyne $a - 3 = 0$, tj. $a = 3$. Dosadíme-li za a číslo 3 a za b libovolné přirozené číslo, je

$$(a + 2b - 3)^2 = (2b)^2 = 4b^2,$$
$$a^2 + 4b^2 - 9 = 4b^2;$$

zkouška tedy opravdu »vyjde«.

Odpověď zní. Žák dosadil $a = 3$ a za b nějaké přirozené číslo.

61. Olda si kontroloval po hodině úlohu z písemky: »Měli jsme upravit výraz

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1};$$

v čitateli mi vyšel nějaký mnohočlen $ax^3 + bx^2 + cx + d$, koeficienty si již nepamatuji; ve jmenovateli bylo $2x^2 + x - 1$. Vyšla mi dobře zkouška pro $x = 0$, 1 a 2, ale pro $x = 3$ už ne: to vyšlo na levé straně 3,7 a na pravé 4.«

Dovedete z těchto údajů zjistit koeficienty a, b, c, d a rozhodnout, zda Oldovo řešení bylo správné?

Řešení. Rozřešíme znovu Oldův příklad.

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1} = \frac{(x^2 - 3)\,(2x - 1) + (x + 1)\,(6x - 7)}{(x + 1)\,(2x - 1)}$$

V čitateli vyjde po vynásobení a sečtení

$$2x^3 + 5x^2 - 7x - 4,$$

ve jmenovateli vyjde skutečně $2x^2 + x - 1$, jak tvrdil Olda. Pro $x = 0$ mělo vyjít na levé i pravé straně číslo 4. Oldovi vyšlo $-d$; protože mu zkouška souhlasila, bylo $d = -4$.

Pro $x = 1$ mělo vyjít -2. Olda dostal $\dfrac{a + b + c - 4}{2}$; protože mu zkouška souhlasila, bylo $\dfrac{a + b + c - 4}{2} = -2$, tj.

$$a + b + c = 0. \tag{1}$$

Pro $x = 2$ mělo vyjít 2. Olda dostal $\dfrac{8a + 4b + 2c - 4}{9}$;

protože mu zkouška souhlasila, bylo $\dfrac{8a + 4b + 2c - 4}{9} = 2$,

tj. po úpravě

$$4a + 2b + c = 11. \qquad (2)$$

Konečně pro $x = 3$ mělo vyjít 3,7. Olda dostal

$$\frac{27a + 9b + 3c - 4}{20} = 4,$$

tj. po úpravě

$$9a + 3b + c = 28. \qquad (3)$$

Dosadíme-li z (1) $c = -a - b$ do (2) a (3), dostaneme soustavu

$$3a + b = 11, \qquad (4)$$

$$4a + b = 14.$$

Odečtením první rovnice (4) od druhé vyjde $a = 3$, dále z první rovnice (4) $b = 2$ a z (1) $c = -5$.

Oldův nesprávný výsledek byl tedy

$$\frac{3x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{2x^2 + x - 1}.$$