II.

VYROVNÁNÍ PŘÍMÝCH MĚŘENÍ.

1. Různé druhy vyrovnání. V této kapitole si nejprve uvědomíme, o jaké úkoly v t. zv. vyrovnávacím počtu jde.

a) Vyrovnání přímých měření. Pro danou veličinu x jsme naměřili hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Podle jakého pravidla vypočteme z měřených hodnot výslednou neboli vyrovnanou hodnotu? Jak můžeme posouditi přesnost provedených měření a přesnost vyrovnané hodnoty?

b) Vyrovnání zprostředkujících měření. Mezi délkou L kovového měřítka M a teplotou t předpokládejme jednoduchý vztah

$$L = A + Bt.$$

Měřítko M bylo srovnáno při různých teplotách $t_1, t_2, \ldots, t_n$, s jiným měřítkem M', jehož délku při každé teplotě umíme vypočísti, a ze srovnání byly určeny délky L_i srovnávaného měřítka M pro teplotu t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, takže má býti

$$L_i = A + Bt_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Hledané veličiny jsou v tomto případě A a B. Nejsou měřeny přímo, provedená měření veličin L_i a t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, zprostředkují výpočet hledaných veličin.

Obyčejně je počet rovnic (1) větší než počet hledaných veličin, tedy $n > 2$, a vliv měřických chyb působí, že nemohou býti všechny rovnice (1) splněny přesně.

Jaké hodnoty v tomto případě zvolíme za výsledné (vyrovnané) hodnoty A a B, aby rovnice (1) byly splněny alespoň „co nejlépe“? A jak zde posoudíme přesnost provedených měření a přesnost vyrovnaných hodnot?

c) Vyrovnání závislých měření. V trojúhelníku ABC byly měřeny všechny tři vnitřní úhly. Označíme naměřené hodnoty A, B, C a jejich hledané opravy x, y, z. Jde-li o rovinný trojúhelník, musí součet jeho vnitřních úhlů býti roven $180°$, t. j.

$$x + y + z + A + B + C - 180^\circ = 0. \qquad (2)$$

Rovnice (2), které se říká podmínka nebo rovnice závislosti, musí býti splněna přesně. Ale k určení tří neznámých nestačí.

Jak určíme v takovém případě hledané vyrovnané veličiny? A můžeme i v takových případech posouditi nějak přesnost měření a přesnost vyrovnaných hodnot?

V dalších odstavcích uvidíme, že vyrovnání přímých i závislých měření se dá převésti na vyrovnání měření zprostředkujících (srovn. III, odst. 7b a IV, odst. 1). Proto začneme s úvahou o tomto vyrovnání.

Máme určiti neznámé x, y, z, ... tak, aby byly „co nejlépe" splněny rovnice

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

α) je-li počet neznámých menší než počet rovnic n a

β) nedají-li se všechny rovnice přesně splniti žádným systémem hodnot $x, y, z, \ldots$.

Podobné úlohy jsou dosti časté, a to nejen v měřických vědách (na př. fysice, astronomii, geodesii). Hledá se na př. přímka či křivka, která se „co nejlépe přimyká" nebo „co nejlépe nahrazuje" řadu daných bodů. Nebo hledá se vztah mezi proměnnými, který „co nejlépe vyhovuje" daným, statisticky zjištěným, hodnotám atd.

Ve všech takových a podobných případech musíme vyjasniti, jaký je přesný smysl matematicky neurčitých slovních obratů „co nejlépe splniti", „co nejlépe nahraditi", „co nejlépe se přimykati", „co nejlépe vyhovovati".

Ať zvolíme jakýkoli systém hodnot $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, ... budou — podle podmínky β) — aspoň některé z hodnot

$$a_i X + b_i Y + c_i Z + \ldots - l_i = V_i \qquad (4)$$

různé od nuly.

Hodnotám V_i se říká **odchylky**, rovnicím (4) **odchylkové rovnice**.

Abychom mohli posouditi, který ze dvou libovolně zvolených systémů hodnot $x, y, z, \ldots$ „lépe" splňuje rovnice (3), musíme srovnávati v obou případech zbývající odchylky V_i. Ale jak je máme srovnávati? Uvedu tři různé způsoby takového srovnávání.

α) Ve své Mécanique céleste*) navrhuje Laplace určovati vyrovnané hodnoty $x, y, z, \ldots$ tak, aby absolutní hodnota největší z odchylek V_i byla menší než pro jakékoli jiné hodnoty neznámých.

Objasníme tento předpis na jednoduchém příkladě přímých měření. Naměřili jsme pro danou veličinu x hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Předpokládejme, že jsme je uspořádali podle velikosti, takže

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n.$$

V tomto případě má býti

$$x - x_i = 0, \tag{3'}$$

ale vlivem měřických chyb bude

$$x - x_i = V_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4'}$$

kde odchylky V_i jsou obyčejně malé hodnoty.

Snadno se nahlédne, že vyrovnaná hodnota x', vyhledaná podle uvedeného předpisu Laplaceova, musí býti uprostřed mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou, t. j. musí $x' = \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$. V tomto případě bude totiž největší odchylka $+\frac{1}{2}(x_1 + x_n) - x_1 = \frac{1}{2}(x_n - x_1)$, a nejmenší odchylka $+\frac{1}{2}(x_1 + x_n) - x_n = \frac{1}{2}(x_1 - x_n)$, absolutní hodnoty obou těchto extrémních odchylek jsou stejné. A je ihned patrno, že pro jakékoli x', různé od $\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, bychom došli k větším odchylkám než je $\frac{1}{2}(x_n - x_1)$.

Jak viděti, nezávisí v tomto případě výsledná hodnota x' vůbec na tom, jaké hodnoty byly naměřeny mezi x_1 a x_n.

Ten, kdo se postaví na stanovisko, že je nesprávné, nedbati takto — mnohdy — většiny naměřených hodnot, musí tento návrh Laplaceův pro případ přímých měření odmítnouti.

*) Livre III, § 39.

β) Uvedu jiný vyrovnávací předpis, který navrhl Edgeworth:*) Určiti vyrovnané hodnoty neznámých $x, y, z, \ldots$ tak, aby součet absolutních hodnot odchylek byl co nejmenší. Má tedy býti minimem součet

$$S = \sum_{i=1}^{n} | a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - l_i |. \tag{5}$$

Ukážeme na jednoduchém příkladě, že tento předpis nevede vždy k určité vyrovnané hodnotě.

Mysleme si, že jsme veličinu x změřili dvakrát, s výsledky x_1 a x_2, a nechť $x_1 < x_2$. Pak jest $S = | x_1 - x | + | x_2 - x |$.

Pro $x \leqq x_1$ bude $S = x_1 - x + x_2 - x$, minimum nastane pro $x = x_1$ a je rovné $x_2 - x_1$.

Pro $x \geqq x_2$ bude $S = x - x_1 + x - x_2$, minimum nastane pro $x = x_2$ a je rovné $x_2 - x_1$.

Pro $x_1 < x < x_2$ bude $S = x - x_1 + x_2 - x = x_2 - x_1$, ať je x kdekoli mezi x_1 a x_2.

Určili jsme tedy minimum součtu S, ale toto minimum nenastává pro jedinou hodnotu x, nýbrž pro všechny hodnoty v celém intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, t. j. i včetně mezí.

Jak viděti, Edgeworthův vyrovnávací předpis nevede v tomto případě k cíli.

γ) Roku 1806 uveřejnil Legendre vyrovnávací způsob, který nazval methodou nejmenších čtverců. Již před ním užíval však methody nejmenších čtverců C. F. Gauss.

Podle této methody se určují vyrovnané hodnoty neznámých $x, y, z, \ldots$ tak, aby součet čtverců odchylek byl co nejmenší. Má tedy býti minimem součet

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - l_i)^2. \tag{6}$$

Aby součet (6) nabyl pro určitý bod $x', y', z', \ldots$ maxima nebo minima, musí se jeho první parciální derivace podle

*) Phil. Mag. 24 (1887), str. 222, a 25 (1888), str. 184. Cituji podle Whittaker-Robinson: l. c. str. 259.

$x, y, z, \dots$ v bodě $x', y', z', \dots$ rovnati nule.*) Musí tedy býti

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=x',\dots} = \sum_i a_i\,(a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i) = 0 = \sum_i a_i v_i,$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{x=x',\dots} = \sum_i b_i\,(a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i) = 0 = \sum_i b_i v_i,$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{x=x',\dots} = \sum_i c_i\,(a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i) = 0 = \sum_i c_i v_i,$$

. . . .

kde odchylka $v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i$. Zde a v dalším rozumíme odchylkami vždy odchylky vypočtené z hodnot $x', y', z', \dots$ plynoucích podle methody nejmenších čtverců. Na rozdíl od odchylek V_i vypočtených z libovolných hodnot $X, Y, Z, \dots$ označujeme je v_i.

Zavedeme-li označení $\sum_i a_i^2 = [a^2]$, $\sum_i a_i b_i = [ab]$, $\sum_i a_i c_i = [ac]$, $\sum_i a_i l_i = [al]$ atd., kde všude i probíhá celá čísla od 1 do n, můžeme místo předcházejících rovnic napsat:

$$\begin{aligned} [a^2]\,x' + [ab]\,y' + [ac]\,z' + \dots &= [al], \\ [ab]\,x' + [b^2]\,y' + [bc]\,z' + \dots &= [bl], \\ [ac]\,x' + [bc]\,y' + [c^2]\,z' + \dots &= [cl]. \end{aligned} \tag{7}$$

. . . .

Rovnicím (7) se říká normální rovnice. Z nich můžeme určiti vyrovnané hodnoty $x', y', z', \dots$ jednoznačně, pokud determinant soustavy (7) není roven 0. Prozatím to budeme předpokládati. Později ukážeme, co značí pro koeficienty a_i, b_i, c_i, když je determinant soustavy (7) roven 0 (viz III, odst. 4).

Legendre methodu nejmenších čtverců nedokazoval. Jen upozornil na její výhody.

---

*) J. Vojtěch: **Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, I. díl, 5. vyd., Praha 1939, str. 408—410.** — K. Petr: **Počet diferenciální, Praha 1923, str. 390—394.**

Pro přímé měření veličiny x, při kterém jsme naměřili hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, má býti minimem součet $\sum_i (x - x_i)^2$. Podmínka minima je $\sum_i (x' - x_i) = 0$ čili $nx' - \sum_i x_i = 0$, tedy $x' = [x] : n$.

V případě přímých měření vede tedy methoda nejmenších čtverců k vyrovnané hodnotě rovné aritmetickému průměru všech naměřených hodnot. Legendre upozorňuje na tuto přednost methody nejmenších čtverců. Všechny naměřené hodnoty vstupují do výsledku stejně, nejmenší a největší naměřená hodnota nemá přednostní postavení, jako měla v návrhu Laplaceově.

Jak jsme viděli, vede methoda nejmenších čtverců k jednoznačným výsledkům, ať jde o vyrovnání měření přímých nebo zprostředkujících. Uvidíme později, že vede k jednoznačným výsledkům i při vyrovnání závislých měření (srovn. IV, odst. 1). Je to tedy methoda obecnější než předpis Laplaceův nebo Edgeworthův. — Její užití je také mnohem snadnější než užití způsobů právě jmenovaných. Snadno se lze o tom přesvědčiti, pokusíme-li se vyhledati vyrovnané hodnoty všemi třemi způsoby pro případ, že zbývající odchylky mají tvar $a_i x - l_i = v_i$.

2. První (Gaussovo) zdůvodnění methody nejmenších čtverců: Postulát aritmetického průměru vede k methodě nejmenších čtverců. Označíme skutečnou hodnotu měřené veličiny písmenem x, naměřené hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak skutečné chyby jsou $\varepsilon_i = x - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pravděpodobnost, že skutečná chyba ε_i je v mezích od ε_i do $\varepsilon_i + d\varepsilon$, nechť jest $\varphi(\varepsilon_i)\, d\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pravděpodobnost, že skutečné chyby při n měřeních, provedených po sobě, jsou v mezích $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon \rangle$, $\ldots$, $\langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + d\varepsilon \rangle$, jest podle pravidla o součinu pravděpodobností rovna

$$(d\varepsilon)^n \varphi(\varepsilon_1)\, \varphi(\varepsilon_2) \ldots \varphi(\varepsilon_n). \tag{8}$$

Kdy je pravděpodobnost (8) při daných $x_1, \ldots, x_n$ největší,

t. j. pro které x nabude součin $\varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)\ldots\varphi(\varepsilon_n)$ maxima, nebo jinak řečeno, který předpoklad o správné hodnotě x bude nejpravděpodobnější? Je-li $\varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)\ldots\varphi(\varepsilon_n)$ maximální, jest i $\sum\limits_{i=1}^{n}\lg\varphi(\varepsilon_i)$ maximální. Aby tento výraz byl maximální, musí derivace podle x býti rovna 0, tedy

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\lg\varphi(\varepsilon_i)}{\mathrm{d}\varepsilon_i}=0. \tag{9}$$

To je podmínka pro maximum pravděpodobnosti (8). Tážeme se, lze-li určiti funkci φ tak, aby maximální hodnota pravděpodobnosti (8) nastala vždy pro

$$x=[x]:n? \tag{10}$$

Jinak řečeno, aby nejpravděpodobnější hodnotou byl vždy aritmetický průměr (postulát aritmetického průměru).

Rovnice (10) se dá psáti

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=0. \tag{10'}$$

Podmínka (9) přechází v (10′), je-li na př.

$$\frac{\mathrm{d}\lg\varphi(\varepsilon_i)}{\mathrm{d}\varepsilon_i}=k\varepsilon_i,$$

kde k je nějaká konstanta. Odtud

$$\lg\varphi(\varepsilon_i)=\tfrac{1}{2}k\,\varepsilon_i^2+k_1,\quad \varphi(\varepsilon_i)=e^{k_1}\,.\,e^{\frac{1}{2}k\varepsilon_i^2}.$$

Protože pak funkce φ klesá s rostoucím ε, musí býti konstanta k záporná. Píšeme $\tfrac{1}{2}k=-h^2$ a $e^{k_1}=c$. Tedy

$$\varphi(\varepsilon_i)=c\,.\,e^{-h^2\varepsilon_i^2}. \tag{11}$$

Aby při naměřených hodnotách $x_1, x_2, \ldots, x_n$ byl nejpravděpodobnější hodnotou aritmetický průměr, musí se chyby zatěžující měření nutně říditi normálním zákonem četnosti, ovšem za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi(\varepsilon_i)$ (srovn. I, odst. 8).

Pak je pravděpodobnost (8) rovna $c^n(d\varepsilon)^n\, e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2)}$. Požadavek, aby pravděpodobnost (8) byla maximální, je v tom případě totožný s požadavkem, aby $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$, (t. j. součet čtverců chyb) byl minimální; tento požadavek vede tedy k methodě nejmenších čtverců.

Jak patrno, nutnost vyrovnávati podle methody nejmenších čtverců plyne z toho, že se chyby zatěžující měření řídí normálním zákonem četnosti. A dále z postulátu aritmetického průměru plyne, že se chyby zatěžující výsledky měření řídí normálním zákonem četnosti, arci za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi(\varepsilon_i)$.

Tedy za uvedeného předpokladu postulát aritmetického průměru vede k vyrovnání podle methody nejmenších čtverců (srovn. VII, odst. 2a).

3. Vyrovnání přímých měření o nestejné váze. Označíme zase skutečnou hodnotu měřené veličiny písmenem x, hodnoty plynoucí z měření $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a skutečné chyby $\varepsilon_i = x - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Předpokládejme, že se tyto chyby řídí normálním zákonem četnosti a že hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ nemají stejnou váhu. Nejsou tedy stejně přesné. Označíme příslušné míry přesnosti $h_1, h_2, \ldots, h_n$ a váhy $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Pravděpodobnost, že chyba ε_i je v intervalu $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i + d\varepsilon_i \rangle$, jest $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2\varepsilon_i^2}\, d\varepsilon_i$ a pravděpodobnost, že skutečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou po řadě v intervalech $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1 \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2 \rangle, \ldots, \langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + d\varepsilon_n \rangle$, jest

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n\, e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2)}. \qquad (12)$$

Který předpoklad o správné hodnotě x bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost (12) největší, tedy pro nějž je součet $h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2$ nejmenší.

Mezi měrou přesnosti h_i, střední chybou m_0 pro jednotku váhy a vahou p_i jsou vztahy $p_i = m_0^2 : m_i^2$, a při normálním rozdělení četnosti $m_i^2 = 1 : 2h_i^2$, tedy

$$h_i = \frac{1}{m_0}\sqrt{\frac{p_i}{2}}$$

[srovn. I, (16) a I, (24)]. Předcházející výraz pro pravděpodobnost bude tedy roven

$$d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}}{(\sqrt{2\pi})^n\, m_0^n}\, e^{-\frac{1}{2m_0^2}(p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \dots + p_n\varepsilon_n^2)}. \tag{12'}$$

Který předpoklad o vyrovnané hodnotě x' bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost (12′) největší, tedy pro nějž je součet

$$S = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \dots + p_n^2\varepsilon_n^2 =$$
$$= p_1(x - x_1)^2 + p_2(x - x_2)^2 + \dots + p_n(x - x_n)^2 \tag{13}$$

nejmenší. Aby byl nejmenší, musí derivace podle x býti rovna 0, t. j.

$$p_1(x' - x_1) + p_2(x' - x_2) + \dots + p_n(x' - x_n) = 0,$$

čili

$$x' = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \tag{14}$$

Vzorec (14), dávající t. zv. obecný aritmetický průměr, je týž jako vzorec pro výpočet těžiště hmotných bodů o vahách $p_1, p_2, \dots, p_n$. Tato obdoba vedla k tomu, že veličiny $p = m_0^2 : m^2$ byly nazvány vahami (viz I, odst. 1, 5).

Váhy $p_1, \dots, p_n$, příslušné hodnotám $x_1, \dots, x_n$, klademe obyčejně — podle vzorce I, (18) — rovny počtu jednotlivých měření, z nichž jako aritmetický průměr byly vypočteny. To ovšem za předpokladu, že o jednotlivých měřeních můžeme důvodně souditi, že nemají různou váhu.

Jestliže nestejná přesnost jednotlivých měření je charakterisována ne vahami, ale příslušnými středními chybami

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ [vypočtenými podle vzorce II, (16')], užijeme k výpočtu vyrovnané hodnoty vzorce, který plyne ze (14), když tam dosadíme $p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$. Krátíme-li v čitateli a jmenovateli m_0^2, vyjde

$$x' = \frac{\frac{x_1}{m_1^2} + \frac{x_2}{m_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{m_n^2}}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \ldots + \frac{1}{m_n^2}}. \qquad (14')$$

Jde-li o dvě měření, přejde vzorec (14') ve

$$x' = \frac{m_2^2 x_1 + m_1^2 x_2}{m_1^2 + m_2^2}. \qquad (14'')$$

Že nastane pro $x = x'$ minimum součtu S, je patrno z toho, že druhá derivace výrazu (13) podle x jest rovna $[p]$, tedy kladná.*)

Ke stejnému výsledku přijdeme také touto úvahou:

Má-li měřená veličina x váhu p, pak má veličina kx váhu $P = \frac{p}{k^2}$. Neboť je-li m střední chyba veličiny x, je střední chyba veličiny kx rovna km a

$$P : p = \frac{1}{k^2 m^2} : \frac{1}{m^2} \quad \text{čili} \quad P = \frac{p}{k^2}.$$

Zvolíme-li $k = \sqrt{p}$, bude $P = 1$. To znamená: Místo abychom uvažovali měření různých vah, stačí násobiti každou odchylkovou rovnici odmocninou příslušné váhy a přisouditi všem měřením (a tedy i novým odchylkovým rovnicím) stejné váhy, rovné 1. V uvažovaném případě přímých měření o nestejné váze jsou odchylkové rovnice $v_i = x - x_i$, váhy p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Místo nich uvažujeme odchylkové rovnice $v'_i = (x - x_i)\sqrt{p_i}$ o stejné váze, rovné 1.

---

*) J. Vojtěch, l. c. str. 268—270. — K. Petr, l. c. str. 272 až 274.

Podle předcházejícího odstavce má býti minimem součet čtverců odchylek

$$v'^2_1 + v'^2_2 + \dots + v'^2_n = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2.$$

A z toho plyne zase vzorec (14).

4. Střední chyba pro jednotku váhy. Střední chyba výsledku. Označíme střední chybu pro jednotku váhy písmenem m_0. Protože váha veličiny x_i je p_i, bude střední hodnota chyby ε_i rovna $\frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$, kde $i = 1, 2, \dots, n$ (viz I, (16')).

Ze vzorců $v_i = x' - x_i$, $\varepsilon_i = x - x_i$, plyne, násobíme-li p_i a sečteme:

$$[pv] = [p]\,x' - [px], \quad [p\varepsilon] = [p]\,x - [px]$$

a protože $[pv] = 0$ [viz (14)], jest $\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = x - x'$.

Odtud

$$v_i = x' - x + x - x_i = \varepsilon_i - \frac{[p\varepsilon]}{[p]} =$$

$$= \frac{1}{[p]}\left\{-p_1\varepsilon_1 - p_2\varepsilon_2 - \dots + ([p] - p_i)\,\varepsilon_i - \dots - p_n\varepsilon_n\right\}. \quad (15)$$

Podle vzorce I, (12'') vypočteme odtud čtverec střední hodnoty v_i^2, který označíme $\dot{v}_i^2$. Bude

$$\dot{v}_i^2 = \frac{1}{[p]^2}\left\{p_1^2\frac{m_0^2}{p_1} + p_2^2\frac{m_0^2}{p_2} + \dots + ([p_i] - p_i)^2\frac{m_0^2}{p_i} +\right.$$

$$\left. + \dots + p_n^2\frac{m_0^2}{p_n}\right\} = \frac{m_0^2}{[p]^2}\left\{([p] - p_i) + ([p] - p_i)^2 \cdot \frac{1}{p_i}\right\} =$$

$$= \frac{m_0^2}{[p]} \cdot \frac{[p] - p_i}{p_i}$$

a součet

$$[p\dot{v}^2] = \frac{m_0^2}{[p]}[p]\,(n-1) = m_0^2\,(n-1),$$

čili $$m_0^2 = \frac{[p\dot{v}^2]}{n-1}.$$

Správnou hodnotu součtu $[p\dot{v}^2]$ nemůžeme vypočísti, protože neznáme střední hodnoty $\dot{v}_i^2$. Jsme proto nuceni dosaditi za $[p\dot{v}^2]$ přibližnou hodnotu, t. j. součet čtverců odchylek, násobených příslušnými vahami $[pv^2]$, jak plyne z uvažované řady měření. Bude tedy přibližně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-1}. \tag{15'}$$

Protože skutečná chyba vyrovnané hodnoty $x' = \frac{[px]}{[p]}$ jest $\frac{[p\varepsilon]}{[p]}$, bude čtverec její střední hodnoty [viz I, (12″)]

$$\frac{1}{[p]^2}\left\{p_1^2\frac{m_0^2}{p_1} + p_2^2\frac{m_0^2}{p_2} + \dots + p_n^2\frac{m_0^2}{p_n}\right\} = \frac{m_0^2}{[p]}.$$

Tedy střední chyba vyrovnané hodnoty $x' = \frac{[px]}{[p]}$ jest přibližně

$$\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{(n-1)[p]}}. \tag{16}$$

Podobně střední chybu vyrovnané hodnoty (14′) můžeme psáti

$$\frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{m_0^2}{m_1^2} + \frac{m_0^2}{m_2^2} + \dots + \frac{m_0^2}{m_n^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \dots + \frac{1}{m_n^2}}}. \tag{16'}$$

A střední chyba ve vzorci (14″) bude rovna

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}}}=\frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}. \tag{16''}$$

Jde-li o přímá měření stejných vah ($p_i = 1$), bude střední chyba pro jednotku váhy rovna

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \tag{15''}$$

a střední chyba vyrovnané hodnoty, t. j. aritmetického středu $x' = [x] : n$ jest

$$\pm \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)\,n}}. \tag{16'}$$

Abychom mohli počítati s malými čísly, píšeme $x_i = d + \dot{x}_i$, kde d je vhodně zvolená přibližná hodnota. Pak jest

$$x' = \frac{[px]}{[p]} = \frac{[p\,(d+\dot{x})]}{[p]} = d + \frac{[p\dot{x}]}{[p]}. \tag{17}$$

Dále bude

$$v_i = x' - x_i = d + \frac{[p\dot{x}]}{[p]} - d - \dot{x}_i = \frac{[p\dot{x}]}{[p]} - \dot{x}_i. \tag{18}$$

Pak

$$v_i^2 = \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]^2} - 2\,\frac{[p\dot{x}]}{[p]}\,\dot{x}_i + \dot{x}_i^2,$$

tedy

$$[pv^2] = [p]\,\frac{[p\dot{x}]^2}{[p]^2} - \frac{2\,[p\dot{x}]}{[p]}\cdot[p\dot{x}] + [p\dot{x}^2] = [p\dot{x}^2] - \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]}. \tag{19}$$

Pro přímá měření stejných vah ($p_i = 1$), bude

$$x' = d + [\dot{x}] : n, \tag{17'}$$

$$v_i = [\dot{x}] : n - \dot{x}_i, \tag{18'}$$

$$[v^2] = [\dot{x}^2] - [\dot{x}]^2 : n. \tag{19'}$$

5. Dvojice měření. a) Délky stran v polygonální síti se měří obyčejně dvakrát, jednou při postupu vpřed (p) a po druhé při postupu zpět (z). Předpokládáme, že jsou přibližně stejné, a označíme délku naměřenou pro i-tou stranu písmenem l_{ip} resp. l_{iz}.

Takovým a podobným měřením (na př. výškových rozdílů mezi dvěma sousedními výškovými značkami) se říká dvojice měření.

Označíme-li $l_{iz} - l_{ip} = d_i$ (rozdíl, diferenci měření zpět a měření vpřed), budou vyrovnané hodnoty $l_i' = \frac{1}{2}(l_{iz} + l_{ip})$ a odchylky

$$v_{i1} = \tfrac{1}{2}(l_{iz} - l_{ip}) = \tfrac{1}{2}d_i, \quad v_{i2} = \tfrac{1}{2}(l_{ip} - l_{iz}) = -\tfrac{1}{2}d_i.$$

Podle vzorce (15′) bude střední chyba jednoho měření

$$\pm \frac{d_i}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

a podle vzorce (16′) střední chyba aritmetického průměru obou měření

$$\pm \tfrac{1}{2}d_i. \tag{20'}$$

Uvažujme nyní o rozdílech $l_{iz} - l_{ip} = d_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Označíme-li skutečné chyby veličin l_{iz} a l_{ip} písmeny ε_{iz} a ε_{ip}, musí býti $l_{iz} + \varepsilon_{iz} = l_{ip} + \varepsilon_{ip}$, čili $l_{iz} - l_{ip} + (\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{ip}) = 0$. Rozdíly $\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{ip} = -d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou tedy skutečné chyby rozdílů měření zpět a vpřed.

Protože jsme předpokládali, že délky stran byly přibližně stejné, můžeme všem naměřeným délkám přisuzovati stejné váhy. Tedy i rozdíly d_i mají stejné váhy, jež volíme za 1. Pak střední hodnota těchto rozdílů, právě protože je můžeme považovati za skutečné chyby o váze rovné 1, je podle vzorce I, (10′) rovna

$$\pm \sqrt{[d^2] : n}. \tag{21}$$

Protože se váhy mají k sobě jako převrácené hodnoty čtverců středních chyb, budou podle vzorců (20) a (20′) váhy jednotlivých měření rovny 2 a váhy aritmetických středů rovny 4, takže příslušné střední chyby pro jednotlivá měření jsou

$$\pm \sqrt{[d^2] : 2n} \tag{21'}$$

a pro aritmetické středy

$$\pm \tfrac{1}{2} \sqrt{[d^2] : n}. \tag{21''}$$

b) Liší-li se značně délky stran (tratí), musíme předpokládati, že naměřené rozdíly mají nestejné váhy. Označíme váhu rozdílu d_i písmenem p_i. Při nivelacích na př. se klade váha rozdílu d_i rovna $1 : S_i$, kde S_i je délka trati v km. To značí, že váhu rovnou jednotce přisuzujeme rozdílu d pro trať rovnou 1 km.

Abychom vypočetli v tomto případě střední hodnotu d' rozdílu pro váhu rovnou 1, musíme nejprve naměřené rozdíly d převésti na rozdíly o váze rovné 1. To se stane tím, že je násobíme $\sqrt{p_i}$ (viz II, odst. 3). Pak užijeme zase vzorce I, (10'), takže

$$d' = \pm \sqrt{[pd^2] : n}\,. \tag{22}$$

Stejně jako v případě a) bude střední chyba pro jedno měření a váhu rovnou 1 nebo střední kilometrová chyba pro jedno měření

$$\pm \sqrt{[pd^2] : 2n}\,. \tag{22'}$$

A střední kilometrová chyba pro střed ze dvou měření jest

$$\pm \tfrac{1}{2} \sqrt{[pd^2] : n}\,. \tag{22''}$$

6. Příklady na vyrovnání přímých měření. 1. Pro dobu kyvu kyvadla č. 5 bylo naměřeno

0,50862228 sec,

245, (188; 217; 305; 278; 247; 328; 211; 159; 316; 307).

Jest vypočísti výslednou hodnotu, dále střední chybu pro jednotku váhy (t. j. střední chybu jednoho měření) a střední chybu výsledku.

Položíme $d = 0{,}50862$. Pak v jednotkách 10^{-8} bude

$\dot{x}_i = 228, (245; 188; 217; 305; 278; 247; 328; 211; 159; 316; 307)$;

odtud $[\dot{x}] = 3029$ a $\frac{1}{12}[\dot{x}] = 252$, tedy výsledná hodnota 0,50862252 sec. Pak zase v jednotkách 10^{-8} bude

$v_i \;\; = [\dot{x}] : n - \dot{x}_i = +24, (+7, +64, +35, -53, -26, +5, -76, +41, +93, -64, -55)$,

$v_i^2 \;\; = 576, (49; 4096; 1225; 2809; 676; 25; 5776; 1681; 8649; 4096; 3025)$. Odtud dostaneme $[v^2] = 32683 \,.\, 10^{-16}$.

Podle vzorce (15″) bude

$$m_0 = \pm \sqrt{2971} \,.\, 10^{-8} = \pm\, 5{,}45 \,.\, 10^{-7}\,\text{sec}.$$

A střední chyba výsledku podle vzorce (16′) jest

$$\pm \sqrt{\frac{32683}{132}} \,.\, 10^{-8} = \pm \sqrt{247{,}6} \,.\, 10^{-8} = \pm\, 1{,}6 \,.\, 10^{-7} \quad \text{sec}.$$

Užijeme-li vzorce (19′), bude $[\dot{x}^2] = 797251 \,.\, 10^{-16}$, $[\dot{x}]^2 = 3029^2 \,.\, 10^{-16} = 9174841 \,.\, 10^{-16}$, tedy $\frac{1}{12}[\dot{x}]^2 = 764570 \,.\, 10^{-16}$ a konečně $[v^2] = 32681 \,.\, 10^{-16}$.

Rozdíl mezi hodnotou $[v^2]$ vypočtenou podle vzorce (19′) a hodnotou vypočtenou přímo z odchylek v_i, je zaviněn zaokrouhlováním při výpočtu v_i resp. x'. Hodnota $32681 \,.\, 10^{-16}$ je přesnější.

Označíme-li chybu ve výsledku, pocházející ze zaokrouhlení, písmenem ε, budou správné hodnoty odchylek rovny $v_i + 2$, správné hodnoty jejich čtverců $v_i^2 + 2\varepsilon v_i + \varepsilon^2$ a správná hodnota součtu čtverců odchylek

$$[v^2] + 2\varepsilon\,[v] + n\varepsilon^2.$$

V uvažovaném případě je $\varepsilon = 0{,}42 \,.\, 10^{-8}$, $[v] = -5 \,.\, 10^{-8}$, tedy $2\varepsilon\,[v] = -4{,}20 \,.\, 10^{-16}$. A protože $n \,.\, \varepsilon^2 = 12 \,.\, 0{,}1764 \,.\, 10^{-16} \doteq 2{,}12 \,.\, 10^{-16}$, je $2\varepsilon\,[v] + n\varepsilon^2 = -2{,}08 \,.\, 10^{-16}$. Proto byl součet čtverců odchylek, vypočtený přímo z odchylek v_i, o 2 jednotky řádu 10^{-16} větší než správnější hodnota vypočtená podle vzorce (19′). Obyčejně se omezujeme na přímý výpočet $[v^2]$ z odchylek v_i.

Aby byl při výpočtu přehled, je dobře prováděti výpočet v tabulce, která počítajícího sama nutí k pořádku.

Předešlý příklad sestavený v tabulce bude:

Tabulka II.

$\dot{x}_i$	$v_i = \frac{[\dot{x}]}{n} - \dot{x}_i$	v_i^2
228	+24	576
245	+ 7	49
188	+64	4096
217	+35	1225
305	—53	2809
278	—26	676
247	+ 5	25
328	—76	5776
211	+41	1681
159	+93	8649
316	—64	4096
307	—55	3025
$[\dot{x}] = 3029$ $\frac{1}{12}[\dot{x}] = 252$	$[v] = -5$	$[v^2] = 32683$

$m_0 = \pm \sqrt{32683 : 11} = \pm\ 5{,}45 \cdot 10^{-7}$ sec;

$m_0 : \sqrt{n} = \pm\ 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ sec.

Výsledek $0{,}50862252 \pm 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ sec.

2. **Základna** na české technice v Brně byla měřena po sobě čtyřmi různými invarovými měřítky (dráty a pásmy). Výsledky měření*) byly

12004 cm + 0,755 cm, (0,684; 0,659; 0,703).

Vypočísti výslednou hodnotu, střední chybu pro jednotku

*) A. Semerád: Podrobná délková měření dráty a pásmy invarovými, Techn. Obzor 1916, tab. V.

váhy (t. j. pro měření jedním měřítkem) a střední chybu výsledku.

(Výsledek 12004,100 cm $\pm$ 0,020 cm, $m_0 = \pm$ 0,041 cm.)

3. Na stanici Trenk byly naměřeny pro úhel Mednicken-Fuchsberg tyto hodnoty*)

83° 30′ 36,25″
7,50, (6,00; 4,77; 3,75; 0,25; 3,70; 6,14; 4,04; 6,96; 3,16; 4,57; 4,75; 6,50; 5,00; 4,75; 4,25; 5,25).

Vypočísti výslednou hodnotu, střední chybu pro jednotku váhy (t. j. pro jedno měření) a střední chybu výsledku.

(Výsledek 83° 30′ 34,87″ $\pm$ 0,39″, $m_0 = \pm$ 1,66″.)

4. Při nivelaci byly zjištěny tyto rozdíly dvojic měření v mm: $d = -0{,}6$; $+0{,}4$; $-0{,}6$; $-1{,}2$; $+2{,}4$.**) Příslušné délky tratí v km byly 0,72; 0,42; 0,47; 0,48; 0,51. Jaká plyne odtud střední kilometrová chyba pro jedno měření a pro střed z obou měření?

K výpočtu užijeme vzorce (22′) a (22″), při čemž váhy p jsou rovny převráceným hodnotám délek tratí.

Bude $[pd^2] = 15{,}94$ a odtud střední kilometrová chyba pro jedno měření $\pm \sqrt{\frac{1}{10}[pd^2]} = \pm 1{,}26$ mm a střední kilometrová chyba pro střed obou měření $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}[pd^2]} = \pm 0{,}89$ mm.

5. Při určování času byly odvozeny tyto opravy chronometru z pozorování 21 hvězd:

$-8{,}78^s$
76, (85; 78; 51; 64; 68; 63; 58; 80; 75; 78; 96; 64; 65; 83; 70; 64; 79; 90; 93).

---

*) Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, I, Stuttgart, 1904 (5. Aufl.), str. 22.

**) Jordan, l. c. str. 37.

Za předpokladu, že váha všech měření byla stejná, vypočtěte vyrovnanou hodnotu opravy chronometru, její střední chybu a střední chybu jednoho měření (střední chybu pro jednotku váhy)!*)

(Výsledek $-8{,}74^s \pm 0{,}03^s$, $m_0 = \pm 0{,}117^s$.)

6. Gravitační konstanta k byla určena několikrát různými badateli:

Cornu a Baille (1873)	určili $k =$	$6668 \cdot 10^{-11}$
Poynting (1894)		$6698 \cdot 10^{-11}$
Boys (1894)		$6657 \cdot 10^{-11}$
Richarz a Krigar-Menzel (1896)		$6685 \cdot 10^{-11}$
Braun (1897)		$6658 \cdot 10^{-11}$

Předpokládáme, že váhy těchto jednotlivých měření jsou stejné. Vypočtěte výslednou hodnotu pro gravitační konstantu a její střední chybu!

(Výsledek: $6673{,}2 \cdot 10^{-11} \pm 8{,}0 \cdot 10^{-11}$.)

7. Pro určitou délku byly naměřeny tyto hodnoty:

5000,7 mm při 6 měřeních, 5007,9 mm při 15 měřeních,
4997,1 mm při 6 měřeních, 5002,1 mm při 8 měřeních,
5001,9 mm při 15 měřeních, 5001,1 mm při 8 měřeních.

Vypočtěte vyrovnanou hodnotu a její střední chybu i střední chybu pro jednotku váhy za předpokladu, že váhy jsou rovny počtu měření!

Zvolíme $d = 4997{,}1$ a počítáme v připojené tabulce postupně ve sloupcích: $\dot{x}_i$; p_i, $[p]$; $p_i\dot{x}_i$, $[p\dot{x}]$, $[p\dot{x}] : [p]$; $v_i = [p\dot{x}] : [p] - \dot{x}_i$; v_i^2; $p_i v_i^2$, $[pv^2]$; m_0, $m_0 : \sqrt{[p]}$.

*) Wright-Hayford, l. c. str. 37 a 43.

Tabulka III.

$\dot{x}_i$	p_i	$p_i\dot{x}_i$	v_i	v_i^2	$p_i v_i^2$
+ 3,6	6	21,6	+2,05	4,2025	25,2150
+ 0,0	6	0,0	+5,65	31,9225	191,5350
+ 4,8	15	72,0	+0,85	0,7225	10,8375
+10,8	15	162,0	—5,15	26,5225	397,8375
+ 5,0	8	40,0	+0,65	0,4225	3,3800
+ 4,0	8	32,0	+1,65	2,7225	21,7800
	$[p] = 58$	$[p\dot{x}] = 327,6$			$[pv^2] = 650,5850$

$[p\dot{x}] : [p] = 5,65$

$m_0 = \pm \sqrt{650,5850 : 5} = \pm \sqrt{130,1170} = \pm$ 11,4 mm,

$m_0 : \sqrt{[p]} = \pm \sqrt{130,1170 : 58} = \pm$ 1,50 mm.

Tedy výsledek $x' = 5002,75$ mm $\pm$ 1,50 mm.

8. Na české technice v Brně byla změřena dvakrát tíže. V roce 1926 bylo naměřeno 980,9618 dyn, při čemž střední chyba byla $\pm$ 1,39 . 10^{-3} dyn. V r. 1928 bylo naměřeno 980,9606 dyn se střední chybou $\pm$ 1,26 . 10^{-3} dyn. Určete výslednou hodnotu z obou měření (s ohledem na jejich váhy) a střední chybu výsledku.

Podle vzorce (14″) bude $x' = d + \dfrac{m_2^2 x_1 + m_1^2 x_2}{m_1^2 + m_2^2}$.

Zvolíme $d = 980,96$ dyn. Pak $\dot{x}_1 = 0,0018$, $\dot{x}_2 = 0,0006$; $m_1^2 = 1,9321$, $m_2^2 = 1,5876$. Tedy

$$x' = 980,96 + \frac{0,004017}{3,52} = 980,96 + 0,0011 = 980,9611 \text{ dyn.}$$

Střední chyba výsledku je podle vzorce (16″) rovna

$$\frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \frac{1,39 \,.\, 1,26}{\sqrt{3,52}} \,.\, 10^{-3} = \pm\, 0,93 \,.\, 10^{-3} \text{ dyn.}$$

Tedy výsledek

$$980{,}9611 \pm 0{,}93 \,.\, 10^{-3} \text{ dyn}.$$

9. Výsledky měření rozdílu zeměpisné délky mezi Washingtonem a Key West a příslušné pravděpodobné chyby byly

1873, prosinec	24	$19^m\,1{,}42^s$	$\pm 0{,}044^s$
	26	1,37	37
	30	1,38	36
	31	1,45	36
1874, leden	9	1,60	46
	10	1,55	45
	11	1,57	47

Určete výslednou hodnotu s ohledem na váhy a příslušnou střední chybu.*).

Ve vzorci (14′) se vyskytují v čitateli i jmenovateli čísla $\frac{1}{m_i^2}$, můžeme tedy místo nich klásti úměrné hodnoty $\frac{1}{r_i^2}$, neboť $m_i = 1{,}483 r_i$, [I, (31)].

Pro $r_i = 3{,}6 \,.\, 10^{-2}$ $(3{,}7 \,.\, 10^{-2};\ 4{,}4 \,.\, 10^{-2};\ 4{,}5 \,.\, 10^{-2};\ 4{,}6 \,.\, 10^{-2};\ 4{,}7 \,.\, 10^{-2})$

bude $\frac{1}{r_i^2} \doteq 772,\ (730;\ 517;\ 494;\ 473;\ 453).$

Klademe-li $d = 19^m\,1{,}3^s$, bude $\dot{x}_i = +\,0{,}12^s$, $(+\,0{,}07^s;\ +\,0{,}08^s;\ +\,0{,}15^s;\ +\,0{,}30^s;\ +\,0{,}25^s;\ +\,0{,}27^s)$.

Tedy podle vzorce (14′) je $\left[\frac{\dot{x}}{r^2}\right] : \left[\frac{1}{r^2}\right] = \frac{678{,}41}{4211} = +\,0{,}161,$

čili $x' = 19^m\,1{,}461^s$.

A podle vzorce (16) bude střední chyba hodnoty x' rovna

*) Wright-Hayford, l. c. str. 72.

$$\pm \frac{1,483}{\sqrt{\left[\frac{1}{r^2}\right]}} = \pm \frac{1,483}{\sqrt{4211}} \text{ sec} = \pm\ 0,228^s.$$

Tedy výsledek $19^m\ 1,461^s \pm 0,228^s$.

10. Rychlost světla byla určena Fizeauem a jinými takto:

298 000 km $\pm$ 1500 km; 300 100 km $\pm$ 1500 km;
298 500 km $\pm$ 1500 km; 299 930 km $\pm$ 150 km.
299 990 km $\pm$ 300 km;

Jsou-li čísla uvedená na druhém místě pravděpodobné chyby, určete vyrovnanou hodnotu a její střední chybu.*)

Zvolíme $d = 299\,900$ km a za jednotku váhy zvolíme váhu měření s největší pravděpodobnou chybou ($\pm$ 1500 km). Podle vzorce $p = \frac{m_0{}^2}{m^2} = \frac{m_0{}^2}{1,483^2 . r^2}$ budou váhy příslušné pravděpodobným chybám $\pm$ 300 km a $\pm$ 150 km rovny 25 a 100. Při tom $1 = \frac{m_0{}^2}{1,483^2 . 1500^2}$, čili

$m_0 = \pm$ 1500 km . 1,483.

Bude tedy $\dot{x}_i = -1900, -1400, +90, +200, +30$
a příslušná $p_i = 1, 1, 25, 1, 100, [p] = 128.$

Tedy $p_i\dot{x}_i = -1900, -1400, +2250, +200, +3000,$
$[p\dot{x}] = +\ 2150.$

Odtud $\frac{[p\dot{x}]}{[p]} = + \frac{2150}{128} = +\ 17$, čili $x' = 299\,917$ km.

Střední chyba podle vzorce $m_0 : \sqrt{[p]}$ bude

$$\pm \frac{1500 \text{ km}}{\sqrt{128}} . 1,483 = \pm\ 197 \text{ km}.$$

Tedy výsledek 299 917 km $\pm$ 197 km.

*) Wright-Hayford, l. c. str. 57—58.