[dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

Jan Vyšín
O Škole mladých matematiků

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. Sborník. (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 71–95.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405343

(III)

O ŠKOLE MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN VYŠÍN

Už během prvních deseti let československé matematické olympiády (1951 až 1960) se ukazovalo stále jasněji, že účastníkům soutěže schází přiměřená populární studijní literatura. Tento nedostatek nemohly zmírnit ani články v žákovském matematickém časopise ani brožury vydávané SPN po proběhnutí každého ročníku MO. S povzdechem jsme sledovali, kolik a jaké literatury tohoto druhu se vydává v zahraničí, zejména v Sovětském svazu. I když sovětské publikace byly našim žákům v podstatě srozumitelné a cenově zcela dostupné, byly přece jen dost nesnadné a mimoto nebyly k dispozici v dostatečném množství. Za této situace vzešel z iniciativy prof. Františka Veselého návrh na založení původní knižnice populární studijní matematické literatury; návrh byl prodiskutován v ÚV MO a podařilo se získat mládežnické nakladatelství Mladá fronta, aby vydávalo ročně 3 až 4 svazečky nové knižnice, nazvané *Škola mladých matematiků* (ŠMM). Odborného vedení knižnice se ujal tehdejší předseda ÚV MO akademik Josef Novák. Tak vyšel r. 1961 první svazek pod názvem *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles.*

Tehdejší ministerstvo školství ČSSR se zavázalo vykupovat část nákladu každého svazku knižnice; zakoupené brožury rozdělovalo do školních žákovských knihoven; tento závazek převzala pak obě národní ministerstva školství a plní jej dodnes. Tím je zároveň zajištěn odbyt podstatné části nákladu a využití vydaných svazků, na které nakladatelství vynakládá značné prostředky — tituly ŠMM jsou vesměs ztrátové.

Protože knižnice měla sloužit především ku pomoci účastníkům MO, bylo pojetí prvních svazečků ŠMM úlohové. Byly tu jednak řešené příklady, jednak úlohy pro cvičení. Teoretický výklad byl omezen na nejnutnější minimum. Teprve později se objevily v knižnici brožury tzv. výběrové řady, které se lišily od školsky pojatých svazečků tzv. základní řady hlavně ve dvou směrech:

a) tematicky přesahovaly náplň střední školy;

b) zpracováním se více blížily běžné odborné literatuře, neboť jádrem textu byl souvislý výklad, doplněný ilustračními příklady a cvičeními.

Tyto svazky byly zčásti knižním zpracováním přednášek z celostátních prázdninových soustředění a jejich autory byli i někteří vědečtí pracovníci MÚ ČSAV. V poslední době obrací knižnice ŠMM svou pozornost i k nejmladším čtenářům-účastníkům MO. Žákům ZDŠ zamýšlí věnovat populární brožury takového charakteru, jako je *Malý výlet do moderní matematiky*.

V edici ŠMM vycházejí svazky s českým i slovenským textem; až dosud jich vyšlo celkem 36. Protože některé z nich, zejména starší, jsou přístupné — bohužel — jen ve školních žákovských knihovnách, patří snad k historii olympiády i malá revue či procházka touto knižnicí a upozornění na zajímavé detaily některých svazků.

*

Procházku začneme třeba u prvního „stereometrického“ svazečku. Má tři části, první z nich je jakási „stereometrie bez stereometrie“, vlastně geometrie na povrchu tělesa — třeba mnohostěnu nebo koule. Nejdříve se brožura zabývá úlohou zjistit všechny sítě daného mnohostěnu, např. pravidelného čtyřstěnu. Síť tetraedru, lépe řečeno rozvinutý povrch, je rovinný, třeba nevypuklý mnohoúhelník, který je sjednocením obrazců shodných postupně se všemi stěnami tetraedru. Sjednocení je omezeno jistými podmínkami motivovanými praktickou úlohou: Složit ze sítě model povrchu tělesa. Čtenář je upozorněn na nutnost definovat různost sítí pomocí shodnosti obrazců.

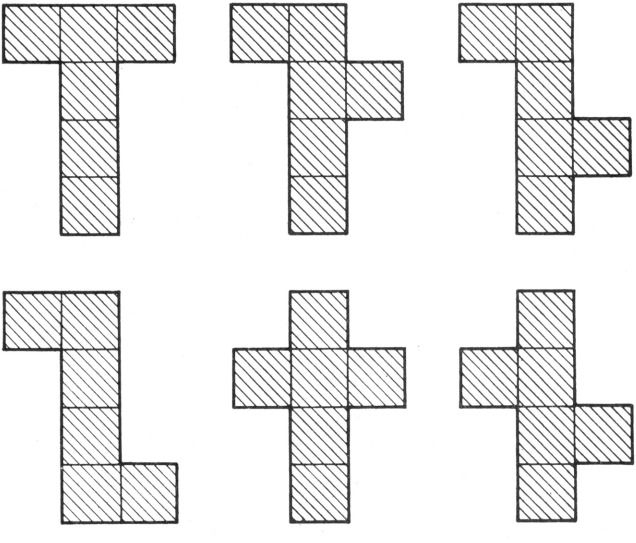
Po této úvodní analýze problému se rozřeší úloha o počtu sítí pravidelného čtyřstěnu, výsledek zní: *Pravidelný čtyřstěn má právě dvě různé sítě.* Text brožury doporučuje rozvíjení problémové situace „počet sítí daného mnohostěnu", např. sestrojení všech 11 různých sítí krychle. Na úlohu rozřešenou v textu brožury lze bezprostředně navázat úlohu sestrojit všechny navzájem různé sítě pravidelného dvojjehlanu, tj. šestistěnu složeného ze dvou shodných pravidelných čtyřstěnů. Je užitečné znát všechny sítě daného mnohostěnu, neboť při řešení konkrétní úlohy si vybereme vhodnou síť.

Část I využívá rozvinutého povrchu tělesa k určení nejkratší spojnice dvou bodů povrchu vedené po povrchu tělesa. Výsledek se dá předem experimentálně odhadnout pomocí gumičky upevněné v daných bodech. Matematické určení spojnice lze provést buď konstrukcí v části vhodné sítě, nebo výpočtem, který se zpravidla opírá o nejjednodušší planimetrické vzorce. Do tematiky I. části patří i úlohy o různých způsobech převazování krabice tvaru kvádru, zejména vázání „přes rohy", které je v síti zobrazeno úsečkou konstruovanou obdobně jako při řešení kulečníkového problému. Je zajímavé porovnat co do délky „vázání přes rohy" a „dvojité vázání křížem"; výsledek závisí na jistém vztahu mezi délkami hran kvádru. V I. části jsou dále i některé jednoduché úlohy o nejkratší spojnici dvou bodů na válcové, kuželové a kulové ploše. Jde tedy vlastně o problém tzv. geodetiky na ploše — o problém diferenciální geometrie, řešený ve zvláštních případech elementárními prostředky.

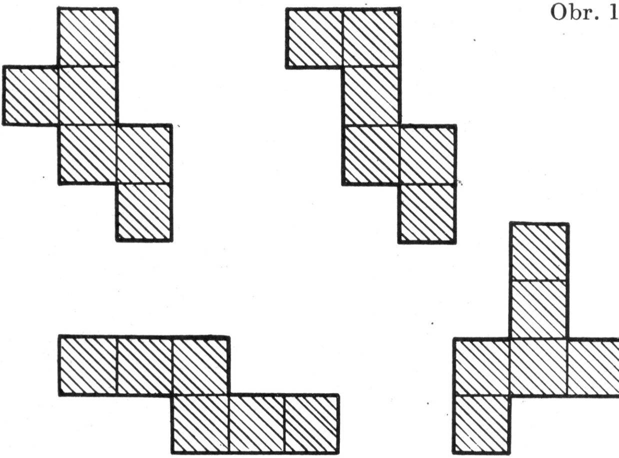
Vraťme se ještě k úloze *nalézt všechny navzájem různé sítě krychle*. Jde o sestrojení jistých nekonvexních mnohoúhelníků, složených ze 6 shodných čtverců. Sítě rozdělíme do tří skupin charakterizovaných takto:

(a) Síť obsahuje čtyři čtverce ležící v témže pásu roviny;

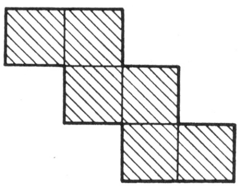
(b) síť neobsahuje žádnou čtveřici čtverců téhož pásu, ale obsahuje aspoň jednu takovou trojici čtverců;



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c

(c) síť obsahuje jen dvojice čtverců ležících v témž pásu.

Skupina (a) dá 6 sítí, skupina (b) 4 sítě, skupina (c) jedinou.

Všech jedenáct sítí je na obr. 1a, 1b, 1c.

II. část brožury je věnována průsekům (průnikům) roviny s hranolem (hlavně kvádrem) a jehlanem. Také zde lze využít při konstrukčních řešeních sítí těles. Nejzajímavější úloha je pravděpodobně úloha o nakloněném akváriu:

Akvárium má tvar krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1 se dnem $ABCD$ a je naplněno do poloviny vodou. Je nakloněno tak, že vodní hladina sahá až k bodu B' a hrana AA' je pod hladinou až do vzdálenosti $AX = x$.

(a) Máme načrtnout obvod vodní hladiny a její skutečnou velikost.

(b) Máme vyjádřit velikost vodní hladiny jako funkci proměnné x a studovat její průběh.

Zajímavé je také studium průseku krychle se soustavou rovin kolmých k její tělesové úhlopříčce; lze při něm použít sítě z obr. 1c.

III. část brožury je věnována několika úlohám o ploše kulové. Bylo zcela přirozené sblížit tyto úlohy s realitou tím, že autor volil některé náměty z geodézie, kosmonautiky apod. Toho druhu je např. úloha:

Na Zemi jsou čtyři pozorovací stanice S_1, S_2, S_3, S_4. Bod S_1 je v daném okamžiku jediné místo na Zemi, z kterého můžeme (teoreticky) pozorovat současně družice A_1, A_2. Tutéž vlastnost má v témž okamžiku bod S_2 a družice A_2, A_3, bod S_3 a družice A_3, A_4 a konečně bod S_4 a družice A_4, A_1. Máme vyšetřit polohu stanic S_1, S_2, S_3, S_4 (máme dokázat, že leží na kružnici).

Při řešení pochopitelně pokládáme Zemi za kouli.

Úlohy „ryze geometrické“ jsou snad dobře reprezentovány touto úlohou — možná problémovou situací:

Je dán pravidelný dutý čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany mají délku a. Uvnitř čtyřstěnu se po jeho podstavě, stěně ABC, pohybuje volně míč, jehož poloměr je menší než poloměr koule vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Máme vyšetřit množinu všech bodů, které může zaujmout střed míče.

Je snad jasné, jak lze tuto úlohu obměňovat či zobecňovat, proč jsme ji tedy nazvali problémovou situací.

Tento svazeček, jehož autory jsou Hradecký, Koman, Vyšín, byl později při reedici spojen s brožurou Jar. Šedivého *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách.* Přehlédneme-li všech 36 vyšlých svazků edice ŠMM, uvědomíme si, že by bylo užitečné vydat novou brožuru o stereometrii na poněkud vyšší úrovni.

*

V olympiádách se často vyskytují úlohy z teorie čísel, jednak pro půvab svých důkazů, jednak proto, že každý matematik potřebuje základy této teorie při své práci. V naší edici vyšly čtyři svazečky o teorii čísel, a to:

J. Sedláček: *Co víme o přirozených číslech* (svazek 2),
F. Veselý: *O dělitelnosti čísel celých* (svazek 14),
A. Apfelbeck: *Kongruence* (svazek 21),
T. Šalát: *Dokonalé a spriatelené čísla* (svazek 22).

Ve školské matematice se hojně vyskytuje úloha, v níž se má dokázat, že daný mnohočlen $f(n)$ je pro všechna přirozená čísla n dělitelný některým pevně daným přirozeným číslem. Ukážeme si to na dvou příkladech vzatých z knížky J. Sedláčka.

Příklad. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^3 - n$ je dělitelné šesti. Dokažte.

Řešení. Dokážeme nejprve, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné třemi. Dvojčlen $n^3 - n$ upravíme na tvar $(n - 1) . n . (n + 1)$. Rozložili jsme tedy výraz $n^3 - n$ v součin tří činitelů; tito činitelé jsou tři po sobě jdoucí celá nezáporná čísla $n - 1$, n, $n + 1$. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, je známo, že každé třetí z nich je dělitelné třemi. Protože čísla $n - 1$, n, $n + 1$ tvoří trojici po sobě jdoucích celých nezáporných čísel, musí být jedno z nich dělitelné třemi, a proto také jejich součin $n^3 - n$ je dělitelný třemi.

Dále dokážeme, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné dvěma. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, střídá se vždy číslo sudé s číslem lichým. Z toho plyne, že alespoň jedno z čísel $n - 1$, n, $n + 1$ je sudé, a tedy také součin těchto čísel je sudé číslo.

Protože pro libovolné číslo n je rozdíl $n^3 - n$ dělitelný jednak třemi, jednak dvěma, je tento rozdíl nutně dělitelný šesti. To je právě tvrzení, které jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Čtenář, který zná princip matematické indukce, může úlohu řešit takto:

Pro $n = 1$ platí $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$; číslo 0 je dělitelné šesti, takže tvrzení v tomto případě platí.

Předpokládejme, že tvrzení, které máme dokázat, platí pro některé přirozené číslo n, a budeme je dokazovat pro přirozené číslo $n + 1$. Jestliže ve výrazu $n^3 - n$ místo n píšeme $n + 1$, dostáváme $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Upravujeme tento výsledek takto:

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$
$$= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 3n(n + 1).$$

Výraz $3n.(n + 1)$ je dělitelný třemi, snadno však nahlédneme, že je dělitelný také dvěma. Je tedy dělitelný šesti. Výraz $n^3 - n$ je dělitelný šesti, neboť je to předpoklad, ze kterého jsme vyšli. Je tedy také součet těchto dvou výrazů dělitelný šesti. Tento součet je však (jak víme) roven $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Z předpokladu, že naše tvrzení platí pro některé přirozené číslo n, plyne, že toto tvrzení platí též pro číslo $n + 1$. Důkaz matematickou indukcí je tím podán.

Další příklad je obdobný, avšak při jeho řešení budeme potřebovat složitější matematické obraty.

Příklad. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^5 - n$ je dělitelné pěti. Dokažte.

Řešení. Rozdíl $n^5 - n$ upravujeme takto:

$$n^5 - n = n.(n^4 - 1) = n.(n^2 - 1).(n^2 + 1) = \\ = n.(n - 1).(n + 1)(n^2 + 1).$$

Nepodařilo se nám zde rozložit uvažované číslo v součin pěti po sobě jdoucích celých čísel (pak bychom totiž tvrzení snadno dokázali obdobným postupem jako v předcházejícím příkladě). Pomůžeme si však tímto obratem: Uvažme, jak se liší součin $(n - 1).n.(n + 1).(n + 2).(n + 3)$ od našeho součinu $(n - 1).n.(n + 1).(n^2 + 1)$. Jejich rozdíl je

$$(n - 1).n.(n + 1).[(n + 2).(n + 3) - (n^2 + 1)] = \\ = (n - 1).n.(n + 1)[n^2 + 5n + 6 - n^2 - 1] = \\ = (n - 1).n.(n + 1).(5n + 5) = 5.(n - 1).n.(n + 1)^2.$$

Je vidět, že tento rozdíl je dělitelný pěti. Součin $(n - 1).n.(n + 1).(n + 2).(n + 3)$ je však také dělitelný pěti, neboť je to součin pěti po sobě jdoucích celých nezáporných čísel. Z úvahy o rozdílu proto vyplývá, že náš součin $(n - 1).n.(n + 1).(n^2 + 1)$ je dělitelný pěti. Tím je důkaz proveden.

Přenecháváme čtenáři, aby i v tomto příkladě podal jiné řešení, při kterém se používá matematické indukce.

Poznamenejme, že oba příklady jsou vlastně speciálním tvarem jedné slavné číselněteoretické věty, která se nazývá *malá Fermatova věta**). Francouzský právník

---

*) Tato věta zní: Je-li p libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo, pak $n^p - n$ je dělitelné p.

a matematik Pierre de Fermat (1601—1665) si dobyl předního místa v matematice svými pracemi z teorie čísel a patří mezi první pěstitele analytické geometrie.

Další ukázka se týká zkoumání, jak jsou v posloupnosti přirozených čísel rozmístěna prvočísla. Po prolistování tabulek vidíme, že střídání prvočísel a čísel složených je velmi nepravidelné. V některých intervalech pozorujeme, že je tu nakupeno velmi mnoho prvočísel, jinde můžeme opět najít velkou skupinu vytvořenou výhradně z čísel složených. O této otázce nás trochu poučí další příklad.

Příklad. Ukažte, že je možno najít tisíc po sobě jdoucích přirozených čísel, jež jsou vesměs složená.

Řešení. Příkladem takové skupiny tisíce po sobě jdoucích přirozených čísel, jež jsou vesměs složená, je skupina*)

$$1\,001! + 2, \quad 1\,001! + 3, \quad 1\,001! + 4,$$
$$1\,001! + 5, \ldots, 1\,001! + 1\,000, \quad 1\,001! + 1\,001.$$

Číslo $1\,001! + 2$ je zřejmě dělitelné dvěma, číslo $1\,001! + 3$ třemi a konečně číslo $1\,001! + 1\,001$ je dělitelné číslem 1 001; všechna tato čísla jsou tedy složená.

Poznamenejme, že z naší úvahy nevyplývá, že v posloupnosti všech přirozených čísel existuje mezi prvočísly mezera obsahující právě 1 000 čísel složených. V předcházející úvaze jsme totiž nezkoumali, zda číslo $1\,001! + 1$ je složené nebo není, a na první pohled je patrno, že číslo $1\,001! + 1\,002$ je složené (je totiž sudé).

---

*) Připomeňme, že zápis $n!$ (čti n faktoriál) znamená součin všech přirozených čísel počínaje číslem 1 a konče číslem n; je tedy např. $4! = 1 . 2 . 3 . 4 = 24$.

Ještě si všimněme jedné aritmetické posloupnosti, v níž po sobě následuje pět prvočísel.

Příklad. Pět prvočísel tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 6$. Určete tato čísla.

Řešení. Nejprve ukážeme toto: Je-li a libovolné celé nezáporné číslo, pak alespoň jedno z čísel

$$a, \quad a + 6, \quad a + 12, \quad a + 18, \quad a + 24 \qquad (1)$$

je dělitelné pěti. Víme, že každé číslo a lze vyjádřit v právě jednom ze tvarů $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$. Je-li $a = 5k$, pak první z čísel v řádku (1) je dělitelné pěti. Je-li $a = 5k + 1$, pak $a + 24 = 5k + 25 = 5(k + 5)$, takže poslední z čísel v (1) je dělitelné pěti. Obdobně pro $a = 5k + 2$ vychází $a + 18 = 5(k + 4)$, pro $a = 5k + 3$ je $a + 12 = 5(k + 3)$ a konečně pro $a = 5k + 4$ máme $a + 6 = 5(k + 2)$.

Ukázali jsme tedy, že v řádku (1) je jedno z čísel dělitelné pěti. Podle podmínek uvedených v textu příkladu chceme, aby všechna čísla v řádku (1) byla prvočísla. Z toho vyplývá, že číslo, pro něž jsme před chvílí prokázali dělitelnost pěti, musí být rovno právě pěti. Vzhledem k tomu, že $d = 6$, stojí nutně číslo 5 na prvním místě mezi uvažovanými prvočísly. Hledaná pětice může být jedině 5, 11, 17, 23, 29.

Zkouškou se přesvědčíme, že všech pět nalezených čísel jsou prvočísla.

Odpověď. Úloze vyhovuje jediná pětice prvočísel, totiž 5, 11, 17, 23, 29.

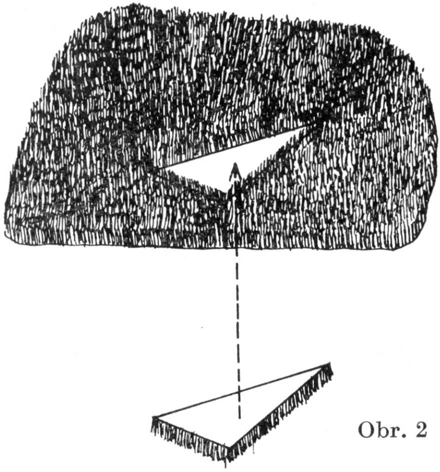
Čtenář se snadno přesvědčí, že šestý člen uvažované aritmetické posloupnosti již není prvočíslo.

Závěrem přenecháváme čtenáři, aby si sám rozřešil obdobnou úlohu:

Pět prvočísel tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 12$. Určete tato prvočísla.

*

Třetí svazek edice nese název *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách*, proto objasňuje nejprve pojem shodného zobrazení a skládání shodných zobrazení. Pojem nepřímé shodnosti je uveden tímto problémem:



Obr. 2

Kožešník měl opravit poškozený kabát; učeň vystřihl znehodnocenou část a otvor zarovnal na pravoúhlý trojúhelník. Dále chtěl vystřihnout z náhradního kousku kožešiny shodný trojúhelník, aby jej mohl vsadit do otvoru. Otočil kožešinu na rub a na vydělanou kůži si vyznačil hranici, podle které vystřihl trojúhelník. Ať však učeň dělal co dělal, nemohl vystřižený trojúhelník zasadit tak, aby srst zakryla otvor. Co byste poradili kožešníkovi, který už nemá náhradní kožešinu?

Situace je zakreslena na obr. 2, řešení je poměrně snadné — pravoúhlý (nerovnoramenný) trojúhelník je třeba rozstřihnout na dva rovnoramenné trojúhelníky. Zcela přirozeně vzniká pak otázka, na nejméně kolik rovnoramenných trojúhelníků lze rozstřihnout kterýkoliv pravoúhlý trojúhelník.

V dalších částech brožury jsou zařazeny konstrukční úlohy, ve kterých se výhodně uplatňují jednotlivé druhy shodných zobrazení v rovině (středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí a otočení). Vedle čistě geometrických úloh jsou zařazeny i známé kulečníkové problémy a jejich „hokejové varianty" uvažující odrazy touše od mantinelů. Uveďme si ukázky ryze geometrických úloh ze závěrečného odstavce brožury.

1. Je dána přímka p s bodem M, kružnice k a úhel α. Sestrojte kružnici, která se dotýká v bodě M přímky p a protíná danou kružnici tak, že tečny těchto kružnic ve společném bodě svírají úhel o velikosti α.

2. Jsou dány tři přímky procházející jedním bodem a další bod A. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které nastane jedna z možností:

a) jejich výšky leží na daných přímkách,

b) jejich těžnice leží na daných přímkách,

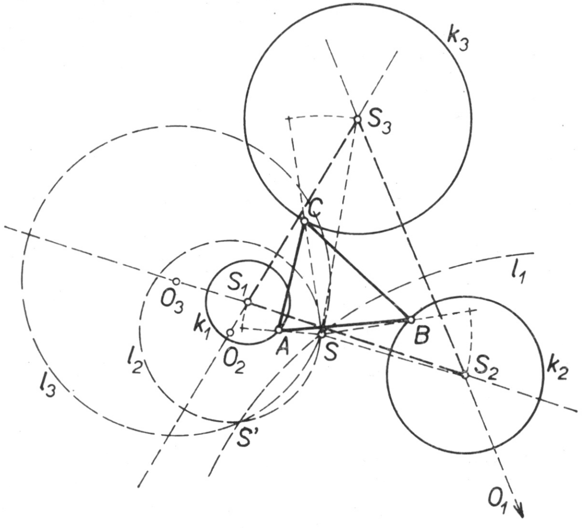
c) osy jejich vnitřních úhlů leží na daných přímkách.

Čtenář se může přesvědčit vlastní úvahou, zda je účelné řešit tyto úlohy pomocí souměrností nebo jinak.

Sedmý svazek, *O podobnosti v geometrii*, navazuje na třetí svazek tematicky i způsobem zpracování. Obsahuje úlohy důkazové i konstrukční, k 16 řešeným příkladům je připojeno 125 cvičení.

Povrchnímu odříkávání vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků se snaží brožura čelit tímto příkladem:

Víte, že dva trojúhelníky, které mají úměrné strany,



Obr. 3

jsou podobné. Zajímavou dvojicí podobných trojúhelníků jsou ty, z nichž jeden má strany a, ka, k^2a a druhý ka, k^2a, k^3a (číslo $k \neq 1$ je kladné, $a > 0$). Tyto trojúhelníky se shodují v pěti dvojicích prvků (třech úhlech a dvou stranách), ale nejsou shodné.

Čím to je, že se vymykají větám o shodnosti trojúhelníků? Jakých hodnot může nabývat k? Pro které hodnoty k je trojúhelník pravoúhlý? Sestrojte jej.

Další část svazku se zabývá mocností bodu ke kružnici a důkazem koncirkulárnosti většího počtu bodů; posloupnost vět přirozeně končí u kružnice devíti bodů trojúhelníka a Eulerovy přímky (obsahující střed kružnice opsané, střed kružnice devíti bodů, průsečík výšek a těžiště trojúhelníka). Tuto látku procvičuje např. tato úloha s bohatou diskusí:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno těžiště T, střed kružnice opsané a poloměr kružnice devíti bodů.

V brožuře je podána klasifikace různého využití stejnolehlosti při řešení konstrukčních úloh. Údiv a zájem studentů vzbuzují úlohy, ve kterých se pracuje se stejnolehlostí, jejíž střed neznáme, případně neznáme ani její koeficient.

Po stručném výkladu o podobných zobrazeních jsou zařazeny úlohy, které jich využívají. Mezi náročnější patří např. tato úloha (vložená do druhého vydání):

Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 se středy S_1, S_2, S_3 neležícími na jedné přímce; na k_1 je dán bod A. Sestrojte trojúhelník ABC přímo podobný trojúhelníku $S_1S_2S_3$ tak, aby jeho vrchol B ležel na k_2 a vrchol C na k_3 (obr. 3).

V řešení se uplatní přímé podobné zobrazení **P** ($S_1 \to A$, $S_2 \to B$, $S_3 \to C$), jehož samodružný bod S leží na Apolloniových kružnicích $l_1 = \left(S_2, S_3, \dfrac{r_2}{r_3}\right)$, $l_2 = \left(S_3, S_1, \dfrac{r_3}{r_1}\right)$, $l_3 = \left(S_1, S_2, \dfrac{r_1}{r_2}\right)$. Složením stejnolehlosti $\varkappa = \left(S, \dfrac{SS_1}{SA}\right)$ a otočení **R** kolem S o úhel S_1SA získáme zobrazení **P**, ve kterém zobrazíme S_2, S_3 na B a C.

Apolloniovy kružnice l_1, l_2, l_3 se protínají ve dvou bodech S a S'. V obr. 3 je provedena konstrukce jen pro bod S.

Oba svazečky, *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách* a *O podobnosti v geometrii*, napsal Jaroslav Šedivý; vyšly již dvakrát (svazek *Shodná zobrazení*... byl při reedici spojen se svazkem *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*).

*

Devatenáctý svazek ŠMM *Komplexní čísla a funkce* měl za úkol zopakovat a prohloubit znalosti studentů o komplexních číslech. Vzhledem k předpokládané různé úrovni těchto znalostí zůstává jeho výklad na velmi elementární úrovni a zachovává úlohové pojetí prvních svazků knižnice.

Knížka se dělí v podstatě na dvě části. První se věnuje algebře komplexních čísel a jejich geometrickému znázornění. Řeší se příklady týkající se pojmu odmocniny z komplexního čísla, např.: Co tvoří koncové body vektorů znázorňujících všechny hodnoty „třetí odmocniny z jedné", tj. všechna řešení rovnice $z^3 = 1$? Při řešení se ukazuje výhodnost komplexního čísla v goniometrickém tvaru a čtenář je upozorněn na možnost řešit obdobně obecný případ.

Knížka dále obsahuje řadu řešených příkladů a cvičení na geometrické znázornění komplexních čísel. Čtenář je veden k tomu, aby spojoval množiny komplexních čísel s jejich znázorněním v Gaussově rovině. Řeší se např. tato úloha:

Znázorněte v Gaussově rovině množiny komplexních čísel, pro něž platí

$$\text{(a)} \quad \operatorname{Im} z^2 > 0\,,$$
$$\text{(b)} \quad \operatorname{Re} z^2 \geqq 0\,.$$

Je-li $z = x + yi$, je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. První podmínku můžeme tedy psát ve tvaru $2xy > 0$, druhou $x^2 - y^2 \geqq 0$.

(a) Nerovnost $2xy > 0$ znamená, že souřadnice x i y mají totéž znamení, tj. jsou buď obě kladné, nebo obě záporné. První možnost nastává pro body v prvním kvadrantu, druhá pro body v třetím kvadrantu. Množina čísel, pro něž $\operatorname{Im} z^2 > 0$, je tedy znázorněna prvním a třetím kvadrantem, osy souřadnic jsou vyloučeny.

(b) se řeší nejprve obdobně, převedením podmínky na tvar $-|x| \leqq y \leqq |x|$, pak se uvede goniometrické řešení: Je-li $z = |z|$ $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, dá se podmínka (b) napsat ve tvaru $|\cos \alpha| \geqq |\sin \alpha|$, tj. $|\operatorname{tg} \alpha| \leqq 1$. Tato nerovnost platí pro úhly z intervalů $\langle -45°, 45° \rangle$ a $\langle 135°, 225° \rangle$. Těmto hodnotám odpovídají právě všechny body Gaussovy roviny ležící mezi osami kvadrantů v těch částech roviny, které obsahují osu x. Obě hraniční přímky patří ovšem v tomto případě do výsledné množiny.

Podrobně se zkoumá i opačná možnost — tj. vyjádřit jednoduché geometrické útvary v Gaussově rovině pomocí algebraických podmínek. Jako příklad uveďme toto cvičení:

Jakou podmínku splňují komplexní čísla znázorněná geometricky body ležícími (a) uvnitř kružnice o středu (3,1) a poloměru 2; (b) v pásu mezi přímkami $x = -1$, $x = 3$; (c) na úsečce spojující body $(-1, -1)$ a $(1, 4)$?

V druhé části svazku se výklad obrací k funkcím komplexní proměnné. Jako příklad vyšetřování různých elementárních vlastností funkce uveďme:

Stanovte obor funkce $f(z) = (i - z)/(i + z)$. Je-li $\operatorname{Im} z > 0$, dokažte, že $|f(z)| < 1$. Je-li z reálné, je $|f(z)| = 1$.

Řešení. Výraz $(i - z)/(i + z)$ má smysl pro všechna komplexní čísla s výjimkou $z = -i$, kdy jmenovatel je roven nule. Oborem funkce je tedy množina všech komplexních čísel s výjimkou $z = -i$.

Vypočtěme nyní $|f(z)|$, jestliže $z = x + iy$:

$$|f(z)| = \left|\frac{i - z}{i + z}\right| = \left|\frac{i - x - iy}{i + x + iy}\right| = \left|\frac{-x + i(1 - y)}{x + i(1 + y)}\right| =$$

$$= \left[\frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^2 + 1 + y^2 - 2y}{x^2 + 1 + y^2 + 2y}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Je-li z reálné číslo, je ovšem $y = 0$ a tedy $|f(z)| = 1$. Je-li $\operatorname{Im} z = y > 0$, je čitatel zlomku zřejmě menší než jmenovatel. Ve jmenovateli přičítáme totiž kladné číslo $2y$, zatímco v čitateli totéž kladné číslo odčítáme. Celý zlomek je tedy menší než jedna.

Na příkladě tzv. Žukovského funkce se ukazuje možnost geometrického znázornění funkce komplexní proměnné.

V poslední kapitole se čtenář seznámí s funkcí $E(z)$, která je definována jako komplexní funkce dvou reálných proměnných rovnicí $E(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. Ukazuje se jednak, že funkce $E(z)$ je rozšířením exponenciální funkce v reálném oboru, jednak že tato funkce i v komplexním oboru zachovává některé podstatné vlastnosti známé z reálného oboru.

Dále se řeší rovnice $E(u) = z$ (při daném z) a odtud se dochází k definici logaritmu komplexního čísla $L(z) = \ln |z| + i \arg z$, kde $\arg z$ je libovolný úhel, jehož tangens rovná se $\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z$. Ze zajímavějších rozřešených úloh lze uvést třeba:

Příklad. Jsou dána komplexní čísla $u = \sqrt{3} - i$, $v = \frac{7}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $w = 7(\sqrt{3} + i)$. Ověřte, že $u . v = w$; najděte logaritmy L_1, L_2, L_3 komplexních čísel u, v, w (použijte hodnot argumentů mezi 0° a 360°) a vysvětlete, proč neplatí $L_1 + L_2 = L_3$.

Výpočtem dojdeme k hodnotám $L_1 = \ln 2 + i\frac{11}{6}\pi$, $L_2 = \ln 7 + i\frac{1}{3}\pi$, $L_3 = \ln 14 + i\frac{1}{6}\pi$. To však znamená, že $L_1 + L_2 = \ln 14 + i\frac{13}{6}\pi \neq L_3$. Výsledek není ve sporu s vlastnostmi logaritmu komplexního čísla. Skutečně, $L_3 - (L_1 + L_2) = (-1) . 2\pi i$. To znamená, že jak číslo $L_1 + L_2$, tak ovšem i číslo L_3 je logaritmem čísla w.

Tento příklad má vést čtenáře ke správnému chápání pojmu nejednoznačné funkce, jejíž definice je dále naznačena. Čtenář je upozorněn na nutnou opatrnost při práci s těmito pojmy (např. rozborem zdánlivě paradoxního postupu $-1 = i^2 = i . i = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$).

V této kapitole zůstává však převážná většina úloh v rámci algebry komplexních čísel. Vývoj knižnice ŠMM naznačuje, že alespoň nejelementárnější otázky teorie komplexních funkcí by si zasloužily v jejím novém rámci nové, již více výkladově pojaté zpracování.

Autorem svazku *Komplexní čísla a funkce* je Jiří Jarník.

*

O axiomatizaci reálné situace se může čtenář seznámit ve 24. svazku ŠMM *Stavba Lobačevského planimetrie*, který napsali Ján Gatiaľ a Milan Hejný. Uvádíme ukázku:

Každé slovo jazyka, ktorým hovorí presne budovaná exaktná disciplína, patrí do jednej a len jednej zo skupín:

1. pojmy základné, 2. pojmy odvodené, 3. pojmy doplňkové, 4. prirodzený jazyk.

Ilustrujme túto klasifikáciu na príklade.

Príklad 1. Za základné pojmy planimetrie volíme tri termíny:

$$\text{bod, priamka, ležať na.} \tag{1}$$

V tvrdení: „nech a, b sú dve rovnobežné priamky a nech priamka c je rôznobežná s priamkou a, potom priamka c je rôznobežná aj s priamkou b“ je 19 slov (symboly a, b, c nie sú slová). Tieto patria v poradí skupinám: 4, 4, 3, 2, 1, 4, 4, 1, 4, 2, 4, 1, 4, 1, 4, 2, 4, 4, 1. Pojmy „rovnobežné“ a „rôznobežné“ sa dajú definovať pomocou pojmov (1). Pojem „dve“ patrí do aritmetiky, ktorá vystupuje ako doplňková disciplína ku planimetrii.

Úloha 1. Rovnako ako v príklade 1 urobte slovný rozbor vety z planimetrie: Nech A, B, C sú tri body neležiace na priamke, potom existuje aspoň jedna priamka a rovnobežná s priamkou BC a obsahujúca bod A.

Hlbšie preskúmame termín *pojem základný*. Je to asi taký pojem, o ktorom majú všetci ľudia rovnakú predstavu. Tento názor, bežný a oprávnený v humánnych vedách, v matematike neobstojí.

Keď povieme, že pojem „srdce“ je v medicíne všeobecne známy, máme na mysli fakt, že každý lekár pozná tvar, uloženie, funkciu a mnohé iné vlastnosti srdca. Presnejšie povedané, lekár pozná väzby medzi telom a srdcom. Pritom ani najväčší odborník nepozná tieto väzby všetky, lebo je to nemožné. V matematike úslovie „pojmy (1) sú všeobecne známe“ precizujeme tak, že udáme všetky základné väzby medzi pojmami (1). Tieto väzby nazveme *axiomy*, niekedy tiež postuláty. Súhrn všetkých axiom menujeme *axiomatická sústava*. Súbor základných pojmov, odvodených pojmov, všetkých axiom a všetkých tvrdení z axiom vyplývajúcich nazveme *axiomatizovaná teória*.

Axiomy sú také výroky o základných pojmoch, ktoré prehlásime za pravdivé. Pritom nás okolnosť názornosti axiom vôbec nezaujíma. Existuje mnoho príkladov v histórii matematiky a fyziky, kde naše vrodené predstavy brzdili hlbšie preniknutie k podstate veci. V nasledujúcom, hodne obšírnom príklade sa pokúsime oboznámiť čitateľa s jednoduchou, ale veľmi dôležitou axiomatickou teóriou.

Príklad 2. Axiomatizovaná teória **S** nech je daná

a) troma základnými pojmami:

$$\text{chlapec, dievča, páčiť sa} \tag{2}$$

a ďalej

b) skupinou piatich axiom:

$\mathbf{S}_1$ Existuje aspoň jedno dievča.

$\mathbf{S}_2$ Ak A, B sú dvaja chlapci, potom existuje aspoň jedno dievča c, ktoré sa páči aj chlapcovi A, aj chlapcovi B.

$\mathbf{S}_3$ Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje najviac jedno dievča c, ktoré sa páči aj chlapcovi A, aj chlapcovi B.

$\mathbf{S}_4$ Ak a je dievča, potom existujú aspoň dvaja rôzni chlapci B, C, ktorým (obidvom) sa dievča a páči.

$\mathbf{S}_5$ Ak a je dievča, potom existuje aspoň jeden chlapec B tak, že nie je pravda, že sa dievča a páči chlapcovi B.

Na základe pojmov (2) a axiom

$$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5 \tag{3}$$

rozvinieme teóriu **S**. Čitateľovi doporučujeme, aby niektoré z axiom rozobral podľa vzoru príkladu 1 a úlohy 1.

*Dohovor 1.***S**. Chlapcov budeme označovať veľkými latinskými písmenami A,B,C,X, atd., dievčatá malými písmenami a,b,c,y, atd. Symbolom Ch označíme množinu chlapcov, symbolom D množinu dievčat. Základný pojem „páčiť sa" označíme symbolom ε v nasledujúcom zmysle:

dievča y sa páči chlapcovi X označíme $X \varepsilon y$.

*Poznámka 1.***S**. Úslovie „dvaja chlapci A, B" nehovorí ešte, že chlapci A, B sú rôzni. Fakt, že A je chlapec, môžeme zapísať tiež symbolicky $A \in Ch$. Podobne $a, b \in D$ značí, že a, b sú dievčatá.

*Veta 1.***S**. Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje jedno a len jedno dievča c, ktoré sa obidvom chlapcom páči.

Dôkaz. Existencia dievčaťa c vyplýva z $\mathbf{S}_2$, jeho jednoznačnosť z $\mathbf{S}_3$.

*Dohovor 2.***S**. Dievča c z vety 1.**S** označíme tiež AB resp. BA. Upozorňujeme, že symbol AB je zavedený len ak $A \neq B$.

*Veta 2.***S**. Množina Ch má aspoň tri rôzne prvky.

Dôkaz. Podľa $\mathbf{S}_1$ existuje $a \in D$, podľa $\mathbf{S}_4$ existujú potom $B, C \in Ch$ tak, že $B \neq C$ a $B \varepsilon a$, $C \varepsilon a$. Z axiomy $\mathbf{S}_5$ vyplýva existencia takého chlapca A, ktorému sa dievča a nepáči. Preto je $A \neq B$, $A \neq C$ a A, B, C sú tri rôzne prvky množiny Ch. Veta je dokázaná.

Úloha 2. V dôkaze vety 2.**S** je nezmyselný pojem. Nájdite ho a opravte dôkaz!

*Definícia 1.***S**. Povieme, že dievča a sa nepáči chlapcovi B prave vtedy, ak nie je pravda, že dievča a sa chlapcovi B páči. Značíme $B \not\varepsilon a$.

*Veta 3.***S**. Nech $a,b \in D$ a symbolom $a \cap b$ označíme množinu všetkých chlapcov X, pre ktorých platí $X \varepsilon a$ a $X \varepsilon b$. Potom nastáva jeden a len jeden z prípadov:

1. $a \cap b = \emptyset$, 2. $a \cap b$ je jednoprvková, 3. $a = b$.

Dôkaz. Pretože prípady 1 a 2 sa navzájom vylučujú, treba dokázať dve tvrdenia: a) $a \cap b$ je aspoň dvojprvková $\Rightarrow a = b$; b) $a = b \Rightarrow a \cap b$ je aspoň dvojprvková. Prvé tvrdenie vyplýva z $\mathbf{S}_3$ a druhé z $\mathbf{S}_4$.

*Definícia 2.***S**. Ak neexistuje chlapec, ktorému sa páčia dané dve rôzne dievčatá a, b, potom tieto dievčatá nazveme priateľkami. V opačnom prípade hovoríme, že a, b sú nepriateľky. Teda dievčatá $a \neq b$ sú priateľkami (resp. nepriateľkami), práve keď pre ne nastáva prípad 1 (resp. 2) vety 3.**S**.

*Dohovor 3.***S**. Budeme hovoriť tiež, že „dievča a je (ne)priateľkou dievčaťa b" namiesto úslovia „dievčatá a, b sú (ne)priateľky". Podobne budeme hovoriť „dievča x má (ne)priateľku" namiesto „existuje dievča, ktoré je (ne)priateľkou dievčaťa x".

*Veta 4.***S**. Každé dievča má aspoň dve rôzne nepriateľky.

Dôkaz. Nech a je dievča a A,B,C chlapci z dôkazu vety 2.**S**. Označme $b = AB$, $c = AC$. Zo vzťahov $A \notin a$, $A \in b$, $A \in c$ vyplýva $b \neq a \neq c$. Sporom dokážeme vzťah $b \neq c$. Z $b = c$ vyplýva $C \in b$ a preto množina $a \cap b$ obsahuje aspoň dva prvky, a to B a C, lebo $B \neq C$. Podľa vety 3.**S** je potom $a = b$, čo je spor. Dievčatá $b \neq c$ sú hľadané dve nepriateľky dievčaťa a. Dôkaz je vykonaný.

*Veta 5.***S**. Existujú tri rôzne dievčatá tak, že každé dve z nich sú nepriateľky.

Dôkaz. Existencia dievčaťa (označme ho a) vyplýva z $\mathbf{S}_1$. Teraz stačí vziať dievčatá a, b, c z dôkazu predošlej vety.

Dôsledok. Množina D má aspoň tri rôzne prvky.

*Veta 6.***S**. Ku každému chlapcovi X existuje aspoň jedno dievča x, ktoré sa mu nepáči.

Dôkaz. Podľa dôsledku existujú dve rôzné dievčatá a, b. Ak je $X \notin a$, alebo $X \notin b$, potom sme hotoví. Nech teda $X \in a$, $X \in b$. Podľa $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci A, B tak, že $A \neq X \neq B$, $A \in a$, $B \in b$. Potom je $A \neq B$, lebo inak by vzhľadom na vetu 3.**S** bolo $a = b$. Dievča $x = AB$ sa chlapcovi X nepáči, lebo inak by bolo podľa $\mathbf{S}_3$ $a = x$ aj $b = x$. Tým je dôkaz vykonaný.

Veta 7.**S**. Každému chlapcovi X sa páčia aspoň dve rôzne dievčatá.

Dôkaz. Podľa vety 6.**S** existuje dievča x tak, že $X \notin x$. Podľa $\mathbf{S}_4$ existujú $B \neq C$, ktorým sa x páči. Potom XB a XC sú hľadané rôzne dievčatá páčiace sa chlapcovi X.

Axiomatizovaná teória **S** postavená na troch základných pojmoch a piatich axiomach v tomto štádiu obsahuje tri definované odvodené pojmy: nepáčiť sa, priateľky, nepriateľky a sedem tvrdení.

*

A nakonec dvě úlohy od Františka Zítka, autora knížky *Vytvořující funkce* (svazek 29).

Úloha 1. Pro reálná x a $n = 0, 1, 2, \ldots$ definujeme mnohočleny $P_n(x)$ takto:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \ldots, \quad P_{n+1}(x) = (x + n)P_n(x).$$

Potom pro všechna přirozená n a reálná x, y platí

$$P_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) \,.\, P_{n-k}(y)$$

(tzv. *Nörlundova formule*). Dokažte.

Návod. Formuli snadno dokážeme matematickou indukcí podle n.

Úloha 2. Určete, kolika způsoby lze přirozené číslo n

vyjádřit jako součet navzájem různých přirozených čísel. K pořadí sčítanců se nepřihlíží.

Návod. Hledaný počet je roven koeficientu při x^n v mnohočlenu

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^n) .$$

$\left(\text{Je to mnohočlen stupně} \binom{n+1}{2}.\right)$ Pro $n = 1, 2, 3, \dots,$ 10 jsou tyto počty rovny po řadě 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.