[dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

Ivan Semjonovič Petrakov

Matematické olympiády v Sovětském svazu

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. Sborník. (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 99–115.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405344

(IV)

MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY V SOVĚTSKÉM SVAZU

IVAN SEMJONOVIČ PETRAKOV

Záliba v řešení matematických úloh je velmi rozšířená a prastará. Už ve starověku a ve středověku, kdy mnohé vědy teprve vznikaly, lidé spolu v tomto oboru soutěžili a vždy to byl a bude vyhledávaný způsob, jak příjemně strávit volný čas.

V minulém století začaly matematické časopisy v některých evropských zemích vyhlašovat soutěže v řešení matematických úloh a v našem století se začaly organizovat matematické soutěže pro žáky, matematické olympiády.

Na jaře roku 1934 uspořádala leningradská universita zásluhou vynikajícího geometra, tehdy mladého profesora B. N. Delonea první matematickou olympiádu pro žáky, kteří byli členy matematických kroužků. Olympiáda měla tři kategorie. První z nich měla za úkol popularizovat matematické soutěže a obsahovala poměrně lehké úlohy. Úlohy třetí kategorie vyžadovaly již kromě znalosti středoškolské látky jistou matematickou kulturu účastníků a matematický důvtip. Každý z účastníků řešil dvě úlohy z různých oblastí matematiky. Uveďme si některé úlohy z třetí kategorie leningradské olympiády:

1. a) Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka, pak jsou kořeny rovnice

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

imaginární.

b) Trojúhelník se pohybuje ve své rovině tak, že dvě z jeho stran stále procházejí dvěma pevnými body. Dokažte, že pak existuje bod, od něhož má přímka, na které leží třetí strana trojúhelníka, stále stejnou vzdálenost.

2. a) Nechť α a β jsou kořeny rovnice $x^2 + px + 1 = 0$, γ a δ jsou kořeny rovnice $x^2 + qx + 1 = 0$. Dokažte, že platí

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = -p^2 + q^2 .$$

b) Trojboký jehlan protněte rovinou tak, aby jeho řezem byl kosočtverec.

3. a) Vypočtěte x a y z rovnic

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = n ,$$
$$b \sin^2 y + a \cos^2 y = m .$$

b) Dvě kružnice se protínají v bodech A, B. Bodem A je vedena přímka protínající kružnice v bodech P a Q. Jakou čáru opisuje střed úsečky PQ, když se protínající přímka otáčí kolem bodu A.

4. a) Určete limitu zlomku

$$\frac{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)}{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}$$

pro x konvergující k nule.

b) Dvě tečny ke kružnici jsou pevné, třetí se pohybuje po kružnici. Dokažte, že úsečku, kterou na pohybující se tečně vytínají pevné tečny, lze ze středu kružnice vidět stále pod týmž úhlem.

5. a) Tři stěny trojhranu s navzájem kolmými hranami protínají kouli ve třech kruzích. Dokažte, že součet obsahů těchto kruhů se nezmění, pootočíme-li tento trojhran kolem vrcholu tak, že žádná z jeho stěn nepřestane protínat kouli.

6. a) Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 &= a + (y - z)^2 , \\ y^2 &= b + (z - x)^2 , \\ z^2 &= c + (x - y)^2 . \end{aligned}$$

b) Dokažte, že délky tečen ke dvěma navzájem se protínajícím kružnicím, které jsou vedeny z libovolného bodu ležícího na prodloužení jejich společné tětivy, jsou si rovny.

7. a) Dokažte, že

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1 - x)^2} .$$

b) Dokažte, že vzdálenost libovolného bodu kružnice od její tětivy je geometrickým průměrem vzdáleností téhož bodu od tečen ke kružnici, sestrojených v koncových bodech tětivy.

8. a) Je-li $\sec\alpha \sec\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma \geqq 0$, pak $\operatorname{cotg} 2\gamma \leqq 0$.

b) Dokažte, že úsečky spojující vrcholy trojbokého jehlanu s těžišti protilehlých stěn se protínají v jednom bodě, který dělí každou z těchto úseček v poměru 3 : 1.

Roku 1935 začíná pořádat matematické olympiády mechanicko-matematická fakulta moskevské university. Zřejmě je zde úzká souvislost s přechodem profesora B. N. Delonea na moskevskou universitu. Organizační výbor vedl známý sovětský matematik, president Moskevské matematické společnosti akademik L. A. Alexandrov. Členy výboru byli A. N. Kolmogorov, L. A. Ljusternik, S. L. Sobolev, A. G. Kuroš, S. A. Janovská a jiní.

Na této olympiádě soutěž probíhala ve dvou kolech, a tuto tradici zachovává universita dodnes. V prvním kole se předkládaly 4 varianty, každá po 3 úlohách. Každý účastník si mohl vybrat libovolnou z předložených variant. Úlohy byly pro všechny třídy stejné a měly školní charakter.

Zde je jedna z variant prvního kola:

1. Určete poměr dvou čísel, je-li poměr jejich aritmetického průměru k průměru geometrickému 25 : 24.
2. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány délky jeho stran a a b a délka u osy úhlu, který tyto strany svírají.
3. Jehlan, jehož bočné stěny svírají s jeho podstavou úhel φ, má za podstavu rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena svírají úhel α. Určete velikost úhlu, který svírají stěny jehlanu při hraně spojující vrchol jehlanu s vrcholem úhlu α.

Ve druhém kole se varianty podstatně lišily. Jedna varianta obsahovala geometrické úlohy, druhá algebraické a třetí číselněteoretické.

První varianta obsahovala tyto úlohy:

1. Je dána kružnice a na ní 3 body M, N, P, ve kterých se s kružnicí protínají (po prodloužení) výška, osa úhlu a těžnice vycházející z téhož vrcholu trojúhelníka vepsaného do kružnice. Sestrojte tento trojúhelník.
2. Na povrchu krychle určete všechny body, z nichž je vidět tělesovou úhlopříčku krychle pod nejmenším úhlem.
3. Ve dvou různých rovinách leží dva trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$. Přímka AB se protíná s přímkou A_1B_1, přímka BC s přímkou B_1C_1, přímka CA s přímkou C_1A_1. Dokažte, že přímky AA_1, BB_1 a CC_1 se buď protínají všechny v jednom bodě, anebo jsou navzájem rovnoběžné.

Od roku 1945 se matematické olympiády začaly pořádat také v Kyjevě, od r. 1947 v Kujbyševě a roku 1949 zahájily podobné soutěže university a pedagogické ústavy v Ivanovu, Lvově, Smolensku, Saratově a v některých dalších sovětských městech. Každým rokem pak k nim přibývaly další vysoké školy. Tyto olympiády však stále měly místní charakter. Zúčastňovali se jich žáci pouze z těch měst, ve kterých se olympiády pořádaly, a přitom zpravidla jen ti žáci, kteří navštěvovali matematické kroužky při universitách nebo pedagogických ústavech. Mnozí žáci, kteří měli zájem o matematiku, ale do kroužků nechodili, se olympiád neúčastnili.

V opravdu velkém a celostátním měřítku se olympiády v Sovětském svazu začaly pořádat v době vzniku mezinárodních matematických olympiád.

Roku 1959 se zásluhou matematiků z Rumunska, Maďarska, Československa a řady jiných zemí uskutečnila první mezinárodní matematická olympiáda.

My jsme se o ní dověděli poměrně pozdě. Družstvo bylo sestaveno narychlo a jen neúplné. Nemělo úspěch. V následujících dvou letech se sovětské družstvo MMO nezúčastnilo. V těchto letech jsme z podnětu profesora A. I. Markuševiče začali pořádat olympiády v celostátním měřítku.

V roce 1960 se konala matematická olympiáda žáků, které se zúčastnila družstva 13 oblastí RSFSR a 9 dalších svazových republik. Byla to — dá-li se to tak nazvat — experimentální matematická olympiáda v opravdu velkém měřítku.

V následujícím roce se konala oficiálně první všeruská matematická olympiáda. Zúčastnila se jí družstva skoro všech oblastí Ruské federace a též družstva většiny ostatních svazových republik.

Úlohy byly pro každou třídu různé. Například žákům desátých tříd na I. všeruské matematické olympiádě, která se konala v dubnu 1961 v Moskvě, byly předloženy úlohy:

1. Dokažte, že pro libovolné tři posloupnosti přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots; c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ existují dvě taková čísla p a q, pro která $a_p \geqq a_q$, $b_p \geqq b_q$, $c_p \geqq c_q$.
2. V obdélníku o stranách 20 a 25 je rozmístěno 120 čtverců o straně 1. Dokažte, že v obdélníku lze umístit kruh o průměru 1, který nemá společný bod se žádným ze čtverců.
3. V rovině je dán pevný bod P. Vyšetřete všechny možné rovnostranné trojúhelníky ABC, pro které $AP = 3$, $BP = 2$. Jakou největší délku může mít CP?
4. Je dána konečná posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_{2^k}$, kde $x_i = 1$ nebo $x_i = -1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 2^k$. Utvořme novou konečnou posloupnost $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{2^k}x_1$, atd. Dokažte, že po konečném počtu kroků dostaneme konečnou posloupnost samých jedniček.

Zajímavé jsou i úlohy pro jiné třídy. Žákům devátých tříd byly předloženy tyto úlohy:

1. Body A a B se pohybují rovnoměrně a stejnými úhlovými rychlostmi po kružnicích o_1 a o_2 (ve smyslu pohybu hodinových ručiček). Dokažte, že vrchol C rovnostranného trojúhelníka ABC se pohybuje rovnoměrně po kružnici.
2. Do polí tabulky $m \times n$ jsou vepsána nějaká čísla. Změníme současně znaménka u všech čísel některého sloupce a některého řádku. Dokažte, že mnohonásobným opakováním této operace lze danou tabulku převést na takový tvar, že součty čísel libovolného sloupce a libovolného řádku jsou nezáporné.

3. Nechť a, b, c jsou libovolná celá čísla. Dokažte, že existují přirozená nesoudělná čísla k, l, pro něž platí, že $ak + bl$ je dělitelné číslem c.
4. n bodů je spojeno úsečkami tak, že každý bod je spojen s některým jiným bodem a přitom neexistují žádné dva body, které by byly spojeny dvěma různými cestami. Dokažte, že počet úseček je $n - 1$.
5. Péťa a Kolja se dělí o $2n + 1$ ořechů ($n \geqq 2$), přičemž každý chce získat pokud možno největší počet ořechů. Možné jsou tři způsoby dělení (každé probíhá ve třech etapách a I. a II. etapa jsou společné pro všechny tři způsoby):
   I. Kolja rozdělí všechny ořechy na dvě části tak, že v každé části jsou aspoň dva ořechy.
   II. Péťa rozdělí každou část znovu na dvě části tak, že v každé části je alespoň jeden ořech.
   III. Při prvním způsobu bere Péťa největší a nejmenší část; při druhém způsobu Péťa bere prostřední části; při třetím způsobu bere Péťa buď největší a nejmenší část, anebo obě prostřední, ale za právo výběru odevzdá Koljovi jeden ořech.

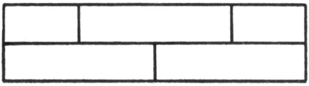
   Určete, který ze způsobů je nejvýhodnější pro Péťu a který je pro něj nejméně výhodný.

Žákům osmých tříd byly předloženy tyto úlohy:

1. Ve vrcholech obdélníku $ABCD$ jsou sestrojeny kružnice. Přitom pro poloměry těchto kružnic platí rovnost $r_A + r_C = r_B + r_D$. Ke kružnicím o středech A a C, B a D jsou vedeny vnější tečny. Dokažte, že čtyřúhelníku vymezenému tečnami lze vepsat kružnici.
2. Je dána čtveřice kladných čísel (a, b, c, d). Sestrojme postupně další čtveřice (ab, bc, cd, da), $(ab^2c, bc^2d, cd^2a, da^2b)$ atd. Dojdeme-li tímto postupem někdy

k původní skupině, stane se tak jedině, je-li $a = b = c = d = 1$. Dokažte.

3. Dokažte, že neexistuje lomená čára, která by protínala každou úsečku obrazce na obrázku 4 právě jednou.



Obr. 4

4. Dokažte, že neexistují celá čísla a, b, c, d vyhovující rovnostem

$$abcd - a = \underbrace{11\ldots1}_{1961}$$

$$abcd - b = \underbrace{11\ldots1}_{1960}$$

$$abcd - c = \underbrace{11\ldots1}_{1959}$$

$$abcd - d = \underbrace{11\ldots1}_{1958}$$

Úlohy předložené žákům sedmých tříd:

1. Strany pravidelného konvexního mnohoúhelníku jsou obarveny z vnějšku. Sestrojte několik úhlopříček tak, že žádné tři se neprotnou v jednom bodě. Každou úhlopříčku vybarvěte z jedné strany. Dokažte, že aspoň jeden z mnohoúhelníků, na které je úhlopříčkami rozdělen původní mnohoúhelník, je celý obarven z vnějšku.
(Pozn. překl. V úloze jde o vybarvení polorovin vyťatých stranami resp. úhlopříčkami mnohoúhelníku.)

2. Ve čtverci $ABCD$ je na straně AB dán bod P, na straně BC bod Q, na straně CD bod R a na straně DA bod S. Ukázalo se, že obrazec $PQRS$ je obdélník. Dokažte, že obrazec $PQRS$ je buďto čtverec, nebo jsou jeho strany rovnoběžné s úhlopříčkami čtverce $ABCD$.
3. Dokažte, že mezi 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly existuje nutně takové, že součet jeho cifer je dělitelný 11.
4. Je dána tabulka s 4×4 poli. V některých polích je hvězdička. Dokažte, že lze rozmístit 7 hvězdiček tak, že při vyškrtnutí libovolných dvou řádek a dvou sloupců ve zbylých polích zůstane alespoň jedna hvězdička. Dokažte, že když je hvězdiček méně než 7, pak vždy lze vyškrtnout dva řádky a dva sloupce tak, že zbývající pole jsou vesměs prázdná.

Uvedené úlohy dávají konkrétní představu o obtížnosti úloh, které se zadávají na všesvazových olympiádách.

Brzy se začaly pořádat televizní olympiády žáků a také dálkové matematické olympiády. Takto se mohou zúčastnit soutěží i žáci z nejvzdálenějších měst a sídlišť; mohou vyzkoušet své síly a v případě vítězství v dálkové nebo televizní olympiádě získat právo na účast v oblastní matematické olympiádě.

Zájem dětí a mládeže o matematiku tím vším značně vzrostl. Téměř na každé škole začaly pracovat matematické kroužky. Pro ty žáky sedmých, osmých a devátých tříd, kteří se nejvíce zajímají o matematiku, se na mnoha místech v červenci pořádají matematické letní školy. Poprvé takovou letní školu zorganizovali vědci z novosibirského akademického městečka a pozvali na ni stovky dětí z různých škol ze Sibiře, z Dálného východu, ze Střední Asie a z Uralu. Novosibirské akademické městečko leží v lese na břehu řeky Ob, u přehrady, které se říká Obské moře. Děti tam odpočívají, koupou se, opalují, sportují a přitom jsou neustále ve společnosti vědců, matematiků. Ti tam bydlí a žijí s nimi; při společných procházkách s nimi docela nenuceně a neformálně mluví o matematice a o jejích různých problémech a nepozorovaně tak děti uvádějí do jejího světa. Mimoto pro ně denně pořádají přednášky a semináře. Účast na těchto seminářích a přednáškách není povinná, je zcela dobrovolná. Přednáší se matematika, fyzika, přírodní vědy. Byla tam např. tato témata: teorie výbuchů, problémy současné fyziky, Maxwellovy rovnice, základy teorie množin, topologie, neeukleidovská geometrie, teorie relativity, fotonová raketa, molekulární fyzika, biologie a matematika aj.

Vědci chtějí, aby se jejich mladí přátelé hodně dověděli a aby se jejich zájem prohloubil. A mají úspěchy. Za měsíc získají děti velmi mnoho. Na konci pobytu v letní škole se všechny zúčastňují fyzikálně-matematické olympiády a nejúspěšnější z nich jsou přijaty do fyzikálně-matematické (a nyní i biologické) internátní školy při novosibirské universitě.

Mezi hrami, soutěžemi a rozpravami, které se pořádají na letní škole, je zvlášť zajímavá obhajoba projektu. Projekt je obyčejně svérázné předvedení nějaké myšlenky v originální, zajímavé a obvykle žertovné formě; přitom obsahuje často vážná tvrzení. Stejným způsobem se pak také obhajuje i vyvrací. Ve škole pracují kromě toho různé kroužky.

Podle novosibirského vzoru byly organizovány matematické letní školy i v mnoha jiných městech. Např. v Simferopolu pro žáky z krymských škol. Na tuto školu často jezdí přednášet a besedovat s účastníky i společně s nimi si odpočinout akademik A. N. Kolmogorov.

Dobrou školu organizuje v okolí Moskvy moskevská universita. Přednášejí na ní vědci a mládež z moskevské university. Několik škol v severozápadní oblasti pořádá leningradská universita.

Bylo by dobré, kdyby se podobné školy organizovaly i v jiných zemích a kdyby se na letní školy zvaly a vysílaly delegace žáků ze zahraničí.

Z iniciativy moskevské university, k níž se připojily i jiné vysoké školy, byla zřízena Všesvazová dálková matematická škola. V ústředním tisku (Komsomolské pravdě, Učitelských novinách aj.) se otiskují podmínky pro přijetí do této školy a úlohy přijímací zkušební práce. Žáci, kteří chtějí být přijati, tyto úlohy řeší a řešení posílají na universitu. Tam se práce opravují, a je-li z řešení vidět, že žák má matematické schopnosti, i když látku ještě příliš neovládá, je do školy přijat. Škola pak dva roky řídí jeho matematické studium. Posílá mu brožury s výkladem různých matematických otázek, např.: metody matematické indukce, metoda souřadnic, funkce a grafy aj.; doporučuje mu postup studia a zadává úlohy ke studované látce. Žák se může obrátit na školu s libovolným dotazem a dostane kvalifikovanou odpověď. Každý žák přijatý do této školy dostává pravidelně kontrolní úlohy. Jejich řešení posílá ke klasifikaci. Podle těchto kontrolních prací mohou pracovníci školy zjistit, kde má žák potíže a v čem naopak úspěchy a podle toho řídit jeho další studium.

Všesvazová dálková matematická škola poskytuje takto pomoc a vedení žákům nejrůznějších škol, které samy by jim při studiu matematiky dostatečně pomáhat nemohly.

V současné době se ve většině škol dvakrát až třikrát do roka pořádají matematické soutěže různých forem, olympiády. Vítězové těchto soutěží se zúčastňují okresních olympiád a vítězové okresních olympiád oblastních. Tři až čtyři vítězové oblastní olympiády postupují do závěrečného kola celostátní olympiády.

V roce 1967 bylo zřízeno svazové ministerstvo osvěty. Od té doby byl název Všeruská matematická olympiáda změněn na Všesvazová matematická olympiáda, přičemž organizace olympiády zůstala stejná. Svazové republiky však mohou nyní vysílat víc družstev. Tak např. dříve se z Ukrajiny zúčastňovala závěrečného kola 1—2 družstva, nyní 27—28 družstev, z Gruzie místo jednoho 4—5 družstev, z Kazachstánu 17 družstev atp. Přirozeně, že to velmi podnítilo aktivitu dětí. Navíc ještě směrnice o přijímacích zkouškách na vysoké školy stanoví, že vítězové olympiády mají při rovnosti podmínek při přijímání na vysokou školu přednost. Účastníci mezinárodní matematické olympiády se od r. 1963 zapisují na vysoké školy bez přijímacích zkoušek.

Z matematických kroužků moskevské university a z moskevských olympiád vyšli takoví vědci, jako je člen korespondent AV SSSR Igor Šafarevič, doktoři fyzikálně-matematických věd, profesoři moskevské university Alexandr Kirillov a Valerij Alexejev a jiní.

Skutečné oživení vnesla do olympiád účast SSSR na mezinárodních matematických olympiádách. V roce 1962 jsme dostali od našich československých přátel pozvání na IV. MMO. Družstvo jsme vybrali podle výsledků Všeruské olympiády — bylo v něm 7 chlapců a jedna dívka, Lída Gončarovová. A nesmírně nás všechny potěšilo, když Lída vybojovala spolu s jedním sovětským a dvěma maďarskými chlapci první cenu. Později se Lída dala zapsat na moskevskou universitu, studium dovršila universitní aspiranturou a obhájila kandidátskou práci.

Musím říci, že „československá“ mezinárodní olympiáda utkvěla nám všem nadlouho v paměti. Její hlavní část se odehrála v Českých Budějovicích. Jak mezi vedoucími, tak také mezi účastníky vládl duch vzájemného porozumění a srdečného přátelství. Viděli jsme také mnoho stavebních památek a navštívili mnoho muzeí v Jihočeském kraji a v Praze.

Českoslovenští matematici vypracovali statut olympiády a celý její řád. Statut nebyl potvrzen, dosud však se všechny mezinárodní matematické olympiády tímto statutem řídí.

Na mezinárodní matematické olympiády se družstvo SSSR vybírá podle výsledků v celém systému olympiád. Široká síť olympiád a účast neobyčejně velkého počtu žáků umožňují vybrat družstvo a jet s ním na soutěže bez doplňujícího tréninku. Děti se samozřejmě před odjezdem na olympiádu připravují doma a v universitních kroužcích. Je to přirozenější a dává to dobré výsledky, zajišťuje to také všem stejnou možnost zúčastnit se olympiády. Např. Andrej Suslin studoval na jedné leningradské škole humanitního směru a na IX. MMO v Jugoslávii získal první cenu. Nyní je Andrej aspirantem na universitě a členem poroty Všesvazové matematické olympiády. Alexej Tolpygo studoval v Kyjevě. Byl tak roztržitý, že jsme se báli vzít ho s sebou na olympiádu. Mohlo se stát, že by při procházce v zamyšlení nad řešením nějaké úlohy zašel tak daleko, že by se nemohl včas vrátit. Proto na V. MMO ve Vratislavi musely děti chodit s Aljošou na procházku. Aljoša vynikajícím způsobem vystudoval moskevskou universitu, dokončil vědeckou aspiranturu a sám nyní přednáší na universitě. Je jedním z autorů sbírky úloh pro žáky dálkové matematické školy.

Účastník VI. MMO Jurij Matiasevič navštěvoval nejprve 239. leningradskou školu a potom fyzikálně-matematickou internátní školu při moskevské universitě. Po VI. MMO měl ještě rok chodit do školy a my jsme doufali, že ho budeme moci vzít na VII. MMO do NDR, Jurij si však přál studovat na universitě. Jako jeden z vítězů olympiády byl zapsán před dokončením školy bez přijímacích zkoušek na leningradskou universitu. Potom, ještě jako student, rozřešil desátý Hilbertův problém o řešitelnosti diofantovských rovnic. O tomto problému přemýšleli význační matematici mnoho desetiletí. Brzy obhájil Matiasevič kandidátskou disertaci a nyní už je doktorem fyzikálně-matematických věd a přednáší na leningradské universitě.

V posledních letech jsou členové sovětského družstva svoláváni na krátké přípravné srazy ve škole V. I. Lenina v Leninských Gorkách. Při těchto soustředěních se probírají úlohy z různých oblastí matematiky: úlohy logického charakteru, různé rovnice, nerovnosti, kombinatorika, funkce a grafy, geometrické transformace a různé geometrické úlohy. Úlohy se vybírají ze svazků edice *Knihovna matematického kroužku*, z knihy *Mezinárodní matematické olympiády* a odjinud. Mnohé úlohy jsou původní, sestavují je vedoucí. Také sami žáci jsou vedeni k tomu, aby formulovali úlohy. Program na soustředění většinou vedou mladí matematici. Mnozí z nich byli účastníky mezinárodních a všesvazových olympiád. Přitom někteří z přednášejících bydlí během soustředění společně se žáky v Leninských Gorkách. Chodí s dětmi na procházky, tráví s nimi chvíle odpočinku, hrají s nimi i různé sportovní hry. Často jim při procházkách vymýšlejí a sestavují zajímavé a někdy i poměrně obtížné úlohy. O těchto úlohách společně s dětmi přemýšlejí, diskutují, posuzují předpoklady a řešení.

Na soustředěních se snažíme připravit žáky na řešení úloh, které se zadávají na universitních, všesvazových a republikových olympiádách, a pokud možno je naučit, jak mají přistupovat k řešení úloh na libovolné téma, pokud ovšem nevyžadují znalosti přesahující rámec středoškolské matematiky. Naše příprava dětí na mezinárodní olympiády mívá dobré výsledky. Družstvo SSSR obsazuje na mezinárodních matematických olympiádách přední místa. Děti dovedou řešit poměrně složité úlohy. Někdy se i zkušený matematik nad některou úlohou pozastaví, a přece žáci naleznou poměrně originální řešení.

Chtěl bych to doložit případem jedné úlohy, kterou předložila jury X. MMO v Moskvě československá delegace. Je formulována takto:

V prostoru je rozloženo n bodů tak, že každé tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku, jehož jeden úhel je větší než 120°. Dokažte, že tyto body lze označit písmeny A_1, A_2, ..., A_n tak, že každý úhel $\sphericalangle A_iA_jA_k$ je větší než 120°, když $i < j < k$.

Jury prozkoumala zadání úlohy a její řešení. Usoudila, že řešení úlohy je velmi složité a úloha je těžká. Některé delegace však požádaly, aby úloha nebyla během roku zveřejňována, aby jí bylo možno použít na národních olympiádách. Zejména se úloha zalíbila členům jury všesvazové olympiády a v roce 1969 byla předložena žákům desátých tříd na Třetí všesvazové olympiádě. Mnozí účastníci předvedli původní, logicky jasné, hezké řešení a lze říci, že se jim úloha zalíbila. Uvedu s nepodstatnými úpravami řešení, které nalezla řada žáků:

Řešení. Nechť n bodů v prostoru splňuje uvedené podmínky. Potom libovolný úhel s vrcholy v těchto bodech je buď větší než 120°, anebo menší než 60°. To plyne z podmínky, že v každém trojúhelníku je jeden úhel větší než 120°, a tedy každý ze dvou zbývajících úhlů je menší než 60°.

Ukážeme, že v systému daných bodů jsou jen dva body, jejichž vzdálenost je největší, a každý úhel s vrcholem v jednom z těchto bodů je menší než 60°. Předpokládejme, že největší je vzdálenost bodů B a C. Potom pro libovolný bod A_l různý od B a C platí, že $\sphericalangle BA_lC > 120°$, protože tento úhel je největší v trojúhelníku BA_lC. Na druhé straně pro libovolné body A_i, A_j (obr. 5a) je $\sphericalangle A_iBC < 60°$ a $\sphericalangle A_jBC < 60°$. Libovolný rovinný úhel hran trojhranu je menší než součet zbývajících dvou stran (tj. hranových úhlů) tohoto trojhranu. Proto je

$$\sphericalangle A_iBA_j < \sphericalangle A_iBC + \sphericalangle A_jBC < 60° + 60° = 120°,$$

tj.

$$\sphericalangle A_iBA_j < 120° .$$

Odtud plyne $\sphericalangle A_iBA_j < 60°$, a tedy vzdálenost A_iA_j není největší.

Tvrzení věty dokážeme matematickou indukcí. Dokážeme, že když B a C jsou nejvzdálenější dva body z daných n bodů, potom všechny body lze očíslovat tak, že je $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120°$ pro všechna $1 \leqq i < j < k \leqq n$, přičemž $A_1 = B$, $A_n = C$.

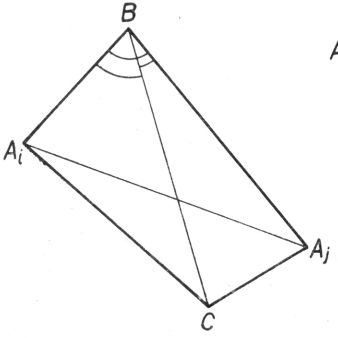
Pro $n = 3$ je tvrzení pravdivé.

Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro m bodů, a dokážeme pak jeho pravdivost pro $m + 1$ bodů.

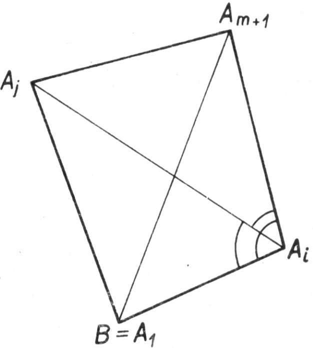
Vybereme z těchto $m + 1$ bodů dva od sebe nejvzdálenější body a označíme je B a C; bod C označíme jako A_{m+1} a vyloučíme jej z dalšího vyšetřování. Ze zbývajících bodů je B jeden z krajních bodů. Všechny úhly s vrcholem B jsou menší než 60°. Proto je možno je podle předpokladu očíslovat tak, že $A_1 = B$ a $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120°$ pro všechna $1 \leqq i < k < j \leqq m$. Dokážeme, že $\sphericalangle A_iA_jA_{m+1} > 120°$ pro všechna $1 \leqq i <$

$< j \leqq m$. Pro $i = 1$ je to splněno, neboť A_1 a A_{m+1} jsou krajní (nejvzdálenější) body.

Nechť $1 < i < j \leqq m$. Potom $\sphericalangle\ A_iA_jA_{m+1} > 120°$, protože v trojúhelníku $A_iA_jA_{m+1}$ je úhel při vrcholu A_{m+1} menší než 60°. Úhel $\sphericalangle\ A_jA_iA_{m+1}$ (obr. 5b) je také



Obr. 5a



Obr. 5b

menší než 60°. Kdyby tento úhel byl větší než 120°, pak také úhel $\sphericalangle\ A_1A_iA_{m+1} > 120°$ (A_1, A_{m+1} jsou nejvzdálenější body a podle indukčního předpokladu je $\sphericalangle\ A_1A_iA_j > 120°$), dostali bychom, že každý z úhlů při vrcholu A_i je větší než 120°. To však není možné. Tím je tvrzení dokázáno.

Mezinárodní matematické olympiády už nyní mají značný vliv na obsah a charakter studia účastníků ze všech států, které mezinárodní olympiády obesílají, i z těch států, které se dosud těchto olympiád neúčastní. Přáli bychom si, aby se pracovní styky, které matematici i žáci navazují na mezinárodních matematických olympiádách, stále rozvíjely, sílily a přinášely své dobré plody.