[dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

Helmut Bausch

Pozdrav z NDR

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. Sborník. (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 121–126.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405346

POZDRAV Z NDR

HELMUT BAUSCH

Jménem ústředního výboru olympiád mladých matematiků NDR chci blahopřát k jubileu všem našim československým přátelům a kolegům, kteří již dvacet pět let obětavě pracují v matematické olympiádě, a připojit i přání dalších úspěchů. S mnoha kolegy z ČSSR nás už léta váže přátelství. Účast obou našich zemí na mezinárodních matematických olympiádách a jiné podobné příležitosti poskytují našim učitelům a žákům velké možnosti k navázání kontaktů a k výměně zkušeností. Víme, že se v ČSSR vyvíjí značné úsilí ke zvýšení zájmu o matematickou olympiádu obsahově i organizačně zajímavými formami. Mnoho podnětů jsme převzali; např. po zhodnocení zkušeností získaných v ČSSR jsme i u nás zavedli volitelné povinné úlohy, což naši žáci velmi uvítali.

V NDR nemají ještě matematické olympiády tak dlouhou tradici. Naše první olympiáda se konala až v roce 1962, i když jsme se už od roku 1959 každoročně zúčastňovali mezinárodních matematických olympiád, bohužel s velmi malým úspěchem. Při přípravě a organizaci našich olympiád jsme však aspoň mohli sbírat a využívat zkušenosti získané v jiných zemích. Dnes mají olympiády v mimoškolní práci našich žáků a učitelů své pevné místo. K jejich náplni přispívají mnozí matematici z universit, vysokých škol i Akademie věd NDR. Každoročně statisíce žáků řeší úlohy prvního kola (toto se nazývá školní olympiáda) anebo se o·to alespoň snaží. Úlohy školní olympiády se uveřejňují i v deníku FDJ *Junge Welt* a je přípustné, aby žáci požádali své rodiče nebo příbuzné o pomoc při řešení. Úlohy druhého, třetího a čtvrtého kola (okresní, krajská a celostátní olympiáda) musí být řešeny v klauzurních podmínkách. Obtížnost úloh rok od roku roste. Žáci se připravují v pracovních skupinách, v matematických táborech o prázdninách a o obzvláště schopné pečují učitelé a vědci individuálně. V Berlíně je také žákovská matematická společnost. Všechna tato příprava ale zdaleka není jenom tréninkem na olympiády. Jejím hlavním cílem je všestranně prohloubit matematické vzdělání žáků.

V roce 1974 jsme podruhé měli možnost uspořádat mezinárodní matematickou olympiádu. Učinili jsme tak s velkou radostí. V účasti bylo dosaženo nového rekordu (18 zemí). Poprvé jsme uvítali družstva VDR a USA. Zájem o mezinárodní matematické olympiády zřejmě stále roste, takže mají před sebou dobré vyhlídky. Přes všechny obtíže vyvolané růzností školních programů v tak mnoha zemích je možné zadat soutěžní úlohy, které jsou zajímavé pro všechny účastníky.

Chtěl bych nyní předložit úlohu, která je odvozena z formulace praktického problému, na který jsem narazil při svém učitelském působení na berlínské Vysoké škole zemědělské techniky.

Mnohé biologické procesy růstu lze přibližně popsat pomocí funkcí tvaru

$$y = \alpha\, x^{\beta}\, e^{-\gamma x}, \quad x > 0\,, \tag{1}$$

případně

$$\ln y = \bar{\alpha} + \beta \ln x - \gamma x\,, \tag{2}$$

($\bar{\alpha} = \ln \alpha$), přičemž α, β, γ jsou jisté kladné konstanty.

Např. lze pomocí (1) vyjádřit závislost zemědělského výnosu y na množství x jistého hnojiva, které bylo dodáno půdě. Znalost takové funkční závislosti poskytuje mnohé výhody zejména pro optimalizační úlohy. Aby bylo možné pracovat s funkcí (1), je třeba nejdříve určit hodnoty konstant α, β, γ, příp. $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$. Vychází se přitom z výsledků pokusů, které dají tabulku hodnot (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(x_i > 0, y_i > 0)$, n je počet provedených měření. Rozdíly $\bar{\alpha} + \beta \ln x_i - \gamma x_i - \ln y_i$ jsou obecně různé od nuly, neboť jinak by bylo možné přesně vyjádřit výsledky měření pomocí (2), a tedy také pomocí (1).

Utvořme nyní součet S druhých mocnin těchto rozdílů, tj.

$$S(\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\alpha} + \beta \ln x_i - \gamma x_i - \ln y_i)^2 \qquad (3)$$

a vypočítejme $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$ tak, aby součet S byl minimální (to je tzv. metoda nejmenších čtverců). S je funkce tří nezávislých proměnných $(\bar{\alpha}, \beta, \gamma)$, neboť x_i a y_i jsou pevně dané hodnoty. Dostali jsme tak úlohu na určení extrémních hodnot funkce tří proměnných, kterou zde vyšetřovat nebudeme. Poznamenejme jenom ještě toto:

Pro existenci právě jednoho minima funkce (3) je nutné, aby determinant třetího řádu

$$D = \begin{vmatrix} n, & \sum \ln x_i, & \sum x_i \\ \sum \ln x_i, & \sum \ln^2 x_i, & \sum x_i \ln x_i \\ \sum x_i, & \sum x_i \ln x_i, & \sum x_i^2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

byl různý od nuly. Odtud plyne následující úloha.

Úloha. Buďte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná reálná čísla, z nichž alespoň tři jsou navzájem různá. Dokažte, že determinant (4) je kladný.

Řešení. Pro zkrácení zápisu položme $x_i = a_i$, $\ln x_i = b_i$ a sčítat budeme přes všechna $i, j, k = 1, 2, \dots, n$; pak je

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum_i b_i & \sum_i a_i \\ \sum_i b_i & \sum_i b_i^2 & \sum_i a_i b_i \\ \sum_i a_i & \sum_i a_i b_i & \sum_i a_i^2 \end{vmatrix} =$$

$$= n \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 + 2 \sum_i a_i \sum_i b_i \sum_i a_i b_i - (\sum_i a_i)^2 \sum_i b_i^2 -$$

$$- \sum_i a_i^2 (\sum_i b_i)^2 - n(\sum_i a_i b_i)^2 =$$

$$= n \sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 + 2 \sum_{i,j,k} a_i b_k a_j b_j - \sum_{i,j,k} a_i a_k b_j^2 - \sum_{i,j,k} a_i^2 b_i b_k -$$

$$- n \sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j =$$

$$= \sum_{i,j,k} (a_i^2 b_i^2 + 2 a_i a_j b_j b_k - a_i a_k b_j^2 - a_i^2 b_j b_k - a_i a_j b_i b_j) =$$

$$= \sum_{i,j,k} (a_i^2 b_j^2 + a_i a_j b_j b_k + a_i a_k b_i b_j - a_i a_k b_j^2 - a_i^2 b_j b_k - a_i a_j b_i b_j) =$$

$$= \sum_{i,j,k} a_i b_j (a_i b_j + a_j b_k + a_k b_i - a_k b_j - a_i b_k - a_j b_i) = \sum_{i,j,k} a_i b_j \Delta_{ijk},$$

kde

$$\Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}.$$

Hodnota součtu nezávisí na uspořádání indexů, neboť všechny indexy probíhají nezávisle hodnoty od 1 až do n. Celkem existuje šest různých uspořádání indexů i, j, k a v důsledku toho existuje šest vyjádření součtu, která jsou analogická vyjádření výše uvedenému. Při záměně dvou indexů změní determinant Δ_{ijk} své znaménko. V důsledku toho platí

$$D = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} (a_i b_j - a_j b_i - a_i b_k - a_k b_j + a_k b_i + a_j b_k) \Delta_{ijk} =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \Delta_{ijk}^2 \geqq 0.$$

Nyní ukážeme, že alespoň jeden z determinantů Δ_{ijk} je různý od nuly.

Podle předpokladu jsou alespoň tři hodnoty a_i navzájem různé; nechť jsou to hodnoty a_p, a_q, a_r. Platí

$$\Delta_{pqr} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_p & a_q & a_r \\ b_p & b_q & b_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_p & a_q - a_p & a_r - a_p \\ b_p & b_q - b_p & b_r - b_p \end{vmatrix} =$$

$$= (a_q - a_p)(b_r - b_p) - (a_r - a_p)(b_q - b_p) =$$

$$= (x_q - x_p) \ln (x_r/x_p) - (x_r - x_q) \ln (x_q/x_p) .$$

Připusťme, že by bylo $\Delta_{pqr} = 0$. To by znamenalo (protože $x_p > 0$), že je $(\bar{x}_q - 1) \ln \bar{x}_r = (\bar{x}_r - 1) \ln \bar{x}_q$, kde $\bar{x}_q = x_q/x_p \neq 1$, $\bar{x}_r = x_r/x_p \neq 1$, $\bar{x}_q \neq \bar{x}_r$ a tedy

$$\frac{\ln \bar{x}_r}{\bar{x}_r - 1} = \frac{\ln \bar{x}_q}{\bar{x}_q - 1} .$$

Tato rovnost však nemůže být splněna, neboť $\bar{x}_r \neq \bar{x}_q$ a $f(x) = \ln x/(x - 1)$ je klesající funkce v celém svém definičním oboru. Proto je $\Delta_{pqr} \neq 0$ a tím také $D > 0$.

Poznámka. Existuje podstatně kratší důkaz, který však předpokládá některé speciální znalosti:

Definujme tři vektory v n-rozměrném prostoru

$$\mathfrak{a} = \{1, 1, \ldots, 1\}, \qquad \mathfrak{b} = \{\ln x_1, \ln x_2, \ldots, \ln x_n\},$$
$$\mathfrak{c} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Potom lze vyjádřit prvky determinantu D jako skalární součiny těchto vektorů, totiž

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a}, & \mathfrak{a}\mathfrak{b}, & \mathfrak{a}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\mathfrak{b}, & \mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}, & \mathfrak{c}\mathfrak{b}, & \mathfrak{c}\mathfrak{c} \end{vmatrix} .$$

Toto je ale Gramův determinant třetího řádu (viz např. V. J. Smirnov: *Kurs vysšej matematiki*, díl III, kap. 1, § 2). Jeho hodnota je kladná, když jsou vektory $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ lineárně nezávislé, a je rovna nule, když jsou tyto vektory lineárně závislé.

Vektory $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ jsou však lineárně nezávislé, neboť výše bylo ukázáno, že je $\Delta_{pqr} \neq 0$, a proto je hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \ln x_1 & \ln x_2 & \dots & \ln x_n \end{pmatrix}$$

rovna 3.