Omezenost prostředků

In: Václav A. Hruška (author): Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1940. pp. 4–13.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405491

1.

OMEZENOST PROSTŘEDKŮ.

Úvod. Ve škole a v technické praxi často dáváme přednost jednoduché konstrukci před složitějším výpočtem. Tak na př. dosti přesně a rychleji sestrojíme poloměr kružnice vepsané trojúhelníku určenému stranami, než jej vypočítáme ze vztahu $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Při grafickém řešení soustav lineárních rovnic, jichž koeficienty jsou velká čísla (nebo čísla desetinná) je tomu podobně. Jsou však ještě jiné přednosti konstrukcí a geometrických obrazců, které daly podnět ke vzniku důležitého odvětví geometrie, t. zv. grafického počítání a které najde čtenář v jiné knížce této sbírky.*)

Provedení geometrických konstrukcí musí býti co možná nejpřesnější, neboť jen o takové lze se při delší práci opříti; proto je třeba složitější konstrukce vhodně upravovati a rozkládati v jednoduché, které můžeme provésti velmi přesně a užívati při nich co nejlepších pomůcek. Tak k rýsování přímek užíváme přesných kovových pravítek s facetou, k vynášení úseček při přesné technické práci (na př. v zeměpisném ústavě) t. zv. koordinátografu (přístroje sloužícího zároveň k přesnému vynášení nebo měření souřadnic pravoúhlých příp. polárních); v podstatě sestává tento přístroj z kovového měřítka opatřeného mikrometrickým a optickým zařízením, aby bylo možno jím přesně úsečky měřiti. Úhly se vynášejí přístroji podobně vybavenými.

K sestrojování rovnoběžek užíváme přístroje t. zv. parallelineálu. Jsou to vlastně dvě pravítka udržovaná v přesné

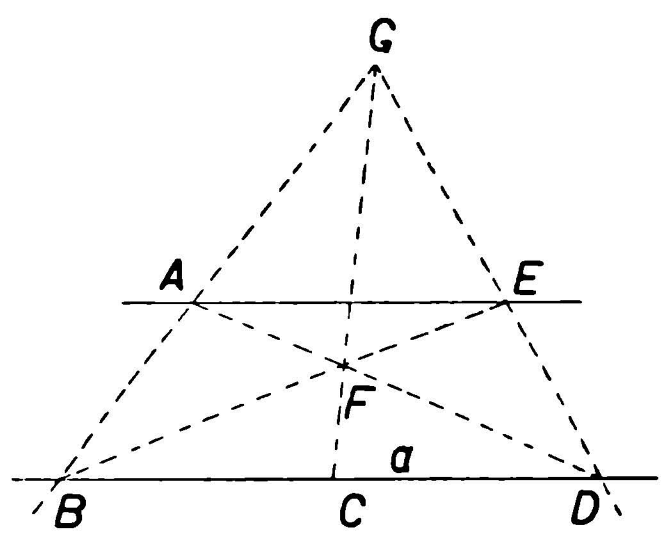
*) Viz Dr. V. Pleskot: Grafické počítání a nomografie.

rovnoběžné poloze dvěma táhly připevněnými k nim ve čtyřech bodech, které tvoří vrcholy rovnoběžníka.

Vedle kružítka užívá se pro řešení úloh třetího a čtvrtého stupně parabolografu (přístroje pro přesné rýsování parabol), elipsografu a j.

Při drobné práci školní a technické tyto nákladné přístroje většinou chybí. Mimo to jejich užití je omezeno často tím, že části konstrukcí leží mimo nákresnu a že právě těchto částí je v dalším třeba. Jak odstraňovati v základních geometrických konstrukcích, z nichž se složitější skládají, obojí obtíže takto vzniklé, je právě úkolem následujících řádků.

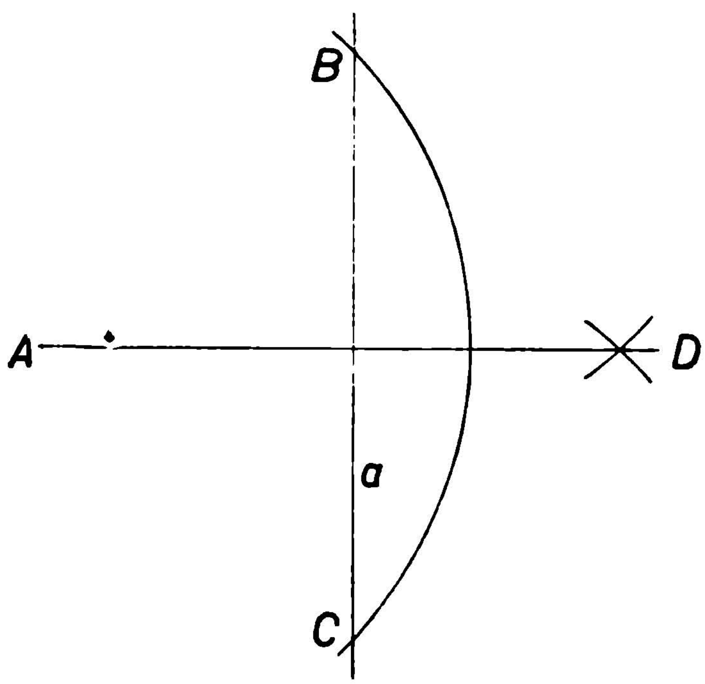
1,1. Rozdělení konstrukcí. K praktickému provádění geometrických konstrukcí lze užíti jen několika málo jednoduchých pomůcek; tak není potřebí složitého paralellineálu k sestrojení rovnoběžek, ale jak známo ze střední školy, stačí k tomu buď kreslicí trojúhelník a obyčejné pravítko, nebo také jen pravítko a kružítko.



Obr. 1. Bodem A vésti rovnoběžku s přímkou a užitím jediného pravítka a kružítka.

Konstrukce rovnoběžky vedené bodem A k přímce a jedním pravítkem a kružítkem (obr. 1) plyne z věty, že v lichoběžníku $ABDE$ spojnice FG průsečíku F úhlopříček a průsečíku G ramen půlí základnu BD. Zvolíme v rovině bod G a od průsečíku B spojnice AG s a naneseme kružítkem dvakrát libovolnou délku $\overline{BC} = \overline{CD}$ na a. Spojíme-li C a D s G, sestrojíme průsečík $F \equiv (AD, CG)$ a průsečík $E \equiv (BF, DG)$, načež je $AE \parallel a$. Dokonce kružítko užité k této konstrukci může míti stálou, nikoliv měnitelnou vzdálenost obou hrotů.

Podobně můžeme z bodu A spustiti kolmici k přímce a buď pravoúhlým trojúhelníkem, nebo také obyčejným pravítkem a kružítkem (obr. 2). Ze středu A opíšeme kružnici o takovém poloměru, aby proťala a ve dvou bodech, B a C. Kružítkem sestrojíme libovolný bod D, jehož vzdálenosti od B a C jsou stejné. AD je hledanou kolmicí.



Obr. 2. S bodu A spustiti kolmici na přímku a užitím pravítka a kružítka.

S praktického hlediska způsob vedení rovnoběžek, uvedený v obr. 1, je výhodný tehdy, je-li bod A značně vzdálený od a a nemáme-li dosti velkého kreslicího trojúhelníka. Podobně je tomu s konstrukcí v obr. 2.

Zároveň však vidíme, že spouštění kolmice z bodu na přímku užitím jen pravítka a kružítka je komplikovanější než užitím pravoúhlého kreslicího trojúhelníka a je dokonce nemožné jen obyčejným pravítkem bez kružítka nebo bez trojúhelníku. Omezíme-li naše pomůcky k provádění konstrukcí, zkomplikujeme některé konstrukce, některé dokonce znemožníme. Vzniká proto otázka klasifikace konstrukcí podle prostředků, jimiž je můžeme provésti.

a) Pravítkem můžeme provésti konstrukce, v nichž jest vésti pouze konečný počet přímek, které smíme libovolně zvoliti, nebo libovolně vésti známým bodem, nebo konečně které spojují dva známé body. Takové konstrukce nazýváme prvého stupně nebo lineární.

b) Je-li kromě toho v konstrukci nakresliti konečný počet kružnic o známém středu a poloměru, stačí k ní pravítko a kružítko. Takové konstrukce nazývejme druhého stupně nebo kvadratické. L. Mascheroni[1]) však dokázal, že tyto konstrukce můžeme provésti také jen kružítkem bez pravítka. Naproti tomu J. Steiner[2]) dokázal, že veškeré tyto konstrukce lze provésti pouhým pravítkem, máme-li v rovině již nakreslenou jedinou kružnici. Nověji A. Adler[3]) dokázal, že tyto úlohy lze také řešiti užitím pohyblivého pravého úhlu atd.[4])

c) K provedení konstrukcí, v nichž se vyskytují ještě jiné křivky, nestačí jen pravítko a kružítko nebo je nahrazující zařízení, na př. jeden pohyblivý pravý úhel. Nazývejme je prozatím vyššího stupně (rozuměj vyššího než druhého).

Pravítka a kružítka můžeme užíti ke konstrukci i způsobem odchylným od definic a) a b). Na příklad k sestrojení společných tečen dvou kružnic, z nichž žádná neleží zcela uvnitř druhé, jest zapotřebí pravítka i kružítka (nebo místo něho kreslicího trojúhelníka), užíváme-li jich podle definic a) a b). Jednodušeji však řešíme úlohu prostým přiložením

---

[1]) La Geometria del compasso (Pavia, 1797).

[2]) Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linien und eines festen Kreises (Berlin, 1833, znovu otištěno v Ostwald's Klassiker No. 60).

[3]) Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel (Sitzgsber. Wiener Akad. 1890).

[4]) Srovnej též J. Vojtěch, Teorie geometrických konstrukcí (Příl. Časop. pro pěst. mat. a fys., sv. 31, 1902); H. Simon, Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel (Zeitschrift f. math. u. naturwis. Unterricht XXII, 1891); G. Wallenberg, Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß (Sitzgber. Berliner mat. Gesellsch. IV, 1905); F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen d. Elementargeometrie (Leipzig, 1895, 2. vyd. Berlin); F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare (Bologna, 1900); D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Leipzig, 1903); A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen (Leipzig, 1906).

pravítka tak, aby se dotýkalo obou nakreslených kružnic. Takové užívání pravítka nevyhovuje ovšem definici a) a J. Hjelmslev[5]) nazývá takto provedenou konstrukci geometrickým experimentem. Podobně je možno užívati i jiných pomůcek konstrukce. Ačkoliv se tím mnohé konstrukce velmi zjednoduší, nedoporučuje se užívati geometrických experimentů pro jejich menší přesnost.

1,2. Jiné klasifikace konstrukcí. Každé konstrukci můžeme přiřaditi, na př. užitím analytické geometrie, jednu nebo několik rovnic mezi různými veličinami v ní užitými, jako jsou délky, úhly, dvojpoměry atd. Jsou-li veškeré tyto rovnice algebraické, nazývejme konstrukci také algebraickou, jinak ji nazývejme transcendentní. Je-li m počet nezávislých algebraických rovnic, přiřazených algebraické konstrukci a známe-li veškeré až na m z těchto veličin, můžeme pak naší konstrukcí najíti i těchto m neznámých veličin. Předpokládáme obvykle, že v každé z těchto rovnic jest pouze jediná neznámá. V opačném případě bychom toho docílili eliminací ostatních neznámých.

V případě algebraických konstrukcí můžeme také přiřazené rovnice vždy upraviti na irreducibilní[6]) rovnice, jichž koeficienty jsou racionální funkce známých veličin o racionálních koeficientech. Nejvyšší ze stupňů přiřazených rovnic takto upravených nazýváme také stupněm algebraické konstrukce.

Toto rozdělení algebraických konstrukcí na různé stupně nesouhlasí však úplně s jejich rozdělením provedeným v předchozím odstavci.

Veškeré konstrukce, které lze provésti jen pravítkem, jsou lineární i ve smyslu analytické geometrie. Kromě nich však

---

[5]) Geometrische Experimente (Leipzig, 1915).

[6]) Označení irreducibilní mnohočlen dáváme mnohočlenu o racionálních koeficientech, který nelze rozložiti v činitele stupňů nižších rovněž s racionálními koeficienty. Úprava spočívá v odstranění odmocnin umocněním a pod.

je ve smyslu analytické geometrie lineární také na př. rozpůlení úsečky, neboť vede na lineární rovnici o racionálních koeficientech, ačkoliv k této konstrukci potřebujeme kružítka.

Souvisí to s rozdělením vlastností konstrukcí na:

a) Projektivní, t. j. takové, které se nemění středovým promítáním, jako na př., jde-li přímka průsečíkem jiných dvou přímek, nebo má-li dvojpoměr čtyř bodů známou hodnotu atd.

b) Metrické, t. j. takové, které jsou vyjádřeny délkami úseček a velikostmi úhlů, jako na př. rovnoběžnost nebo kolmost dvou přímek, nebo rozpůlení úsečky, atd. Tyto vlastnosti konstrukcí se promítáním mění, na př. rovnoběžky se promítají v různoběžky atd.

Metrické vlastnosti konstrukcí však můžeme vyjádřiti také jako vlastnosti projektivní, zavedeme-li v rovině úběžnou přímku a kruhové body,[7]) které dohromady nazývejme absolutními útvary roviny. Místo kruhových bodů užíváme někdy isotropických přímek, jimiž se kruhové body promítají z některého bodu roviny. Isotropické přímky jsou imaginární sdružené, stejně jako body kruhové. Tak na př. rovnoběžnost dvou přímek, která je jejich vlastností metrickou, můžeme projektivně vyjádřiti tím, že se protínají na úběžné přímce roviny; kolmost přímek, že jsou navzájem harmonicky sdruženy vzhledem k isotropickým přímkám. Rovněž rozpůlení úsečky $\overline{AB}$ projektivně vyjádříme jako vyhledání čtvrtého bodu harmonicky sdruženého vzhledem k A, B s úběžným bodem spojnice AB atd.

Projektivní konstrukce, lineární ve smyslu analytické geometrie, lze provésti jediným pravítkem a naopak. Souhlasí proto úplně s lineárními konstrukcemi podle definice 1,1 a).

Metrické lineární konstrukce se stanou projektivními

[7]) T. j. průsečíky úběžné přímky s libovolnou kružnicí v rovině. Všechny kružnice roviny procházejí těmito body.

a tedy proveditelnými jediným pravítkem, zavedeme-li do roviny její absolutní útvary. K tomu však potřebujeme míti v rovině kružnici, která by do ní zavedla kruhové body. Tedy ke konstrukci potřebujeme kružítka. Předpokládáme-li jako J. Steiner,[2]) že v rovině máme již nakreslenu třeba jedinou kružnici, známe v rovině i kruhové body a můžeme pak samozřejmě i lineární metrické úlohy provésti jediným pravítkem.

Kvadratické konstrukce ve smyslu analytické geometrie, t. j. konstrukce, které vedou na irreducibilní kvadratickou rovnici o racionálních koeficientech, lze řešiti pravítkem a kružítkem. Jsou tedy obsaženy mezi konstrukcemi definovanými v odst. 1,1 b).

Podotknouti sluší, že pravítkem a kružítkem lze řešiti i některé úlohy stupně vyššího než druhého ve smyslu nyní užívaném. Nejznámější z těchto konstrukcí jest sestrojiti stranu x pravidelného pětiúhelníka, vepsaného do kružnice o poloměru 1. Strana x je kořenem rovnice čtvrtého stupně

$$x^4 - 5x^2 + 5 = 0, \tag{1}$$

kterou nelze rozložiti v činitele nižších stupňů o racionálných koeficientech.

Skutečně, jsou-li její kořeny

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}},$$

lze psáti její levou stranu ve tvaru

$$x^4 - 5x^2 + 5 \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

ať je x jaké chce. Snadno se však přesvědčíme, že žádný rozklad tohoto mnohočlenu v činitele tvaru $(x - x_i)$, $(x - x_i)(x - x_k)$, $i \neq k$, atd. nemá vesměs racionálné koeficienty.

Úloha je čtvrtého stupně. Jeden z těchto rozkladů ve dvě kvadratické rovnice

$$\left(x^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

má však koeficienty, které dovedeme sestrojiti pravítkem a kružítkem, neboť jsou kořeny kvadratické rovnice s racionálními koeficienty

$$y^2 - 5y + 5 = 0.^{8}) \qquad (3)$$

Pak ale můžeme také řešiti pravítkem a kružítkem obě rovnice (2), jejichž koeficienty jsou známé po sestrojení kořenů rovnice (3), a tedy i rovnici čtvrtého stupně (1).

Nebudeme se pouštěti do podrobností, jež vyžadují hlubší znalosti z algebry, které nechceme předpokládati a jen uvedeme, že pravítkem a kružítkem lze řešiti pouze úlohy, v nichž neznámá je vyjádřena výrazem tvaru

$$a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + \sqrt{\ldots \sqrt{n}}}}} \qquad (4)$$

o konečném počtu druhých odmocnin a konečném počtu racionálních čísel $a, b, c, d, \ldots, n$, což věděl již Descartes.[9]) Speciálně je tedy nemožné pravítkem a kružítkem řešiti úlohy stupně dělitelného lichým prvočíslem. Takové staré problémy třetího stupně, tedy neřešitelné kružítkem a pravítkem, jsou na př. rozdělení úhlu na 3 stejné úhly (trisectio anguli) a nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu krychle dané (duplicatio cubi, nazývaný též Délickým problémem). Z novějších, takto neřešitelných problémů je to vepsání do kružnice pravidelného sedmiúhelníka (viz později odst. 4,2 B) a pravidelného devítiúhelníka. Z nejslavnějších problémů vyššího stupně, řešených pravítkem a kružítkem, je vepsání do kružnice pravidelného sedmnáctiúhelníka.[10])

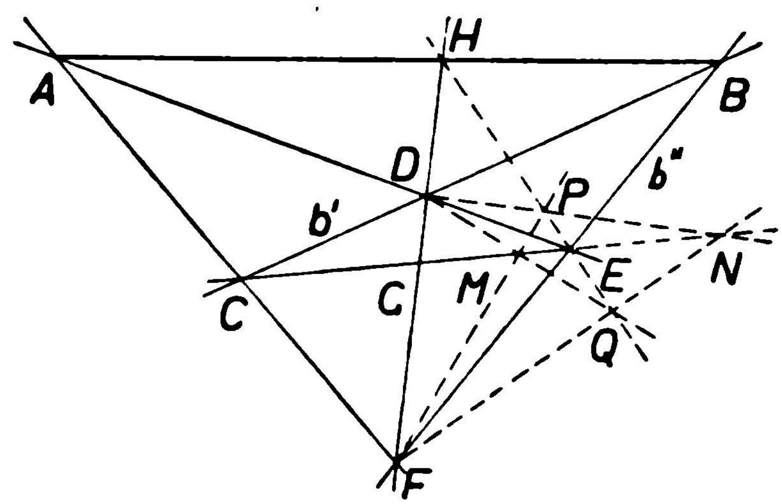
---

[8]) Viz Dr. V. Pleskot, Grafické počítání a nomografie (Praha, JČMF, 1940).

[9]) La géométrie (Leyde, 1638), přel. Schlesinger, Berlin, 1894.

[10]) Gauss, Werke I, str. 412, viz též A. Strnad, Příl. Časop. pro pěst. mat. a fys., sv. 33 (1904) a 36 (1907).

1,3. Příklady konstrukcí omezenými prostředky. Ačkoliv tyto úvahy o provádění konstrukcí omezenými prostředky jsou převážně teoretického charakteru, přece mají i značný význam praktický. Někdy totiž nemáme nebo nemůžeme si opatřiti veškeré pomůcky k snadnému a jednoduchému provedení konstrukce.



Obr. 3. Sestrojení bodu H na spojnici bodů A, B pravítkem kratším než úsečka AB.

Na příklad, kovová pravítka s přesně přímou hranou jsou velmi drahá. Je-li nakresliti spojnici bodů A, B a disponujeme-li pouze takovým pravítkem kratším než úsečka AB (obr. 3), znamená to značný výdaj za opatření delšího pravítka. Úlohu řešíme však snadno naším krátkým pravítkem, dovedeme-li vyhledati vhodný bod na spojnici AB.

Sestrojme úplný čtyrroh $CDEF$, v němž A, B jsou dva diagonální body (t. j. průsečíky úhlopříček). Je-li G třetí bod diagonální, hledaný bod H na spojnici DF splňuje vztah $(DFGH) = -1$. Sestrojíme jej užitím tečkovaného čtyrrohu $MNPQ$ jako čtvrtý harmonický bod sdružený s G vzhledem k D, F. Krátké spojnice AH a HB tvoří dohromady hledanou dlouhou spojnici AB. Přesvědčte se, že všechny spojnice dvou bodů, jako CE, DF atd., které máte nyní nakresliti, jsou kratší než AB. Kdyby i některá ze spojnic AH nebo HB byla delší než pravítko, které máme k disposici, opakováním konstrukce vložíme mezi body A, H nebo H, B další bod spojnice AB atd.

Nejvíce ztěžuje konstrukci, padnou-li některé její prvky (body, přímky, atd.) mimo nákresnu, která je v praksi vždy omezených, konečných rozměrů. Takových nedostupných prvků nemůžeme v konstrukci užívati stejným způsobem jako dostupných prvků na nákresně.

Na příklad nemůžeme pravítko přiložiti k nedostupnému průsečíku B přímek b' a b'', nakreslených na nákresně. Proto jeho spojnici s dostupným bodem A nemůžeme nakresliti podle pravítka, které bylo přiloženo k oběma bodům, jak by tomu bylo, kdyby oba body byly dostupné. Můžeme však přes to, že B je nedostupný, najíti podle obr. 3 na spojnici AB bod H, volíme-li vhodně C, D na b' a E, F na b''. Je-li H dostupný, část AH spojnice AB leží zcela na nákresně a můžeme ji již nakresliti obvyklým způsobem podle pravítka, přiloženého k bodům A a H.

Konstrukcím tak pozměněným, aby bylo možno v nich užívati také prvků nedostupných, budeme říkati stručně konstrukce v omezené nákresně. Pro jejich praktickou důležitost věnujeme jim zvláštní kapitolu.