[dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

Johannes Lehmann

Činorodé přátelství

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. Sborník. (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 127–137.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405347

ČINORODÉ PŘÁTELSTVÍ

JOHANNES LEHMANN

Smyslem mimoškolní práce je vyjít důsledně vstříc přirozeným předpokladům, sklonům a zájmům mládeže a rozvinout je tak, abychom z každého mladého člověka vychovali užitečného člena socialistické společnosti. K dosažení vynikajících výkonů v nějakém oboru — jak svědčí zkušenost zejména z posledního desetiletí — dnes už nestačí jen vzorně spolupracovat při výuce a svědomitě plnit uložené úkoly. Dvě až tři hodiny tělocviku týdně anebo jedna až dvě hodiny hudební výchovy nestačí k získání ceny při utkání nebo při soutěži.

Ohlédnete-li se nazpět, na čtvrtstoletí nepřetržité, obsahově bohaté mimoškolní práce v oboru matematiky, uvidíte jasný důkaz, že jste poznali význam matematiky pro všestranný rozvoj socialistické osobnosti a poskytujete všem mladým lidem možnost plně rozvinout své vlohy, sklony a zájmy v tomto stěžejním oboru.

S velkou radostí vzpomínám na své návštěvy u vás. Vždy jsem u vás načerpal mnoho zkušeností a pokaždé jsem se domů vracel s kupou matematické literatury pro mládež a s množstvím úloh pro naši olympiádu.

Naši mladí matematici mohli tak poznat úroveň vaší mimoškolní práce a současně si na předložených problémech vyzkoušet své síly.

Mám před sebou německá vydání vašich knížek: J. Vyšín: *Metody řešení matematických úloh*; O. Zich, A. Kolman: *Zajímavá logika*; J. Sedláček: *Nebojte se* *matematiky*; J. Sedláček: *Úvod do teorie grafů*. Tyto knihy si v NDR získaly mnoho přátel. Jsou příkladem syntézy odborné a zábavné matematiky a podněcují čtenáře, aby studoval jak moderní, tak tradiční problémy našeho stěžejního oboru.

Často jsem sedával s kolegy z časopisu Rozhledy a shromažďovali jsme zkušenosti a především materiál k našemu společnému snažení: přiblížit slovem i obrazem co největšímu počtu lidí exaktnost, eleganci a krásu matematiky. Copak není projevem opravdového přátelství, když — jak jsem to sám zažil — své síly měří družstva z Neubrandenburgu a Prahy nebo z Brna, Plovdivu, Poznaně a Chotěbuzi? Tento druh vztahů by se měl podle mého soudu pěstovat ještě víc.

Osmkrát jsem měl možnost zúčastnit se mezinárodních olympiád jako šéfredaktor matematického časopisu pro žáky *Alfa*. Na XIII. MMO, která se konala v roce 1971 v Žilině, jsem měl příležitost navázat osobní styky s mnoha kolegy z vaší země a předat pak jejich zkušenosti šedesáti tisícům čtenářů časopisu Alfa i mnoha mladým matematikům, vedoucím pracovních skupin a učitelům, kterým jsem přednášel.

Každá mezinárodní olympiáda mi poskytla možnost mluvit se členy a vedoucími vašeho družstva a poznat výkony vašich nadaných žáků. K tomuto příspěvku přikládám fotografie tří vašich účastníků MMO.*) Obě dívky, Helena Husová a Alena Vencovská, byly v posledních letech nejúspěšnější z dívek a Bohuš Sivák patřil k nejúspěšnějším účastníkům VII. MMO spolu s W. Burmeisterem z NDR a J. Pelikanem z MLR. Všichni tři jsou živým dokladem dobré práce.

Mé upřímné uznání a nejsrdečnější pozdravy patří

---

*) Viz str. 19, 20 a 22. Pozn. red.

všem, kdo s vytrvalostí, energií a radostí z matematiky pracují pro dobro naší společné věci.

Při každém našem setkání se mluvilo i o vlastních matematických problémech. A tak vám i při této příležitosti předkládám několik úloh z naší matematické olympiády a přeji vám radost a úspěch při jejich řešení.

V NDR se matematické olympiády konají ve čtyřech kolech: 1. kolem jsou školní olympiády (pro žáky 5. až 12. tříd) a účastní se ho zhruba půl miliónu žáků; 2. kolem jsou okresní olympiády (opět pro žáky 5. až 12. tříd) a těch se účastní zhruba 20 000 žáků; 3. kolem pak jsou krajské olympiády (pro žáky 7. až 12. tříd) s počtem účastníků asi 2 500, a konečně nejvyšším, 4. kolem je olympiáda NDR, do níž postupuje už jen asi 250 žáků z 10. až 12. tříd. Z těchto 250 účastníků celostátní olympiády je delegováno 8 nejlepších mladých matematiků na mezinárodní olympiádu.

Čtenářům tohoto příspěvku předkládám úlohy pro žáky 10. tříd z XIII. olympiády mladých matematiků NDR, která se konala 8. až 10. dubna 1974. Mohou z nich poznat úroveň posledního kola našich olympiád. Ve dvou čtyřhodinových klauzurách se řeší po třech úlohách (žák má možnost volit mezi 3A a 3B).

1. V ornamentu je dán rovnostranný trojúhelník ABC, v něm je nakreslena polokružnice k_1 (se středem M_1 a poloměrem r_1) a kružnice k_2 (se středem M_2 a poloměrem r_2) tak, že jsou splněny následující podmínky:

   (1) M_1 leží na úsečce AB,

   (2) k_1 se dotýká obou úseček AC a BC,

   (3) k_2 se dotýká k_1 zvenčí a obou úseček AC a BC.

   Ukažte, že platí $r_1 > r_2$, a vyjádřete poměr $r_1 : r_2$.

2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li $t_a = 6$ cm, $t_b = 8$ cm, přičemž t_a je délka těžnice jdoucí vrcholem A a t_b délka těžnice jdoucí vrcholem B.

Popište a odůvodněte konstrukci. Vyšetřte, zda takový trojúhelník ABC s danými délkami těžnic existuje a zda je až na shodnost určen jednoznačně.

3A. a) Dokažte, že k danému reálnému číslu x_0 lze číslo $x_0^2 + x_0 + 1$ vyjádřit graficky touto metodou: V pravoúhlém souřadnicovém systému s počátkem O se zkonstruuje čtverec $OPEQ$, jehož bod E má souřadnice $(1, 1)$ a body Q a E leží na rovnoběžce q s osou x. Na q se sestrojí bod X tak, že orientovaná úsečka (její smysl určuje znaménko při x_0) EX má délku $|x_0|$. V bodě X se sestrojí kolmice k přímce určené body P a X a určí se její průsečík Y s osou y. Pak je číslo $x_0^2 + x_0 + 1$ souřadnicí bodu Y.

b) Dokažte pomocí tohoto grafického postupu, že funkce f definovaná pro všechna x vztahem $f(x) = x^2 + x + 1$ nemá reálný nulový bod.

3B. Najděte všechny celočíselné dvojice (x, y), které vyhovují rovnici

$$(x + 2)^4 - x^4 = y^3 .$$

4. Vyšetřete, zda je číslo $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$ kladné, záporné nebo rovno nule.

5. Znázorněte v pravoúhlém souřadnicovém systému množinu všech číselných dvojic (x, y) které splňují rovnost

$$\Big|\,|x| + \big|\,|y| - 3\,\big| - 3\,\Big| = 1 .$$

6. Pravidelný čtyřstěn s vrcholy A, B, C a D s délkou hrany a protíná šest navzájem různých rovin, při-

čemž každá z nich obsahuje právě jednu hranu čtyřstěnu a střed protilehlé hrany.

a) Kolik vznikne celkem těles, jsou-li všechny rovinné řezy provedeny současně?
b) Vypočítejte objemy jednotlivých těles pomocí délky hrany a.

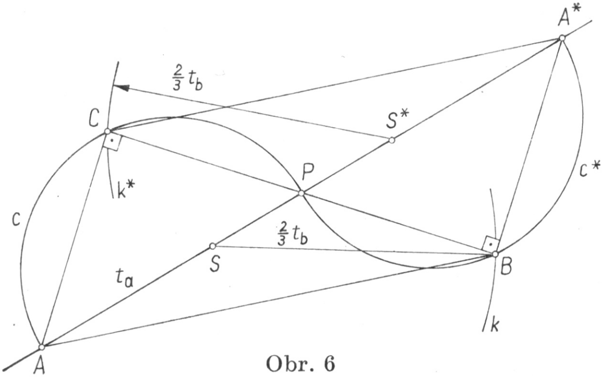
Z této skupiny sedmi úloh jsme vybrali náročnou 2. úlohu a ukážeme jednak návrh řešení vypracovaného skupinou, která úlohu připravila, a jednak velmi elegantní žákovské řešení.

Úlohu 2 řešilo 99 žáků. Bylo možno dosáhnout sedmi bodů. Výsledky udává tato tabulka:

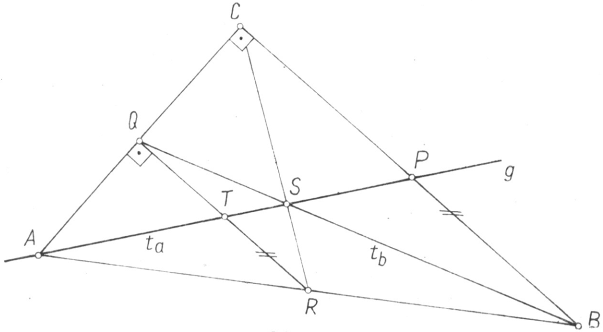
Body:	0	1	2	3	4	5	6	7
Počet žáků:	31	11	6	7	11	11	14	8

Při řešení bylo často použito aritmetických pomocných prostředků. To zpravidla vedlo ke složitým algebraickým výrazům, jejichž konstrukce dala vzhledem k nepřesnostem rýsování (spojování bodů ležících těsně vedle sebe) neuspokojivé řešení. Tak např. neměly trojúhelníky sestrojené podle vypočtených údajů u vrcholu C pravý úhel, a tak u žáků vznikly pochybnosti o správnosti řešení. Tvrzení o existenci trojúhelníka žáci touto metodou rovněž nepodali.

Základní myšlenka doplnění trojúhelníka ABC na rovnoběžník vedla převážně ke správnému řešení. Např. byly určeny body A^* a S^* středově souměrné k bodům A a S podle středu souměrnosti v bodě P (krajním bodě těžnice $AP = t_a$). Žáci správně určili, že bod C leží na Thaletově polokružnici k s průměrem AP a že $CS^* = \frac{2}{3}t_b$. Bod B je pak středově souměrný podle středu P k bodu C (obr. 6).



Obr. 6



Obr. 7

Někteří účastníci řešili úlohu konstrukcí založenou na zrcadlení podle bodu P.

Plný počet bodů však byl udělen jen těm účastníkům, kteří nalezli také správný důkaz existence trojúhelníka (obr. 7).

1. *Řešení komise pro úlohy:*

I. Předpokládejme, že trojúhelník ABC znázorněný na obr. 7 splňuje podmínky úlohy. P, Q, R jsou středy stran BC, CA, AB trojúhelníka ABC. S je průsečík všech tří těžnic. Platí $SA : SP = SB : SQ = 2 : 1$. Ze stejnolehlosti se středem v bodě A plyne, že QR je rovnoběžné s BC. QR a těžnice AP se protínají v bodě T. Protože $\sphericalangle ACB = 90°$, $BC \parallel QR$, je také $\sphericalangle AQT = 90°$ (obr. 7).

II. Trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy, jestliže jej lze sestrojit tímto způsobem:

(1) Sestrojíme na přímce g čtyři body A, T, S, P v tomto pořadí tak, že $AT = \frac{1}{2}t_a$, $TS = \frac{1}{6}t_a$, $SP = \frac{1}{3}t_a$.

(2) Nad AP opíšeme polokružnici k_1 a nad AT polokružnici k_2 tak, že k_1 a k_2 jsou ve stejné polorovině určené přímkou g.

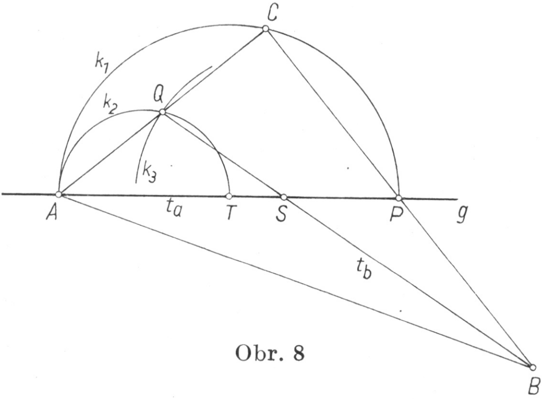
(3) Kolem bodu S opíšeme kružnici k_3 poloměrem $\frac{1}{3}t_b$. Tato kružnice protíná k_2 v bodě Q.

(4) Spojíme body A a Q a prodloužíme úsečku AQ za bod Q, až protne k_1. Získáme tak bod C.

(5) Úsečku CP prodloužíme za bod P. Spojíme Q a S a prodloužíme QS za bod S. Přímky CP a QS se protnou v bodě B (obr. 8).

III. Důkaz toho, že každý takto sestrojený trojúhelník splňuje podmínky úlohy:
Podle konstrukce je AP těžnice v trojúhelníku ABC vycházející z bodu A a má délku t_a. Protože $AS =$

$= \dfrac{2}{3} t_a$, je S těžiště trojúhelníka ABC. Protože $BC \parallel QT$, $2 . AT = AP$ a $\gamma = 90°$, leží C na polokružnici k_1 s průměrem AP, Q na polokružnici k_2 s průměrem AT a Q je středem strany AC. Protože



Obr. 8

můžeme obrátit větu o dělicím poměru těžiště v trojúhelníku, protínají se přímky QS a CP v bodě B tak, že platí $PC = PB$ a $BS = 2 . SQ$. Tedy jsou AP a BQ těžnice trojúhelníka ABC.

IV. Kroky (1) a (2) v konstrukci určí body A, T, S, P a kružnice k_1 a k_2 jednoznačně až na shodnost. Z (3) dostaneme bod Q právě tehdy, jsou-li splněny nerovnosti

$$\frac{2}{3} t_a < \frac{1}{2} t_a + \frac{1}{3} t_b \text{ a } \frac{1}{3} t_b < \frac{2}{3} t_a .$$

Tedy musí platit

$$t_a < 2t_b \quad \text{a} \quad t_b < 2t_a \tag{*}$$

Jestliže bude $t_a = 6$ cm a $t_b = 8$ cm, pak bude podmínka (*) splněna. Existuje tudíž průsečík Q. Tím (4) vede k určení bodu C. Protože $PC \nparallel QS$, je možno podle (5) vrchol B trojúhelníka ABC sestrojit.

2. *Vzorné žákovské řešení:*

I. Předpokládejme, že $\triangle ABC$ lze sestrojit na základě daných údajů. Potom nechť P a Q jsou středy odvěsen BC a AC a S průsečík AP a QB. Dále nechť je A^* bod na AP ležící za P tak, že platí $AP = A^*P = t_a$. Čtyřúhelník ABA^*C je rovnoběžník, protože jeho úhlopříčky se navzájem půlí. Tedy platí $\triangle ABC \cong \triangle BA^*C$. Nechť N je střed úsečky BA^*, S^* průsečík CN $(= t_b)$ s PA^* $(= t_a)$. Tato rovnost vyplývá ze shodnosti. Protože se těžnice protínají v poměru 2 : 1, platí $PS^* = \frac{1}{3}t_a$ a $CS^* = \frac{2}{3}t_b$.

Tím dostaneme následující konstrukci:

II. (1) Konstrukce $AP = t_a = 6$ cm.

(2) Konstrukce Thaletovy kružnice nad AP.

(3) Na AP nanesme za bod P úsečku $PS^* = \frac{1}{3}t_a = 2$ cm.

(4) Oblouk kružnice se středem S^* a poloměrem $\frac{2}{3}t_b = \frac{16}{3}$ cm protne Thaletovu kružnici v bodě C.

(5) Bod B se určí na CP za bodem P pomocí vztahu $CP = BP$. Trojúhelník ABC je hledaný trojúhelník.

III. *Důkaz.* Z (2) plyne, že $\sphericalangle ACB = 90°$ a $t_a = 6$ cm.
Z I. a dále ze shodnosti plyne

$$\triangle BA^*C \cong \triangle ABC \Rightarrow t_b = 8 \text{ cm},$$

tedy $\triangle ABC$ je hledaný trojúhelník.

IV. Krok (4) v konstrukci lze provést, pouze když platí

$$\frac{1}{3}t_a < \frac{2}{3}t_b < t_a + \frac{1}{3}t_a$$

a tudíž

$$t_a < 2t_b < 4t_a \, . \qquad (*)$$

Jelikož je 6 cm < 16 cm < 24 cm, existuje v našem případě právě jeden trojúhelník.

Jestliže platí (*), lze konstrukci provést vždy jednoznačně, a tedy existuje právě jeden trojúhelník *ABC*. Jestliže (*) neplatí, neexistuje trojúhelník *ABC*, konstrukci nelze provést.

Závěrem předkládáme čtenářům ještě 3 úlohy, které na XIII. olympiádě mladých matematiků NDR řešili žáci 11. a 12. tříd.

1. V rovině buďte dány dva nenulové vektory x a y. Vztahem
$$c_n = |x - ny| \text{ pro } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$
je definována posloupnost reálných čísel. Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby posloupnost (1) byla
a) rostoucí,
b) klesající,
c) v případě, že posloupnost (1) není ryze monotonní, vyšetřete, zda existuje přirozené číslo n_0 tak, že intervaly $1 \leqq n \leqq n_0$ a $n_0 < n$ jsou intervaly monotonie posloupnosti (1).

2. Je-li x reálné číslo, označme $[x]$ největší celé číslo, které není větší než x. (Tak je např. $[\pi] = 3$, $[0{,}7] = 0$, $[-0{,}7] = -1$).

   a) Ukažte, že existují dvě racionální čísla a, b tak, že čísla $c_n = an + b - [an + b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tvoří nekonstantní posloupnost a že všechna c_n jsou různá od nuly.

   b) Dokažte, že pro každá dvě racionální čísla a, b má posloupnost čísel definovaná v a) minimum.

3. Buďte n_1, n_2 celá kladná čísla; v rovině buď dána množina M_1 mající $2n_1$ navzájem různých bodů a množina M_2 mající $2n_2$ navzájem různých bodů, které jsou různé od všech bodů množiny M_1, a nechť neexistuje přímka, která by procházela třemi z těchto $2n_1 + 2n_2$ bodů. Dokažte, že pak existuje přímka g s následující vlastností: Rozdělíme-li přímkou g rovinu na dvě poloroviny H a K (g samotná nepatří ani k H, ani ke K), pak leží jak v polorovině H, tak v polorovině K právě polovina všech bodů z M_1 a právě polovina všech bodů z M_2.