[dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole

33. ročník Matematické olympiády

In: Vladimír Repáš (editor); Anna Pribišová (editor); Juraj Vantuch (editor): [dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole. (4.-7. ročník). (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 39–51.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405304

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

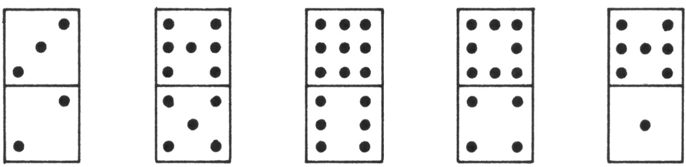
33. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

4. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1983/1984

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Na obrázku 32 je 5 kostek domina. První čtyři vyhovují určité zákonitosti, pátá tuto zákonitost nesplňuje. Proč?



Obr. 32

MOZ 4 - I - 2

Maminka potřebuje na zaváření odměřit přesně 4 litry vody. Má však jen třílitrovou a pětilitrovou nádobu. Jak pomocí těchto nádob odměří přesně 4 litry vody? Uveďte dva způsoby.

MOZ 4 - I - 3

Míša a Fanda byli koumáci a nové míry délky nazvali „peromírou" a „tužkomírou". Míša zjistil, že jejich lavice má délku 8 tužkoměr. Fanda naměřil 12 peroměr. Oba měli pravdu. Určete délku jejich lavice, víte-li, že je delší než 120 cm, ale kratší než 150 cm. (Délku peromíry a tužkomíry je možné vyjádřit v celých centimetrech.) Kolik centimetrů měřila jejich tužkomíra a peromíra?

MOZ 4 - I - 4

Do rovností

$$\begin{aligned} D + D + E &= 24 \qquad & B + B - D &= 24 \\ A + A + D &= 24 \qquad & C + C + F &= 24 \\ A + C + E &= 24 \qquad & A - D + G &= 24 \end{aligned}$$

dosaďte čísla za jednotlivá písmena tak, aby byly splněny. Je třeba dodržet zásadu dosazovat za stejná písmena stejná čísla a za různá písmena různá čísla. Dosazovaná čísla mohou být i víceciferná.

MOZ 4 - I - 5

15 chlapců si v šatně odložilo 33 kusů oděvu – čepice a rukavice. Jiné části oděvu v šatně nebyly. Čepici měl každý chlapec, rukavice ne. Kolik chlapců nemělo rukavice?

MOZ 4 - I - 6

Závodím za naši školu v běhu na krátké tratě. V posledním období jsem se zúčastnil deseti závodů. Ani v jednom z nich jsem neskončil hůře než třetí. Přitom jsem dosáhl dvakrát více druhých míst než prvních. Pokud by se umístění hodnotilo známkami 1, 2, 3 (1 za první, 2 za druhé, 3 za třetí místo), měl bych průměr přesně 2,2. Jakého umístění jsem dosáhl na závodech? (Jestliže nevíš, co je průměr, zeptej se svého vyučujícího.)

MOZ 4 - II - 1

Dosaďte číslice za jednotlivá písmena tak, aby platily rovnosti. Za stejná písmena dosaďte stejné číslice, za různá písmena různé číslice.

$$AB + CC = BAD \qquad CC + CC = BCA \qquad CD + CC = BAC$$

MOZ 4 - II - 2

Věrka navštěvovala se školní družinou kino nebo divadlo. V minulém roce byla v kině o dvě představení navíc, než je dvojnásobek jejích návštěv divadelních představení. Součin počtu divadelních a filmových představení je 312. Vypočítejte, kolikrát byla Věrka v kině a kolikrát v divadle.

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Na očíslování stran učebnice bylo třeba 273 číslic desítkové soustavy. Kolik stran má učebnice?

MOZ 5 - I - 2

V pátém ročníku základní školy, do kterého chodí 88 žáků, se vyučují dva nepovinné předměty: cvičení z matematiky (CM) a sportovní hry (SH). Na CM nechodilo 66 žáků, což je o 3 více než počet žáků, kteří se nepřihlásili na SH. Na oba nepovinné předměty se přihlásilo 9 žáků.

a) Kolik žáků se přihlásilo aspoň na jeden nepovinný předmět?
b) Kolik žáků se přihlásilo právě na jeden nepovinný předmět?

MOZ 5 - I - 3

Na palubní desce osobního automobilu Škoda 105 je 7 kontrolních žárovek: kontrolní žárovka levého ukazatele směru, dálkových světel, pravého ukazatele směru, nabíjení akumulátoru, mazání motoru, poslední zásoby paliva, brzdového systému. Kolik situací mohou žárovky signalizovat, jestliže:

a) svítí právě jedna žárovka, b) svítí nejvýše tři žárovky?

MOZ 5 - I - 4

Součet délek tří úseček je 104 mm. První úsečka má stejnou délku jako dvě zbývající dohromady. Délka druhé úsečky je třikrát menší než délka třetí úsečky. Zjistěte graficky i výpočtem délky všech tří úseček.

MOZ 5 - I - 5

Obdélník *ABCD* má délku strany *AB* 6 jednotek délky (j. d.), délka strany *BC* je 10 j. d. Bodem *A* veďte přímku *p*, která rozdělí daný obdélník na pravoúhlý trojúhelník a čtyřúhelník (lichoběžník) tak, aby délky odvěsen trojúhelníku byly vyjádřeny v j. d. celými čísly. Obsah trojúhelníku je x-krát menší než obsah čtyřúhelníku. Najděte všechny takové trojúhelníky, pro které platí: x je celé číslo. Vyjádřete délky odvěsen těchto trojúhelníků. (Řešte tabulkou.)

MOZ 5 - I - 6

Kupující si v samoobsluze vybral zboží v hodnotě 41 Kčs a platil padesátikorunovou bankovkou. Pokladní měla mince: 5 Kčs, 2 Kčs, 1 Kčs, 50 hal, 20 hal, 10 hal. Jak dala nazpět zákazníkovi, jestliže:

a) použila nejmenší možný počet mincí,
b) použila největší možný počet mincí,
c) použila všechny druhy mincí, které měla k dispozici,
d) vrátila 14 mincí (uveďte aspoň 1 řešení),
e) vrátila 20 mincí (uveďte aspoň 1 řešení)?

MOZ 5 - II - 1

V 5. třídě je 26 žáků. Děvčat je 15. Službu mají vždy dva žáci, chlapec a dívka. Vždy má službu jiný chlapec a jiná dívka. Dvojice má službu celý týden. Zjistěte, zda může třídní učitel určit službu od 5. do 8. ročníku ZŠ (včetně) tak, aby stejná dvojice neměla službu víckrát než jednou. Školní rok má 40 pracovních týdnů.

MOZ 5 - II - 2

Žáci 5. tříd soutěží ve dvou matematických soutěžích – v matematické olympiádě (MO) a v pythagoriádě (P). Z 33 žáků třídy 5. A soutěžilo aspoň v jedné soutěži 22 žáků. Žáků, kteří soutěžili jen v P, bylo dvakrát víc než těch, kteří soutěžili jen v MO. Žáků, kteří soutěžili v obou soutěžích, bylo čtyřikrát víc než těch, kteří soutěžili jen v P.

a) Kolik žáků soutěžilo současně v obou soutěžích?
b) Kolik žáků soutěžilo právě v jedné soutěži?
c) Kolik žáků soutěžilo nejvýše v jedné soutěži?

MOZ 5 - II - 3

Je dán obdélník $ABCD$. $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 5$ cm. Na polopřímce AB leží body X_1, X_2. Určete délky úseček BX_1, BX_2 tak, aby platilo, že obsah obdélníku $ABCD$ je dvakrát větší než obsah trojúhelníku BX_1C a šestkrát větší než obsah trojúhelníku BX_2C.

MOZ 5 - II - 4

Jsou dány číslice 1, 2, 6, 9. Sestavte z těchto číslic všechna trojciferná čísla menší než 200, v jejichž zápise se každá číslice vyskytuje nejčastěji. Z těchto čísel najděte ta, která by mohla být obsahem čtverce a zároveň i obsahem obdélníku. Délky stran čtverce i obdélníku musí být přirozená čísla. Jakmile taková čísla naleznete, určete délky stran čtverce a všechny možné rozměry obdélníků.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Mezi číslice

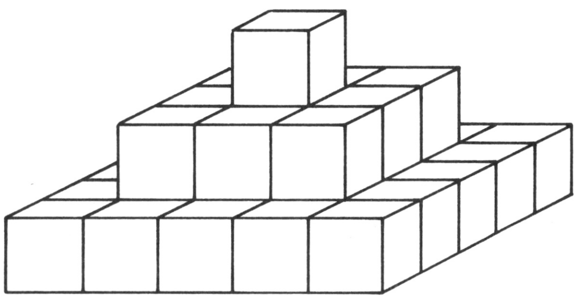
5 4 3 2 1

vložte znaky početních výkonů a závorky (pořadí číslic musí zůstat nezměněno) tak, aby se výsledek lišil od čísla 111 nejvýše o 2.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 121$ (liší se o 10), $5 + 4 \cdot (32 - 1) = 129$ (liší se o 18). Jestliže mezi číslice nevložíme žádný znak početního výkonu, můžeme dostat dvojciferná i víceciferná čísla, např. 54, 432. Najděte aspoň 2 řešení.

MOZ 6 - I - 2

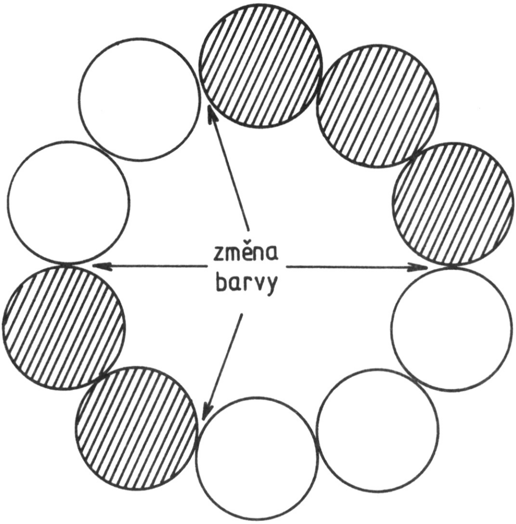
Na obrázku 33 je nakreslena tříposchoďová pyramida se čtvercovou podstavou. Na vrchol pyramidy můžeme vystoupit po každé její straně po třech stupních. Kolik stupňů bychom potřebovali, abychom se dostali na vrchol podobné pyramidy (také se čtvercovou podstavou) postavené ze 455 krychlí? (Výška i hloubka každého stupně se vždy rovná délce hrany krychle.)



Obr. 33

MOZ 6 - I - 3

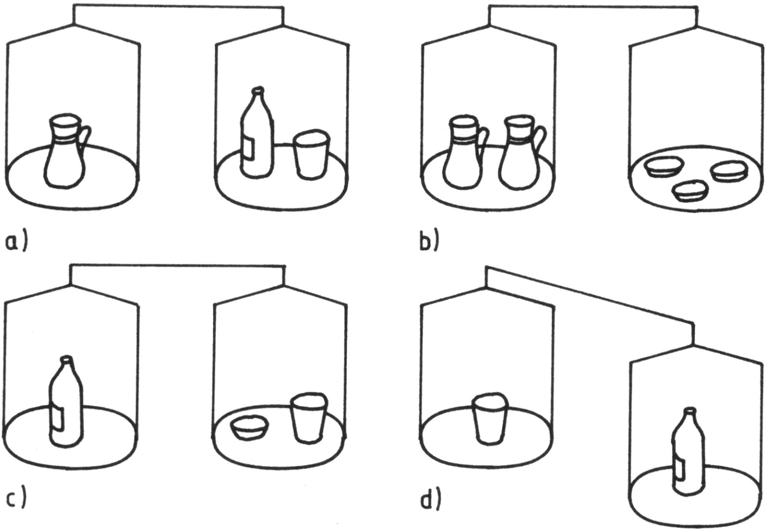
Závod na výrobu bižuterie vyrábí dětské náramky z pěti červených a pěti bílých korálků navlečených na gumičce. Jak mají být korálky navlečeny, aby náramek měl právě 6 barevných obměn? Najděte aspoň pět různých řešení. (Na obrázku 34 je náramek se čtyřmi barevnými obměnami.)



Obr. 34

MOZ 6 - I - 4

Podle toho, co nám o hmotnostech džbánku, láhve, poháru a misky prozrazují váhy v rovnováze na obrázcích 35a, b, c, rozhodněte, kolik pohárů je třeba přidat k poháru na levé misce vah na obrázku 35d, aby váhy byly v rovnováze.



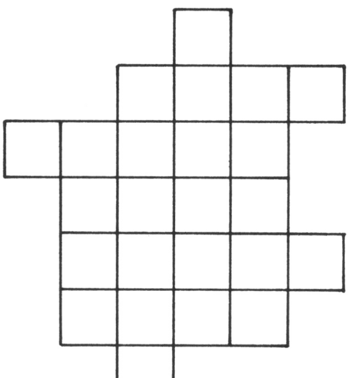
Obr. 35

MOZ 6 - I - 5

Ve výškové 51poschoďové budově vede z ulice do přízemí 9 schodů, z přízemí do prvního poschodí 18 schodů, z prvního do druhého poschodí také 18 schodů atd. Zjistěte, mezi kterými poschodími je 141. schod, počítáme-li od vstupu z ulice, a kolikátý schod je to mezi těmito poschodími.

MOZ 6 - I - 6

Útvar nakreslený na obrázku 36 rozdělte na 6 stejných částí. (Je dovoleno řezat jen podél stran čtvercové sítě uvnitř útvaru.)



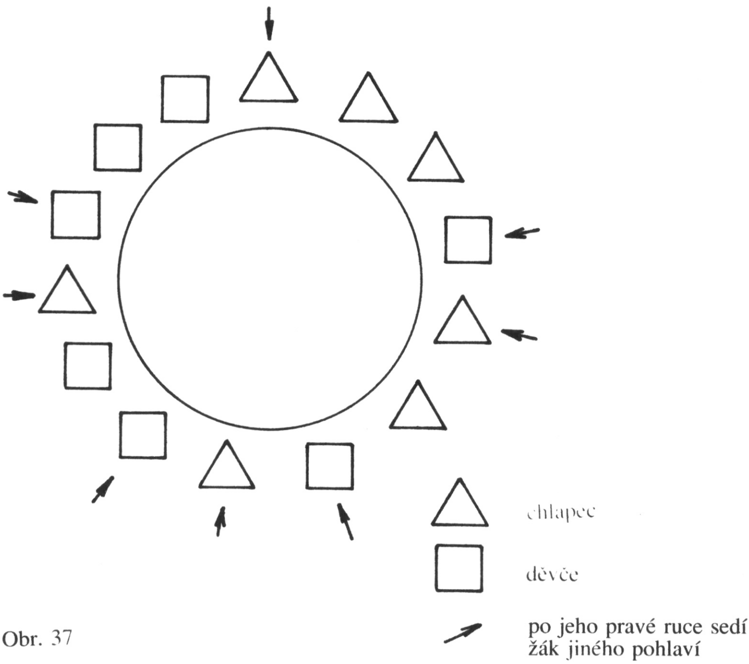
Obr. 36

MOZ 6 - II - 1

Marie počítá na prstech jedné ruky. Začíná počítat od palce přes ukazovák, prostředník a prsteník k malíčku a dostane číslo 5. Hned se vrací na prsteník (6), prostředník (7), ukazovák (8), palec (9), znovu se vrací, ukazovák (10), prostředník (11) atd. Na který prst vyjde číslo 1 988?

MOZ 6 - II - 2

Sedm chlapců a sedm děvčat si chce sednout za kulatý stůl. Je možné udělat zasedací pořádek tak, aby právě pět z nich mělo po pravé ruce žáka druhého pohlaví? Na obrázku 37 je vyznačen případ, kdy právě osmi žákům sedí po pravici žáci jiného pohlaví.



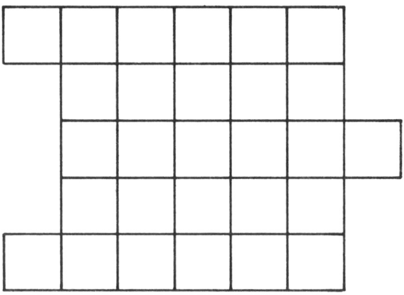
Obr. 37

MOZ 6 - II - 3

Kolik stran může mít mnohoúhelník, který je průnikem trojúhelníku a konvexního čtyřúhelníku? Určete všechny možnosti a jednotlivé případy načrtněte.

MOZ 6 - II - 4

Rozdělte obrazec na obrázku 38 na 7 shodných částí. Je povoleno dělit jen podél stran jednotlivých čtverečků.



Obr. 38

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Lístek do kina je možné si koupit po 2, 3 a 6 Kčs. V předprodeji vstupenek prodali třem návštěvníkům lístky v ceně 100 Kčs. První návštěvník koupil dva lístky stejné ceny. Druhý koupil jeden lístek. Poslední koupil od každého druhu lístků stejný počet. Kolik a kterých lístků prodali? (Pokuste se i o jiné řešení než tabulkovou metodou.)

MOZ 7 - I - 2

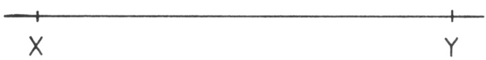
Doplňte tabulku (obr. 39) výsledků hokejové soutěže čtyř mužstev A, B, C, D. Je třeba doplnit všechny chybějící údaje, přičemž v druhé části tabulky znamená *b* počet získaných bodů, *s* skóre a *p* pořadí po skončení soutěže. (Každé mužstvo hrálo s každým právě jednou.)

	A	B	C	D	b	s	p
A	1 : 1					: 3	
B					1	: 4	
C						3 : 1	1.
D	: 5		1 :		3	: 7	

Obr. 39

MOZ 7 - I - 3

Sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC*, je-li dán grafický součet délky jeho strany *s* a výšky *v* úsečkou *XY* (obr. 40).



Obr. 40

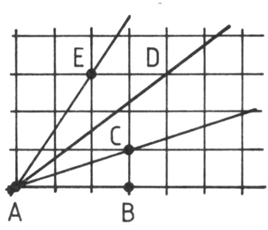
MOZ 7 - I - 4

Zjistěte pouze pomocí vztahů na čtverečkovaném papíru (obr. 41), zda o velikostech úhlů platí:

a) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DAC|$,

b) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAD|$.

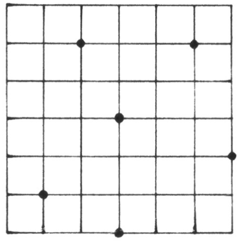
Své tvrzení odůvodněte.



Obr. 41

MOZ 7 - I - 5

Každou trojicí z daných šesti bodů je určen právě jeden trojúhelník (obr. 42). Kolik procent z těchto trojúhelníků má obsah 1, kolik procent má obsah 2, kolik procent má obsah 3?



Obr. 42

MOZ 7 - I - 6

Jirka chtěl napsat dopis svému příteli, ale nepamatoval si jeho přesnou adresu. O čísle domu si zapamatoval pouze následující údaje:

1. Je to trojciferné číslo dělitelné třemi, jehož všechny číslice jsou různé (XYZ).
2. Dvojciferné číslo XY je čtvercem přirozeného čísla.
3. Dvojciferné číslo YZ je prvočíslo menší než 20.

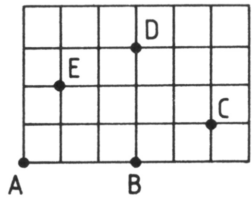
Zjistěte, zda mohl Jirka z těchto údajů přesně určit číslo domu.

MOZ 7 - II - 1

Najdi největší trojciferné číslo, jehož ciferný součet je prvočíslo a ciferný součin se rovná třetí mocnině přirozeného čísla.

MOZ 7 - II - 2

Vypočítejte pomocí čtverečkovaného papíru obsahy všech čtyřúhelníků, které mají vrcholy v bodech A, B, C, D, E čtvercové sítě. (Obr. 43.)



Obr. 43

MOZ 7 - II - 3

V květinovém stánku prodávali tři druhy květin: po 2 Kčs, po 5 Kčs a po 6 Kčs. Květiny ve stánku stály dohromady 1 500 Kčs. Výpověď prodavačky:

1. Přišli tři zákazníci.
2. Každý koupil jiný počet květin.
3. Každý koupil jeden druh květin.
4. Žádní dva nekoupili stejný druh květin.
5. Ani jeden nekoupil víc než tři květiny.
6. Po odchodu zákazníků zůstaly ve stánku všechny druhy květin ve stejném počtu.

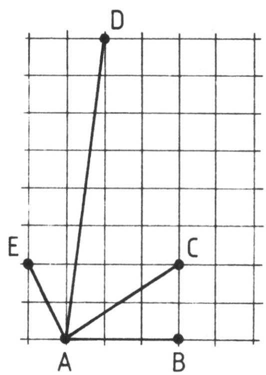
Zjistěte, zda prodavačka mluvila pravdu.

MOZ 7 - II - 4

Zjistěte, pouze pomocí vztahů na čtverečkovaném papíru, zda o velikostech úhlů platí (obr. 44):

a) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAD|$,

b) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DAC|$.



Obr. 44