Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle methody nejmenších čtverců)

Vyrovnávání zprostředkujících měření

In: B. Kladivo (author): Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle methody nejmenších čtverců). (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1943. pp. 52–[89].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405503

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

III.

VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH MĚŘENÍ.

1. Vyrovnání zprostředkujících měření. (Omezíme se na tři neznámé x, y, z.) Hledané veličiny x, y, z mají býti určeny z rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kde l_i jsou výsledky měření; o skutečných chybách těchto rovnic předpokládáme, že se řídí normálním zákonem četnosti a že nemají stejnou váhu. Pak pravděpodobnost, že v rovnici i-té nastane chyba v mezích $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i + d\varepsilon_i \rangle$, jest rovna $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$, a pravděpodobnost, že nastanou chyby, které budou po řadě v intervalech $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1 \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2 \rangle, \ldots, \langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + d\varepsilon_n \rangle$, bude zase rovna součinu pravděpodobností [II, (12)] resp. výrazu [II, (12')].

Při tom jest $a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \varepsilon_i$, čili

$$\varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i.$$

Který předpoklad o vyrovnaných hodnotách $x, y, z, \ldots$ bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost [II, (12')] největší, tedy pro nějž je součet

$$S = p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \cdots + p_n \varepsilon_n^2 \tag{2}$$

nejmenší.

Aby nastalo minimum součtu (2), musí býti první parciální derivace podle x, y, z rovny nule, t. j. musí býti

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} p_i \varepsilon_i \cdot a_i$$

pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ rovno 0, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i) = [pav] =$$

$$= [paa]\, x' + [pab]\, y' + [pac]\, z' - [pal] = 0$$

a podobně $$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} p_i \varepsilon_i \cdot b_i$$

pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ musí býti rovno 0, tedy

$$[pbv] = [pab]\, x' + [pbb]\, y' + [pbc]\, z' - [pbl] = 0,$$

a stejně (3)

$$[pcv] = [pac]\, x' + [pbc]\, y' + [pcc]\, z' - [pcl] = 0.$$

Při tom

$$v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i. \qquad (1')$$

Váhu p_i **příslušnou** i**-té odchylkové rovnice** odhadujeme podle toho, jaké jsou chyby měřených veličin, na nichž i-tá rovnice závisí, a jaký je jejich vliv na ε_i. Jestliže jediná měřená veličina v i-té rovnici byla veličina l_i, bude p_i její váha. Někdy se však stává, že váhu rovnice určuje jiná měřená veličina než l_i, jestliže její vliv na ε_i převažuje nad vlivem chyby v l_i (viz př. 2 v odst. 9).

Chceme-li ukázati, zda nastane pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ maximum nebo minimum, uvažujeme, jak se mění součet S v okolí bodu $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$.

Pro $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, $z = z' + \zeta$ bude

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \{a_i (x' + \xi) + b_i (y' + \eta) + c_i (z' + \zeta) - l_i\}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \{a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta\}^2 =$$
$$= [paa]\, x'^2 + 2\, [pab]\, x'y' + [pbb]\, y'^2 +$$
$$+ 2\, [pac]\, x'z' + 2\, [pbc]\, y'z' + [pcc]\, z'^2 -$$
$$- 2\, [pal]\, x' - 2\, [pbl]\, y' - 2\, [pcl]\, z' + [pll] +$$
$$+ 2\xi \{[paa]\, x' + [pab]\, y' + [pac]\, z' - [pal]\} +$$
$$+ 2\eta \{[pab]\, x' + [pbb]\, y' + [pbc]\, z' - [pbl]\} +$$
$$+ 2\zeta \{[pac]\, x' + [pbc]\, y' + [pcc]\, z' - [pcl]\} +$$
$$+ [paa]\, \xi^2 + 2\, [pab]\, \xi\eta + [pbb]\, \eta^2 + 2\, [pac]\, \xi\zeta +$$
$$+ 2\, [pbc]\, \eta\zeta + [pcc]\, \zeta^2.$$

Podle rovnic (3) jsou koeficienty u 2ξ, 2η a 2ζ rovny 0, takže

$$S = [paa]\, x'^2 + 2\,[pab]\, x'y' + [pbb]\, y'^2 + 2\,[pac]\, x'z' + \\ + 2\,[pbc]\, y'z' + [pcc]\, z'^2 - 2\,[pal]\, x' - 2\,[pbl]\, y' - 2\,[pcl]\, z' + \\ + [pll] + \sum_{i=1}^{n} p_i\,(a_i^2\xi^2 + 2a_ib_i\xi\eta + b_i^2\eta^2 + 2a_ic_i\xi\zeta + 2b_ic_i\eta\zeta + \\ + c_i^2\zeta^2).$$

První část výrazu na pravé straně je hodnota součtu S pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Druhá část je rovna $\sum_{i=1}^{n} p_i\,(a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta)^2$, je tedy vždy kladná. Z toho je patrno, že součet S je v bodě $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ menší než pro všechny body v okolí; je tedy v bodě x', y', z' minimum.

2. Řešení normálních rovnic postupem Gaussovým. Součtové kontroly. Nechť jde o řešení tří normálních rovnic o třech neznámých x', y', z'. Rovnice jsou

$$\begin{aligned} [paa]\, x' + [pab]\, y' + [pac]\, z' &= [pal], \\ [pab]\, x' + [pbb]\, y' + [pbc]\, z' &= [pbl], \\ [pac]\, x' + [pbc]\, y' + [pcc]\, z' &= [pcl]. \end{aligned} \tag{3}$$

Jak patrno, mají souměrný tvar vzhledem k úhlopříčce, jdoucí členy $[paa]$, $[pbb]$, $[pcc]$.

Řešení soustavy (3) se často provádí t. zv. postupem Gaussovým. Násobíme první z rovnic (3) po řadě čísly $\{[pab] : [paa]\}$, $\{[pac] : [paa]\}$ a odečteme od druhé resp. třetí z rovnic (3). Tak vyloučíme neznámou x' a dojdeme k soustavě redukovaných rovnic:

$$\begin{aligned} &\left\{[pbb] - [pab]\cdot\frac{[pab]}{[paa]}\right\} y' + \left\{[pbc] - [pac]\frac{[pab]}{[paa]}\right\} z' = \\ &\qquad = \left\{[pbl] - [pal]\,\frac{[pab]}{[paa]}\right\}, \\ &\left\{[pbc] - [pab]\cdot\frac{[pac]}{[paa]}\right\} y' + \left\{[pcc] - [pac]\frac{[pac]}{[paa]}\right\} z' = \end{aligned} \tag{4}$$

$$= \left\{[pcl] - [pal]\,\frac{[pac]}{[paa]}\right\}.$$

Zavedeme obvyklé zkratky a píšeme rovnice (4) ve tvaru

$$\begin{aligned} [pbb\,.\,1]\,y' + [pbc\,.\,1]\,z' &= [pbl\,.\,1], \\ [pbc\,.\,1]\,y' + [pcc\,.\,1]\,z' &= [pcl\,.\,1]. \end{aligned} \tag{4'}$$

Význam zkratek je patrný ze srovnání rovnic (4′) a (4).

Podobně vyloučíme z rovnic (4′) neznámou y'. Výsledná redukovaná rovnice jest

$$\begin{aligned} &\left\{[pcc\,.\,1] - [pbc\,.\,1]\,.\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\right\} z' = \\ &= \left\{[pcl\,.\,1] - [pbl\,.\,1]\,.\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

a zavedeme-li obvyklé zkratky

$$[pcc\,.\,2]\,z' = [pcl\,.\,2]. \tag{5'}$$

Význam zkratek je zase patrný ze srovnání rovnice (5′) a (5). Docela podobně se postupuje při libovolném počtu neznámých.

Aby výpočty byly krok za krokem kontrolovány, provádějí se t. zv. součtové kontroly. K číslům a_i, b_i, c_i, l_i připojíme součty

$$a_i + b_i + c_i + l_i = s_i. \tag{6}$$

Počítáme součty součinů

$$\begin{aligned} &[paa], [pab], [pac], [pal], [pas], \\ &\qquad [pbb], [pbc], [pbl], [pbs], \\ &\qquad\qquad [pcc], [pcl], [pcs]. \end{aligned}$$

Násobíme-li každou z rovnic (6) součinem $p_i a_i$ a sečteme pro $i = 1, \ldots, n$, dostaneme

$$[paa] + [pab] + [pac] + [pal] = [pas].$$

Podobně

$$
\begin{aligned}
[pab] + [pbb] + [pbc] + [pbl] &= [pbs],\\
[pac] + [pbc] + [pcc] + [pcl] &= [pcs],\\
[pal] + [pbl] + [pcl] + [pll] &= [pls].
\end{aligned}
\tag{6'}
$$

Znásobíme-li první z rovnic (6′) číslem $[pab]:[paa]$, odečteme-li od druhé a zavedeme-li obvyklé zkratky, dostaneme

$$[pbb\,.\,1] + [pbc\,.\,1] + [pbl\,.\,1] = [pbs\,.\,1], \tag{6''_1}$$

kde

$$[pbs\,.\,1] = [pbs] - [pas]\,.\,\frac{[pab]}{[paa]}.$$

Podobně jest

$$[pbc\,.\,1] + [pcc\,.\,1] + [pcl\,.\,1] = [pcs\,.\,1], \tag{6''_2}$$

kde

$$[pcs\,.\,1] = [pcs] - [pas]\,.\,\frac{[pac]}{[paa]}.$$

Tabulka

$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$
$[pab]$ $-[pab]$.	$[pbb]$ $-[pab]\,.\,\dfrac{[pab]}{[paa]}$ $[pbb\,.\,1]$	$[pbc]$ $-[pac]\,.\,\dfrac{[pab]}{[paa]}$ $[pbc\,.\,1]$
$[pac]$ $-[pac]$.	$[pbc]$ $-[pab]\,.\,\dfrac{[pac]}{[paa]}$ $[pbc\,.\,1]$	$[pcc]$ $-[pac]\,.\,\dfrac{[pac]}{[paa]}$ $[pcc\,.\,1]$
	$[pbc\,.\,1]$ $-[pbc\,.\,1]$.	$[pcc\,.\,1]$ $-[pbc\,.\,1]\,\dfrac{[pbc\ 1]}{[pbb\ 1]}$ $[pcc\,.\,2]$

Znásobíme-li první z rovnic (6″) číslem $[pbb\,.\,1]:[pbc\,.\,1]$ a odečteme-li od druhé, plyne (zavedeme-li obvyklé zkratky):

$$[pcc\,.\,2] + [pcl\,.\,2] = [pcs\,.\,2], \tag{6‴}$$

kde

$$[pcs\,.\,2] = [pcs\,.\,1] - [pbs\,.\,1]\,.\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\,.$$

Výpočet normálních rovnic se pro přehlednost provádí obyčejně ve formuláři. (Viz tabulku IV.)

Součet čísel v prvních čtyřech sloupcích má býti v každém řádku formuláře roven číslu v tomtéž řádku a v předposledním sloupci — ovšem až na chyby plynoucí ze zaokrouhlování.

IV.

$[pal]$	$[pas]$	Zkouška
$[pbl]$	$[pbs]$	„
$-[pal]\,.\,\frac{[pab]}{[paa]}$	$-[pas]\,.\,\frac{[pab]}{[paa]}$	„
$[pbl\,.\,1]$	$[pbs\,.\,1]$	„
$[pcl]$	$[pcs]$	„
$-[pal]\,.\,\frac{[pac]}{[paa]}$	$-[pas]\,.\,\frac{[pac]}{[paa]}$	„
$[pcl\,.\,1]$	$[pcs\,.\,1]$	„
$[pc\,.\,1]$	$[pcs\,.\,1]$	„
$-[pbl\,.\,1]\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}$	$-[pbs\,.\,1]\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}$	„
$[pcl\,.\,2]$	$[pcs\,.\,2]$	„

Popsanou redukcí došli jsme k těmto rovnicím pro neznámé x' y' z':

$$
\begin{aligned}
[paa]\,x' + [pab]\,y' + [pac]\,z' &= [pal] && (7_1)\\
[pab]\,x' + [pbb]\,y' + [pbc]\,z' &= [pbl] && (7_2)\\
[pac]\,x' + [pbc]\,y' + [pcc]\,z' &= [pcl] && (7_3)\\
[pbb\,.\,1]\,y' + [pbc\,.\,1]\,z' &= [pbl\,.\,1] && (7'_1)\\
[pbc\,.\,1]\,y' + [pcc\,.\,1]\,z' &= [pcl\,.\,1] && (7'_2)\\
[pcc\,.\,2]\,z' &= [pcl\,.\,2]. && (7'')
\end{aligned}
$$

Z rovnice $(7'')$ vypočteme z' a dosadíme do předcházejících. Z rovnice $(7'_1)$ vypočteme y' a kontrolujeme výpočtem z rovnice $(7'_2)$. Dosadíme do předcházejících rovnic, vypočteme ze (7_1) neznámou x' a kontrolujeme výpočtem z rovnice (7_2) nebo (7_3).

V dalším výkladu užijeme jiného postupu, který je výhodný při zvláštních hodnotách prostých členů rovnic (3). Píšeme rovnice (7_1), (7_2) a (7_3) ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x' + \frac{[pab]}{[paa]}\,y' + \frac{[pac]}{[paa]}\,z' &= \frac{[pal]}{[paa]},\\
y' + \frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\,z' &= \frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]},\\
z' &= \frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

K první rovnici přičtěme druhou, násobenou číslem A_1 a třetí, násobenou číslem A_2. Dostaneme

$$
x' + \left(\frac{[pab]}{[paa]} + A_1\right) y' + \left(\frac{[pac]}{[paa]} + A_1\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2\right) z' =
$$
$$
= \frac{[pal]}{[paa]} + A_1\,\frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2\,\frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}.
$$

Zvolíme čísla A_1, A_2 tak, že koeficienty u y' a z' v této rovnici jsou rovny nule, t. j. vypočteme A_1, A_2 z rovnic

$$
\frac{[pab]}{[paa]} + A_1 = 0, \quad \frac{[pac]}{[paa]} + A_1\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2 = 0. \tag{9}
$$

Pak bude

$$x' = \frac{[pal]}{[paa]} + A_1 \frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2 \frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}. \tag{10}$$

Přičtěme ke druhé z rovnic (8) třetí, násobenou číslem B_1. Určíme-li B_1 tak, že

$$\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + B_1 = 0, \tag{9'}$$

bude

$$y = \frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + B_1 \frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}. \tag{10'}$$

Třetí neznámá plyne z rovnice

$$z' = \frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}. \tag{10''}$$

3. Střední chyby neznámých x', y', z' a střední chyba lineárního výrazu $\Phi = f_0 + f_1x' + f_2y' + f_3z'$. Řešíme-li normální rovnice (3) pomocí determinantů, dostaneme

$$x' = \begin{vmatrix} [pal], & [pab], & [pac] \\ [pbl], & [pbb], & [pbc] \\ [pcl], & [pbc], & [pcc] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} [paa], & [pab], & [pac] \\ [pab], & [pbb], & [pbc] \\ [pac], & [pbc], & [pcc] \end{vmatrix} \tag{11}$$

a podobně y', z'.

Uvažme, že $[pal] = p_1a_1l_1 + p_2a_2l_2 + \dots + p_na_nl_n$ a stejně pro ostatní čísla z prvního sloupce v prvním determinantu. Tento determinant můžeme tedy rozložiti v n determinantů, z nichž první bude míti jako násobitele l_1, druhý l_2 a poslední l_n. Je tedy patrno, že x', y', z' se dají psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1l_1 + \alpha_2l_2 + \dots + \alpha_nl_n, \\ y' &= \beta_1l_1 + \beta_2l_2 + \dots + \beta_nl_n, \\ z' &= \gamma_1l_1 + \gamma_2l_2 + \dots + \gamma_nl_n, \end{aligned} \tag{11'}$$

kde $\alpha_1, \dots, \gamma_n$ nezávisí na l_i, $(i = 1, \dots, n)$.

Jsou-li skutečné chyby veličin $l_1, \dots, l_n$ po řadě $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, jest skutečná chyba na př. veličiny x' rovna $\alpha_1\varepsilon_1 + \dots + \alpha_n\varepsilon_n$.

Přisuzujeme-li veličinám $l_1, \ldots, l_n$ po řadě váhy $p_1, \ldots, p_n$ a označíme-li střední chybu pro jednotku váhy písmenem m_0, je podle (I, odst. 6) střední hodnota veličiny l_i rovna $m_0 : \sqrt{p_i}$.

Předpokládejme, že chyby ε_i sledují normální zákon četnosti. Pak střední chyba $m_{x'}$ výsledku x', jehož skutečná chyba je $\alpha_1\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n$ bude rovna [(I, 12″)]

$$\pm \sqrt{\alpha_1^2 \frac{m_0^2}{p_1} + \alpha_2^2 \frac{m_0^2}{p_2} + \ldots + \alpha_n^2 \frac{m_0^2}{p_n}} = m_0 \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{p}\right]}.$$

Označíme-li ještě váhu veličiny x' značkou $p_{x'}$, je

$$m_0 \sqrt{[\alpha^2 : p]} = m_0 : \sqrt{p_{x'}} \quad \text{[viz I, (16')]}.$$

Podobně střední chyba $m_{y'}$ veličiny y' je rovna

$$m_0 \sqrt{[\beta^2 : p]} = m_0 : \sqrt{p_{y'}},$$

a střední chyba $m_{z'}$ veličiny z' je rovna

$$m_0 \sqrt{[\gamma^2 : p]} = m_0 : \sqrt{p_{z'}},$$

kde značí $p_{y'}$, $p_{z'}$ váhy veličin y' a z'.

Součty $[\alpha^2 : p]$, $[\beta^2 : p]$, $[\gamma^2 : p]$ určíme takto: Násobme normální rovnice (7) po řadě čísly Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} a sečtěme. Bude

$$\begin{aligned} x' \{[paa]\, Q_{11} + [pab]\, Q_{12} + [pac]\, Q_{13}\} + y' \{[pab]\, Q_{11} + \\ + [pbb]\, Q_{12} + [pbc]\, Q_{13}\} + z' \{[pac]\, Q_{11} + [pbc]\, Q_{12} + \\ + [pcc]\, Q_{13}\} = [pal]\, Q_{11} + [pbl]\, Q_{12} + [pcl]\, Q_{13}. \end{aligned}$$

Určíme-li čísla Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} z rovnic

$$\begin{aligned} [paa]\, Q_{11} + [pab]\, Q_{12} + [pac]\, Q_{13} &= 1, \\ [pab]\, Q_{11} + [pbb]\, Q_{12} + [pbc]\, Q_{13} &= 0, \\ [pac]\, Q_{11} + [pbc]\, Q_{12} + [pcc]\, Q_{13} &= 0, \end{aligned} \qquad (12)$$

bude

$$\begin{aligned} x' = [pal]\, Q_{11} + [pbl]\, Q_{12} + [pcl]\, Q_{13} = l_1 (p_1a_1Q_{11} + p_1b_1Q_{12} + \\ + p_1c_1Q_{13}) + l_2 (p_2a_2Q_{11} + p_2b_2Q_{12} + p_2c_2Q_{13}) + \cdots + \\ + l_n (p_na_nQ_{11} + p_nb_nQ_{12} + p_nc_nQ_{13}). \end{aligned}$$

Srovnáním s rovnicemi (11') plyne

$$\alpha_i = p_i a_i Q_{11} + p_i b_i Q_{12} + p_i c_i Q_{13}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12'}$$

Odtud

$$\alpha_i^2 : p_i = (p_i a_i Q_{11} + p_i b_i Q_{12} + p_i c_i Q_{13})(a_i Q_{11} + b_i Q_{12} + c_i Q_{13}),$$

Tedy

$$[\alpha^2 : p] = \{[paa]\, Q_{11} + [pab]\, Q_{12} + [pac]\, Q_{13}\}\, Q_{11} + \\ + \{[pab]\, Q_{11} + [pbb]\, Q_{12} + [pbc]\, Q_{13}\}\, Q_{12} + \{[pac]\, Q_{11} + \\ + [pbc]\, Q_{12} + [pcc]\, Q_{13}\}\, Q_{13}.$$

A podle rovnic (12) jest $[\alpha^2 : p] = Q_{11}$.

Součet $[\alpha^2 : p]$ je tedy roven veličině Q_{11}, plynoucí z rovnic (12). Abychom Q_{11} určili přímo z koeficientů normálních a redukovaných rovnic, užijeme postupu vyloženého na konci předcházejícího odstavce. Jen musíme uvážiti, že zde místo $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl]$ jest 1, 0, 0, tedy místo $[pbl\,.\,1]$ jest nyní

$$-[pab] : [paa] = A_1, \tag{13}$$

[viz (4), (4') a (9)], místo $[pcl\,.\,1]$ jest $-[pac] : [paa]$ [viz (4) a (4')] a místo $[pcl\,.\,2]$ bude nyní

$$-[pac] : [paa] - A_1\, [pbc\,.\,1] : [pbb\,.\,1] = A_2 \tag{13'}$$

[viz (5), (5') a (9)]. Tedy z rovnice (10) vyplývá

$$Q_{11} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb\,.\,1]} + \frac{A_2^2}{[pcc\,.\,2]}. \tag{13''}$$

Abychom určili součet $[\beta^2 : p]$, násobíme normální rovnice (3) po řadě čísly Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} a sečteme. Určíme-li čísla Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} z rovnic

$$\begin{aligned} [paa]\, Q_{21} + [pab]\, Q_{22} + [pac]\, Q_{23} &= 0, \\ [pab]\, Q_{21} + [pbb]\, Q_{22} + [pbc]\, Q_{23} &= 1, \\ [pac]\, Q_{21} + [pbc]\, Q_{22} + [pcc]\, Q_{23} &= 0, \end{aligned} \tag{12$_1$}$$

bude

$$y' = [pal]\, Q_{21} + [pbl]\, Q_{22} + [pcl]\, Q_{23}$$

a odtud

$$\beta_i = p_i a_i Q_{21} + p_i b_i Q_{22} + p_i c_i Q_{23}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (12'_1)$$

a

$$[\beta^2 : p] = Q_{22}.$$

Součet $[\beta^2 : p]$ je tedy roven veličině Q_{22}, plynoucí z rovnic (12_1). Abychom jej určili přímo z koeficientů normálních a redukovaných rovnic, musíme uvážiti, že zde místo $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl]$ jest 0, 1, 0, tedy místo $[pbl\,.\,1]$ je nyní 1 a místo $[pcl\,.\,1]$ je 0; odtud plyne, že místo $[pcl\,.\,2]$ bude nyní

$$-[pbc\,.\,1] : [pbb\,.\,1] = B_1. \qquad (14)$$

Tedy z rovnice (10′) bude

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb\,.\,1]} + \frac{B_1^2}{[pcc\,.\,2]}. \qquad (14')$$

Abychom konečně určili součet $[\gamma^2 : p]$, násobíme normální rovnice (3) po řadě čísly Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} a sečteme. Určíme-li čísla Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} z rovnic

$$\begin{aligned} [paa]\,Q_{31} + [pab]\,Q_{32} + [pac]\,Q_{33} &= 0, \\ [pab]\,Q_{31} + [pbb]\,Q_{32} + [pbc]\,Q_{33} &= 0, \\ [pac]\,Q_{31} + [pbc]\,Q_{32} + [pcc]\,Q_{33} &= 1, \end{aligned} \qquad (12_2)$$

bude

$$z' = [pal]\,Q_{31} + [pbl]\,Q_{32} + [pcl]\,Q_{33},$$

a odtud

$$\gamma_i = p_i a_i Q_{31} + p_i b_i Q_{32} + p_i c_i Q_{33}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (12'_2)$$

a

$$[\gamma^2 : p] = Q_{33}.$$

Součet $[\gamma^2 : p]$ je tedy roven veličině Q_{33}, plynoucí z rovnic (12_2). Abychom jej určili přímo z koeficientů normálních a redukovaných rovnic, musíme uvážiti, že zde místo $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl]$ jest 0, 0, 1, tedy místo $[pbl\,.\,1]$ jest 0 a místo $[pcl\,.\,1]$ bude 1; odtud plyne, že místo $[pcl\,.\,2]$ bude nyní 1 a tedy z rovnice (10″) jest

$$Q_{33} = 1 : [pcc\,.\,2]. \qquad (15)$$

Můžeme tedy psáti

$$
\begin{aligned}
m_{x'} &= \frac{m_0}{\sqrt{p_{x'}}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb.1]} + \frac{A_2^2}{[pcc.2]}}, \\
m_{y'} &= \frac{m_0}{\sqrt{p_{y'}}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{[pbb.1]} + \frac{B_1^2}{[pcc.2]}}, \\
m_{z'} &= \frac{m_0}{\sqrt{p_{z'}}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{[pcc.2]}}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Při tom A_1, A_2, B_1 plynou ze vzorců (13), (13′) a (14).

Z rovnic (12′) a (12′$_1$) pro α_i a β_i plyne:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i\beta_i : p_i &= (p_ia_iQ_{11} + p_ib_iQ_{12} + p_ic_iQ_{13})\,(a_iQ_{21} + b_iQ_{22} + \\
&+ c_iQ_{23}) = (p_ia_ia_iQ_{11} + p_ia_ib_iQ_{12} + p_ia_ic_iQ_{13})\,Q_{21} + (p_ia_ib_iQ_{11} + \\
&+ p_ib_ib_iQ_{12} + p_ib_ic_iQ_{13})\,Q_{22} + (p_ia_ic_iQ_{11} + p_ib_ic_iQ_{12} + \\
&+ p_ic_ic_iQ_{13})\,Q_{23}.
\end{aligned}
$$

Sečteme-li pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a použijeme-li rovnic (12), bude

$$[\alpha\beta : p] = Q_{21}.$$

Ale jest také

$$
\begin{aligned}
\alpha_i\beta_i : p_i &= (a_iQ_{11} + b_iQ_{12} + c_iQ_{13})\,(p_ia_iQ_{21} + p_ib_iQ_{22} + p_ic_iQ_{23}) = \\
&= Q_{11}\,(p_ia_ia_iQ_{21} + p_ia_ib_iQ_{22} + p_ia_ic_iQ_{23}) + Q_{12}\,(p_ia_ib_iQ_{21} + \\
&+ p_ib_ib_iQ_{22} + p_ib_ic_iQ_{23}) + Q_{13}\,(p_ia_ic_iQ_{21} + p_ib_ic_iQ_{22} + p_ic_ic_iQ_{23}).
\end{aligned}
$$

Sečteme-li zase pro všechna i a použijeme-li rovnic (12$_1$), bude

$$[\alpha\beta : p] = Q_{12}.$$

Z toho je patrno, že $Q_{12} = Q_{21}$. Stejně plyne

$$Q_{13} = Q_{31} \text{ a } Q_{23} = Q_{32}. \tag{17}$$

Střední chyba lineárního výrazu $\Phi = f_0 + f_1x' + f_2y' + f_3z'$. Dosadíme-li sem za x', y', z' ze vzorců (11′), bude

$$\Phi = f_0 + f_1\sum_{i=1}^{n}\alpha_il_i + f_2\sum_{i=1}^{n}\beta_il_i + f_3\sum_{i=1}^{n}\gamma_il_i =$$

$$= f_0 + \sum_{i=1}^{n} (f_1\alpha_i + f_2\beta_i + f_3\gamma_i)\, l_i.$$

Podle vzorce [I, (12″)] bude tedy čtverec střední chyby výrazu Φ roven

$$m_\Phi{}^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_1\alpha_i + f_2\beta_i + f_3\gamma_i)^2 \frac{m_0{}^2}{p_i} =$$

$$= m_0{}^2 \left\{ f_1{}^2 \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + f_1 f_2 \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + f_1 f_3 \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + \right.$$

$$+ f_2 f_1 \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + f_2{}^2 \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + f_2 f_3 \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] +$$

$$\left. + f_3 f_1 \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + f_3 f_2 \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + f_3{}^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] \right\}.$$

A zavedeme-li veličiny $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{33}$, bude

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2 \{f_1(f_1Q_{11} + f_2Q_{12} + f_3Q_{13}) + f_2(f_1Q_{21} + f_2Q_{22} + f_3Q_{23}) + f_3(f_1Q_{31} + f_2Q_{32} + f_3Q_{33})\}. \qquad (16')$$

Veličiny $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{33}$ plynou z rovnic (12), (12_1) a (12_2).

4. Co znamená anulování determinantu Δ soustavy normálních rovnic? Je-li v soustavě (3) $\Delta = 0$, existují čísla $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, jež nejsou všechna rovna 0, a jež splňují rovnice

$$\begin{aligned} [paa]\,\dot{x} + [pab]\,\dot{y} + [pac]\,\dot{z} &= 0,\\ [pab]\,\dot{x} + [pbb]\,\dot{y} + [pbc]\,\dot{z} &= 0,\\ [pac]\,\dot{x} + [pbc]\,\dot{y} + [pcc]\,\dot{z} &= 0. \end{aligned} \qquad (3')$$

Nyní uvažujme o hodnotách $t_i = a_i\dot{x} + b_i\dot{y} + c_i\dot{z}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Násobíme-li je p_ia_i, p_ib_i, p_ic_i a sečteme-li vždy pro všechna i, bude

$$[pat] = [pbt] = [pct] = 0.$$

Násobíme-li hodnotu t_i součinem p_it_i a sečteme-li pro všechna i, dostaneme

$$[pt^2] = [pat]\,\dot{x} + [pbt]\,\dot{y} + [pct]\,\dot{z},$$

tedy podle předcházejících rovnic $[pt^2] = 0$, t. j. musí

$$t_i = a_i\dot{x} + b_i\dot{y} + c_i\dot{z} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Je-li tedy determinant $\Delta = 0$, musí mezi koeficienty odchylkových rovnic (1) býti vztahy (18).

Naopak jsou-li mezi koeficienty odchylkových rovnic (1) vztahy (18), plynou z nich, násobíme-li je p_ia_i, p_ib_i, p_ic_i a sečteme-li pro všechna i rovnice (3′), kde všechna čísla $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ nejsou rovna 0. To však vyžaduje $\Delta = 0$.

Jsou-li mezi koeficienty odchylkových rovnic (1) vztahy (18) a předpokládáme-li na př. $\dot{z} \neq 0$, píšeme

$$c_i = -a_i\frac{\dot{x}}{\dot{z}} - b_i\frac{\dot{y}}{\dot{z}},$$

tedy z odchylkových rovnic (1) bude

$$a_i\left(x - \frac{\dot{x}}{\dot{z}}z\right) + b_i\left(y - \frac{\dot{y}}{\dot{z}}z\right) - l_i = v_i.$$

Z těchto odchylkových rovnic nevypočteme tedy hodnoty neznámých x, y, z, nýbrž jen hodnoty výrazů

$$x - \frac{\dot{x}}{\dot{z}}z \quad \text{a} \quad y - \frac{\dot{y}}{\dot{z}}z.$$

Zmenšuje-li se determinant Δ, zvětšují se koeficienty Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}. Ze vzorců (12), (12$_1$), (12$_2$) plyne totiž

$$Q_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} [pbb], & [pbc] \\ [pbc], & [pcc] \end{vmatrix}, \quad Q_{22} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} [paa], & [pac] \\ [pac], & [pcc] \end{vmatrix},$$

$$Q_{33} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} [paa], & [pab] \\ [pab], & [pbb] \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Ze vzorců $m_{x'} = m_0\sqrt{Q_{11}}$, $m_{y'} = m_0\sqrt{Q_{22}}$, $m_{z'} = m_0\sqrt{Q_{33}}$ a ze vzorců (19) je patrno, jak roste střední chyba výsledných hodnot, zmenšuje-li se determinant Δ.

5. Střední chyba m_0 pro jednotku váhy. Protože váha i-té odchylkové rovnice jest p_i, bude střední hodnota chyby ε_i rovna $m_0 : \sqrt{p_i}$. Ze vzorců

$$v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i, \quad \varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i,$$

(viz III, odst. 1), kde v_i značí odchylky a ε_i skutečné chyby i-té odchylkové rovnice, plyne

$$v_i - \varepsilon_i = a_i (x' - x) + b_i (y' - y) + c_i (z' - z).$$

První ze vzorců (11′) jest $x' = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n$, při čemž z rovnic (12′) a (12) plyne

$$[a\alpha] = 1, \ [b\alpha] = 0, \ [c\alpha] = 0,$$

tedy

$$[v\alpha] = [a\alpha]\, x' + [b\alpha]\, y' + [c\alpha]\, z' - [l\alpha] = x' - [l\alpha],$$

což je podle prvního ze vzorců (11′) rovno 0.

Násobíme-li tedy rovnici $v_i - \varepsilon_i = a_i (x' - x) + b_i (y' - y) + c_i (z' - z)$ po řadě α_i a sečteme pro všechna i, bude

$$-[\alpha\varepsilon] = x' - x \text{ a stejně } -[\beta\varepsilon] = y' - y, -[\gamma\varepsilon] = z' - z.$$

Odtud

$$v_i = \varepsilon_i - a_i [\alpha\varepsilon] - b_i [\beta\varepsilon] - c_i [\gamma\varepsilon] = -\varepsilon_1 (a_i\alpha_1 + b_i\beta_1 + c_i\gamma_1) - \varepsilon_2 (a_i\alpha_2 + b_i\beta_2 + c_i\gamma_2) - \ldots + \varepsilon_i \{1 - (a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i)\} - \ldots - \varepsilon_n (a_i\alpha_n + b_i\beta_n + c_i\gamma_n).$$

Ze vzorce [I, (12″)] vypočteme čtverec střední hodnoty v_i, který označíme $\dot{v}_i^2$. Bude

$$\dot{v}_i^2 = \frac{m_0^2}{p_1} (a_i\alpha_1 + b_i\beta_1 + c_i\gamma_1)^2 + \frac{m_0^2}{p_2} (a_i\alpha_2 + b_i\beta_2 + c_i\gamma_2)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m_0^2}{p_i} \{1 - (a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i)\}^2 + \ldots + \frac{m_0^2}{p_n} (a_i\alpha_n +$$
$$+ b_i\beta_n + c_i\gamma_n)^2 = m_0^2 \left\{ a_i^2 \left[\frac{\alpha^2}{p}\right] + 2a_i b_i \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + b_i^2 \left[\frac{\beta^2}{p}\right] + \right.$$
$$+ 2a_i c_i \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2b_i c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + c_i^2 \left[\frac{\gamma^2}{p}\right] + \frac{1}{p_i} - 2a_i \frac{\alpha_i}{p_i} -$$

$$-2\,b_i\frac{\beta_i}{p_i}-2\,c_i\frac{\gamma_i}{p_i}\Big\},$$

čili

$$p_i\dot v_i^2=m_0^2\Big\{p_ia_i^2\left[\frac{\alpha^2}{p}\right]+2p_ia_ib_i\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]+2p_ib_i^2\left[\frac{\beta^2}{p}\right]+$$
$$+2p_ia_ic_i\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]+2p_ib_ic_i\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]+p_ic_i^2\left[\frac{\gamma^2}{p}\right]+1-2a_i\alpha_i-$$
$$-2b_i\beta_i-2c_i\gamma_i\Big\}.$$

Pak bude součet

$$[p\dot v^2]=m_0^2\Big\{[paa]\left[\frac{\alpha^2}{p}\right]+2\,[pab]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]+[pbb]\left[\frac{\beta^2}{p}\right]+$$
$$+2\,[pac]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]+2\,[pbc]\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]+[pcc]\left[\frac{\gamma^2}{p}\right]+$$
$$+n-2\,[a\alpha]-2\,[b\beta]-2\,[c\gamma]\Big\}.$$

Užijeme-li označení $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{33}$ (viz III, odst. 3), bude

$$[p\dot v^2]=m_0^2\{([paa]\,Q_{11}+[pab]\,Q_{12}+[pac]\,Q_{13})+$$
$$+([pab]\,Q_{21}+[pbb]\,Q_{22}+[pbc]\,Q_{23})+([pac]\,Q_{31}+[pbc]\,Q_{32}+$$
$$+[pcc]\,Q_{33})+n-2\,[a\alpha]-2\,[b\beta]-2\,[c\gamma]\}.$$

Užijeme-li vzorců (12), (12_1) a (12_2), dostaneme

$$[p\dot v^2]=m_0^2\{3+n-2\,[a\alpha]-2\,[b\beta]-2\,[c\gamma]\}.$$

Ze vzorců (12′), resp. $(12'_1)$, $(12'_2)$ násobíme-li je a_i resp. b_i a c_i a sečteme-li pro všechna i, plyne $[a\alpha]=[b\beta]=$ $=[c\gamma]=1$, tedy

$$[p\dot v^2]=m_0^2\,(n-3)$$

a odtud

$$m_0^2=\frac{[p\dot v^2]}{n-3}. \tag{20}$$

Správnou hodnotu součtu $[p\dot v^2]$ nemůžeme vypočísti, protože neznáme střední hodnoty $\dot v_i^2$. Jsme proto nuceni dosaditi za $[p\dot v^2]$ přibližnou hodnotu, t. j. ten součet čtverců odchylek násobených příslušnými vahami $[pv^2]$, který plyne z uvažované řady měření. Bude tedy přibližně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-3}. \tag{20'}$$

V případě k neznámých bychom odvodili stejně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-k}. \tag{20''}$$

V kapitole II—IV předpokládáme, že se chyby, které zatěžují měření, řídí normálním zákonem četnosti. Výpočet chyby m_0 pro jednotku váhy v tomto odstavci je však založen na vzorci I, (12''), který byl odvozen za předpokladu obecnějšího (viz I, odst. 4). Platí tedy vzorce (20') a (20'') nejen v případě, že se chyby veličin l_i řídí normálním zákonem četnosti, nýbrž i tehdy, jsou-li na sobě nezávislé a je-li jejich funkce četnosti sudá funkce.

6. Výpočet součtu $[pvv]$. a) Přímá cesta. Dosadíme hodnoty x', y', z', vypočtené z normálních rovnic (3) do levých stran odchylkových rovnic

$$a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i = v_i. \tag{1'}$$

Tak vypočteme odchylky v_i, odtud v_i^2, $p_i v_i^2$ a součet $\sum\limits_i p_i v_i^2 = [pv^2]$. Tento způsob je sice zdlouhavý, ale poskytuje současně i jednotlivé odchylky v_i. Z jejich průběhu usuzujeme, mají-li vlastnosti nahodilých chyb či je-li na nich patrný nějaký systematický vliv (viz kap. V).

b) Nepřímá cesta.

α) Z rovnic (1') plyne

$$\begin{aligned}[pvv] &= \sum_i p_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i)^2 = \sum_i (p_i a_i x' + p_i b_i y' + \\ &+ p_i c_i z' - p_i l_i)(a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i) = ([paa]\, x' + \\ &+ [pab]\, y' + [pac]\, z' - [pal])\, x' + ([pab]\, x' + [pbb]\, y' + [pbc]\, z' - \\ &- [pbl])\, y' + ([pac]\, x' + [pbc]\, y' + [pcc]\, z' - [pcl])\, z' - \\ &- [pal]\, x' - [pbl]\, y' - [pcl]\, z' + [pll].\end{aligned}$$

Protože x', y', z' splňují normální rovnice, jsou první tři členy rovny 0 a tedy

$$[pvv] = [pll] - [pal]\, x' - [pbl]\, y' - [pcl]\, z'. \tag{21}$$

β) Vyloučíme-li z tohoto vzorce pomocí redukovaných rovnic hodnoty x', y', z', dojdeme k novému vzorci. Protože jest

$$x' + \frac{[pab]}{[paa]} y' + \frac{[pac]}{[paa]} z' = \frac{[pal]}{[paa]}, \tag{8}$$

bude, vyloučíme-li x',

$$[pvv] = [pll] - [pal] \frac{[pal]}{[paa]} - \left([pbl] - [pal] \frac{[pab]}{[paa]}\right) y' - $$
$$- \left([pcl] - [pal] \frac{[pac]}{[paa]}\right) z',$$

a zavedeme-li zkratky $[pbl\,.\,1]$ a $[pcl\,.\,1]$ [srovn. (4') a (4)], bude

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - [pbl\,.\,1]\, y' - [pcl\,.\,1]\, z'.$$

Protože je dále

$$y' + \frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} z' = \frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}, \tag{8}$$

bude, vyloučíme-li y',

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl\,.\,1]^2}{[pbb\,.\,1]} - \left([pcl\,.\,1] - \right.$$
$$\left. - [pbl\,.\,1] \,.\, \frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\right) z'$$

a zavedeme-li zkratku $[pcl\,.\,2]$ [srovn. (5') a (5)], jest

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl\,.\,1]^2}{[pbb\,.\,1]} - [pcl\,.\,2]\, z'.$$

A protože

$$z' = \frac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}, \tag{8}$$

dostaneme konečný vzorec ve tvaru

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl \,.\, 1]^2}{[pbb \,.\, 1]} - \frac{[pcl \,.\, 2]^2}{[pcc \,.\, 2]}. \tag{22}$$

7. Případ dvou neznámých a případ jedné neznámé. a) V případě dvou neznámých přejdou rovnice (1′) v rovnice

$$a_i x' + b_i y' - l_i = v_i.$$

Normální rovnice jsou

$$[paa]\, x' + [pab]\, y' = [pal],$$
$$[pab]\, x' + [pbb]\, y' = [pbl].$$

Redukované rovnice jsou

$$[paa]\, x' + [pab]\, y' = [pal],$$
$$[pbb \,.\, 1]\, y' = [pbl \,.\, 1].$$

Střední chyba $m_{x'} = m_0\sqrt{Q_{11}}$, $m_{y'} = m_0\sqrt{Q_{22}}$, při čemž Q_{11}, Q_{22} a Q_{12}, Q_{21} plynou z rovnic

$$[paa]\, Q_{11} + [pab]\, Q_{12} = 1,$$
$$[pab]\, Q_{11} + [pbb]\, Q_{12} = 0,$$

resp.

$$[paa]\, Q_{21} + [pab]\, Q_{22} = 0,$$
$$[pab]\, Q_{21} + [pbb]\, Q_{22} = 1,$$

nebo ze vzorců

$$Q_{11} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb \,.\, 1]}, \text{ kde } A_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}, \text{ a}$$

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb \,.\, 1]}.$$

Součet $[pvv]$ se počítá buď přímo z odchylek v_i, nebo nepřímo ze vzorce

$$[pvv] = [pll] - [pal]\,x' - [pbl]\,y' =$$
$$= [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl\,.\,1]^2}{[pbb\,.\,1]}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy plyne ze vzorce

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-2}.$$

b) V případě jedné neznámé přejdou rovnice (1′) v rovnice

$$a_i x' - l_i = v_i.$$

Normální rovnice jest $[paa]\,x' = [pal]$.

Střední chyba $m_{x'} = m_0\sqrt{Q_{11}}$, kde Q_{11} plyne z rovnice

$$[paa]\,Q_{11} = 1, \text{ tedy } Q_{11} = \frac{1}{[paa]}.$$

Součet $[pvv]$ dostaneme ve tvaru

$$[pvv] = [pll] - [pal]\,x' =$$
$$= [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy plyne ze vzorce

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-1}.$$

Ještě jednodušší případ, kdy $a_i = 1$ (přímá měření nestejné váhy), vede ke vzorcům

$$x' = \frac{[pl]}{[p]},\quad Q_{11} = \frac{1}{[p]},\quad [pvv] = [pll] - \frac{[pl]^2}{[p]}$$

[viz II, (19)] a

$$m_0^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}.$$

Nejjednodušší případ — přímá měření stejné váhy — vede ke vzorcům

$$x' = \frac{[l]}{n},\quad Q_{11} = \frac{1}{n},\quad [pvv] = [pll] - \frac{[l]^2}{n},$$

[viz II, (19')] a

$$m_0^2 = \frac{[vv]}{n-1}.$$

8. Redukce odchylkových rovnic na lineární tvar.

Nechť mezi měřenou veličinou m a neznámými X, Y, Z jest vztah

$$f(X, Y, Z; t, u, w) = m,$$

kde t, u, w jsou veličiny, jejichž hodnoty určujeme pomocnými měřeními. Ke každé skupině hodnot t_i, u_i, w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, měříme příslušnou hodnotu m_i. Máme tedy pro tři neznámé X, Y, Z rovnice

$$f(X, Y, Z; t_i, u_i, w_i) = m_i,$$

jejichž počet je n.

Obyčejně známe předem nebo získáme předem přibližné hodnoty neznámých (x_0, y_0, z_0) a hledáme malé chyby x, y, z, jež nutno k přibližným hodnotám algebraicky přičísti, abychom dostali správné hodnoty neznámých ($X = x_0 + x$, $Y = y_0 + y$, $Z = z_0 + z$).

Předpokládejme, že známe takové přibližné hodnoty, že můžeme v Taylorově rozvoji funkce $f(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z; t, u, w)$ podle rostoucích mocnin x, y, z zanedbati členy druhého a vyšších řádů, že tedy můžeme s dostatečnou přesností psáti

$$\begin{aligned} f(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z; t, u, w) &\doteq \\ \doteq f(x_0, y_0, z_0; t, u, w) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z &\doteq \\ \doteq d + ax + by + cz, \end{aligned}$$

kde a, b, c, d jsou funkce t, u, w nebo konstanty.

Píšeme-li ještě $m_i - d_i = l_i$, máme k určení x, y, z zase n lineárních rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \qquad (1)$$

s nimiž jsme se dosud zabývali v této kapitole.

9. Příklady na vyrovnání zprostředkujících měření.

1. Určiti střední výšku závitu jemného stavěcího šroubu. Závity byly potřeny olejem a otištěny desetkrát na papír. Změřena v každém případě vzdálenost krajních otištěných čárek na dvacetinu mm a zjištěn příslušný počet závitů. Došli jsme k těmto číslům

počet závitů									
122	121	121	120	121	121	121	120	111	114
vzdálenost v mm									
85,20	84,60	84,60	83,90	84,45	84,60	84,55	83,95	77,70	79,65

Klademe přibližně střední výšku závitu $x_0 = 0{,}7$ mm, přesně $x = 0{,}7 + \dot{x}_0$. Tak dostaneme z první dvojice čísel odchylkovou rovnici

$$122\,(0{,}7 + \dot{x}_0) - 85{,}20 = v_1, \text{ nebo } 122\dot{x}_0 + 0{,}20 = v_1.$$

Stejně z ostatních dvojic

$$\begin{array}{ll}
121\dot{x}_0 + 0{,}10 = v_2, & 121\dot{x}_0 + 0{,}15 = v_7 \\
121\dot{x}_0 + 0{,}10 = v_3, & 120\dot{x}_0 + 0{,}05 = v_8 \\
120\dot{x}_0 + 0{,}10 = v_4, & 111\dot{x}_0 + 0{,}00 = v_9 \\
121\dot{x}_0 + 0{,}25 = v_5, & 114\dot{x}_0 + 0{,}15 = v_{10}. \\
121\dot{x}_0 + 0{,}10 = v_6, &
\end{array}$$

Podle (III, 7b) bude $\dot{x}_0 = [al] : [aa]$, při tom $[aa] = 142\,206$, $[al] = -144{,}20$, tedy $\dot{x}_0 \doteq -0{,}0010$. Odchylky v setinách mm jsou

$$+7{,}8;\ -2{,}1;\ -2{,}1;\ -2{,}0;\ +12{,}9;\ -2{,}1;\ +2{,}9;\ +7{,}0;\ -11{,}1;\ +3{,}6.$$

Odtud součet čtverců odchylek je 438,06,

$$m_0 = \pm \sqrt{438{,}06 : 3} = \pm\ 6{,}98 \text{ (v setinách mm).}$$

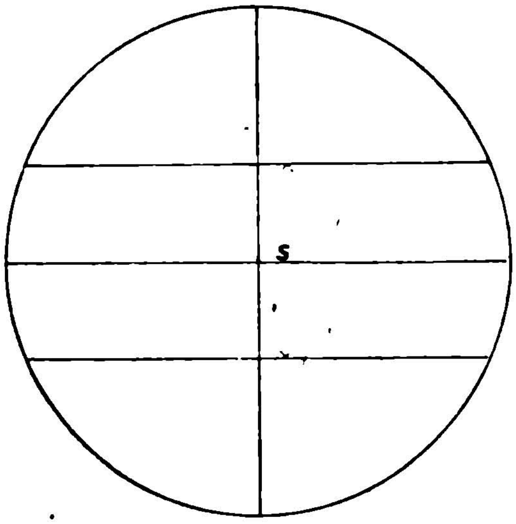
A střední chyba výsledku

$$\frac{m_0}{\sqrt{[aa]}} \doteq \pm \frac{6{,}98}{\sqrt{142206}} = \pm\ 1{,}9\,.\,10^{-2} \text{ (v setinách mm).}$$

Tedy výsledek

$$x = 0{,}6990 \text{ mm} \pm 1{,}9 \,.\, 10^{-4} \text{ mm}.$$

2. Určiti konstanty Reichenbachova dálkoměru.*)



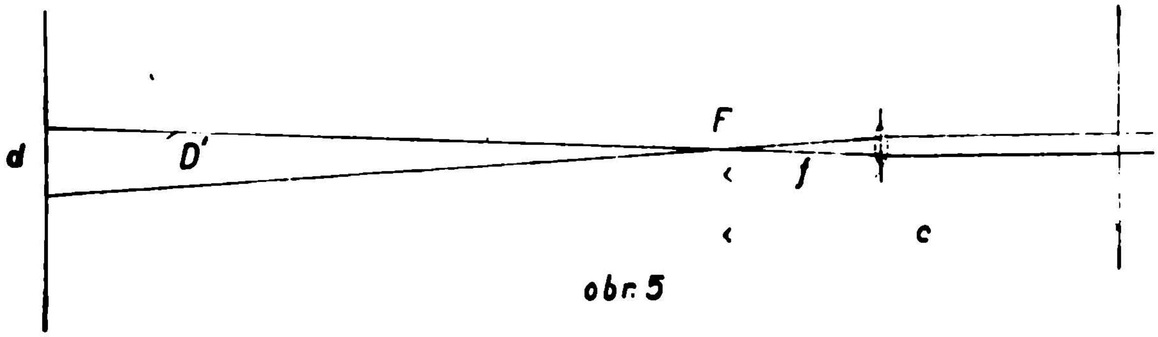
obr. 4

Reichenbachův dálkoměr je vodorovně ustavený dalekohled, jehož nitkový kříž má tvar patrný z obrázku 4. Dálkoměrem zaměřujeme na svisle postavenou dělenou lať a určujeme polohu horního a dolního vodorovného vlákna vůči obrazu latě, jinak řečeno určujeme čtení při horním a dolním vláknu. Rozdíl obou čtení označíme d. Z podobnosti trojúhelníků pak plyne (z obr. 5), vzdálenost latě od předního ohniska objektivu je úměrna d [rovná se $(f : s) \,.\, d = kd$]. Vzdálenost svislé osy stroje od předního ohniska objektivu se jmenuje malá konstanta c. Tedy vzdálenost D, latě od svislé osy stroje je rovna $c + kd$, kde $k = f : s$, velká konstanta, bývá blízká 100.

*) Srovnej Helmert, l. c. str. 89—94.

Tabulka

d	D	a	b	l	s
1,2661	126,014	1	1,2661	+0,047	2,3131
1,0830	108,029	1	1,0830	+0,225	2,3080
0,8434	84,049	1	0,8434	+0,014	1,8574
0,6002	60,069	1	0,6002	+0,159	1,7592
0,3593	36,089	1	0,3593	+0,076	1,4353
0,1183	12,109	1	0,1183	+0,004	1,1223
		$[aa]$	$[ab]$	$[al]$	$[as]$
		6	4,2703	+0,525	10,7953



obr. 5

Mají se určiti hodnoty c a k ze šesti dvojic hodnot d_i a D_i sestavených do 1. a 2. sloupce následující tabulky. První a poslední dvojice vede k rovnicím

$$c + k \,.\, 1{,}2661 = 126{,}014,$$
$$c + k \,.\, 0{,}1183 = 12{,}109,$$

z nichž plyne $k \doteq 99{,}2$, $c \doteq 0{,}37$.

Klademe-li $c = 0{,}37 + x$, $k = 99{,}2 + y$, plyne z první dvojice hodnot d_i, a D_i vztah $0{,}37 + x + (99{,}2 + y)\,1{,}2661 = 126{,}014$, čili

$$x + 1{,}2661y = 0{,}047.$$

Stejně pro ostatní dvojice. Koeficienty a, b, l těchto rovnic jsou sestaveny ve 3., 4. a 5. sloupci tabulky. V 6. sloupci jsou vypočtena čísla $s_i = a_i + b_i + l_i$ a v dalších sloupcích potřebné součiny a jejich součty.

V.

bb	bl	bs	v	v^2
1,6030	0,0595	2,9286	+0,078	0,0061
1,1729	0,2437	2,4996	—0,112	0,0125
0,7113	0,0118	1,5665	+0,082	0,0067
0,3602	0,0954	1,0559	—0,079	0,0062
0,1291	0,0273	0,5157	—0,013	0,0002
0,0140	0,0005	0,1328	+0,043	0,0018
[bb] 3,9905	[bl] 0,4382	[bs] 8,6991		0,0335

Součtové kontroly

$$[aa] + [ab] + [al] - [as] = 0{,}0000$$
$$[ab] + [bb] + [bl] - [bs] = 0{,}0001$$

ukazují, že koeficienty normálních rovnic jsou vypočteny správně. V další tabulce je provedena redukce normálních rovnic se součtovou kontrolou.

Tabulka VI.

x	y		
6 4,2703 4,2703 4,2703	4,2703 +3,9905 +3,9905 +3,0393	+0,525 +0,4382 +0,4382 +0,3736	10,7953 8,6990 8,6990 7,6832
	0,9512	+0,0646	1,0158

Z redukované rovnice

$$0{,}9512y = +\ 0{,}0646$$

plyne $y = +\ 0{,}0679$, a z první normální rovnice tedy $x = 0{,}0392$. Odtud $c \doteq 0{,}409$, $k \doteq 99{,}268$.

V předposledním a posledním sloupci tabulky V jsou vypočteny odchylky v_i, jejich čtverce a $[vv] = 0{,}0335$.

Podle vzorce

$$[vv] = [ll] - [al]\,x - [bl]\,y$$

(viz III, 7a), uvážíme-li, že

$$[ll] = 0{,}0841,\ [al] = +\ 0{,}5250,\ [bl] = +\ 0{,}4382,$$
$$x = 0{,}0392,\ y = 0{,}0679,$$

plyne $[vv] = 0{,}0338$.

Podle vzorce

$$[vv] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]}$$

(viz III, 7a), uvážíme-li, že

$$[aa] = 6,\ [bl\,.\,1] = 0{,}0646,\ [bb\,.\,1] = 0{,}9512,$$

bude $[vv] = 0{,}0338$.

Pak [viz III, (20″)] jest

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,.\,0{,}0338} = \pm\ 9{,}2\,.\,10^{-2}.$$

Odtud

$$m_y = \frac{m_0}{\sqrt{[bb\,.\,1]}} = \frac{9{,}2\,.\,10^{-2}}{\sqrt{0{,}9512}} = \pm\ 9{,}4\,.\,10^{-2}.$$

A protože

$$Q_{11} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1^2}{[bb\,.\,1]},\quad \text{kde } A_1 = -\frac{[ab]}{[aa]},$$

bude $Q_{11} = 0{,}6992$, tedy

$$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}} = 9{,}2\,.\,10^{-2}\sqrt{0{,}6992} = \pm\ 7{,}7\,.\,10^{-2}.$$

Výsledek

$$c \doteq 0{,}409 \pm 7{,}7\,.\,10^{-2},$$
$$k = 99{,}268 \pm 9{,}4\,.\,10^{-2}.$$

Přesněji určíme obě veličiny c a k, jestliže c změříme přímo. Bylo změřeno 0,335 a nejistotu v této hodnotě odhaduje Helmert na 0,003. Výpočet neznámé k z naměřených šesti dvojic d_i a D_i provedeme za dvou různých předpokladů.

α) Předpokládáme, že odchylkové rovnice mají stejnou váhu. Pak první rovnice $c + k\,.\,1{,}2661 = 126{,}014$, klademe-li $c = 0{,}335$ a $k = 99{,}2 + y$, přejde v $1{,}2661y = +\ 0{,}082$ a stejně ostatní rovnice. Koeficienty nových odchylkových rovnic jsou sestaveny v 1. a 2. sloupci tabulky VII. Ve 3. sloupci jsou vypočtena čísla $s_i = b_i + l_i$ a v dalších sloupcích potřebné součiny a jejich součty. Součtová kontrola $[bb] + [bl] - [bs] = -\,0{,}0001$ ukazuje, že koeficienty normální rovnice $3{,}9905y = +\ 0{,}5876$ jsou vypočteny správně. Odtud $y = +\ 0{,}147$, tedy $k = 99{,}347$. V dalších dvou sloupcích jsou vypočteny odchylky v_i, jejich čtverce a $[vv]$.

Tabulka VII.

b	l	s	bl	bs	v	v^2
1,2661	+0,082	1,3481	+0,1038	1,7068	+0,104	0,0108
1,0830	+0,260	1,3430	0,2816	1,4545	—0,101	102
0,8434	+0,049	0,8924	0,0413	0,7527	+0,075	56
0,6002	+0,194	0,7942	0,1164	0,4766	—0,106	112
0,3593	+0,111	0,4703	0,0399	0,1690	—0,058	34
0,1183	+0,039	0,1573	0,0046	0,0186	—0,022	5
			+0,5876	4,5782		0,0417

Ze vzorců

$$[vv] = [ll] - [bl]\, y = [ll] - [bl]^2 : [bb]$$

(odst. III, 7b) dostaneme $[vv] = 0{,}0417$, resp. $0{,}0416$, neboť $[ll] = 0{,}1281$. Odtud

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}0417}{5}} = \pm\, 9{,}1 \,.\, 10^{-2}$$

a

$$m_y = \frac{m_0}{\sqrt{[bb]}} = \pm \frac{9{,}1 \,.\, 10^{-2}}{\sqrt{3{,}9905}} = \pm\, 4{,}6 \,.\, 10^{-2}.$$

Výsledek

$$k = 99{,}347 \pm 4{,}6 \,.\, 10^{-2}.$$

β). Označíme-li skutečné chyby čísel D a d písmenem ε a ε', jest skutečná chyba odchylkových rovnic rovna $k\varepsilon' - \varepsilon$. Jsou-li příslušné hodnoty středních chyb rovny m a m', bude čtverec střední chyby odchylkových rovnic $k^2m'^2 + m^2$. Helmert odhaduje $m \leq 0{,}05$, $m' = 0{,}002$, takže

$$m^2 \leq 0{,}0025, \quad k^2m'^2 = 99{,}2^2 \,.\, 4 \,.\, 10^{-6} = 0{,}0394,$$

což je skoro 16krát větší než m^2. Rozhoduje tedy o váze odchylkových rovnic v tomto případě člen $k^2m'^2$.

Protože váha je nepřímo úměrná čtverci střední chyby a podle provedených zkoušek je střední chyba m přímo úměrná vzdálenosti latě, tedy přibližně přímo úměrná délkám d, můžeme jako váhu klásti veličinu $1 : d^2$. Násobíme-li každou rovnici $1{,}2661\, y = +\, 0{,}082$ atd. odmocninou její váhy, tedy veličinou $1 : d = 1 : b$, dojdeme k těmto rovnicím o váze vesměs rovné 1 (srovn. II, 3):

$$\begin{array}{ll} y = +\,0{,}065 & y = +\,0{,}323 \\ y = +\,0{,}240 & y = +\,0{,}309 \\ y = +\,0{,}058 & y = +\,0{,}330. \end{array}$$

Z nich plyne $y = \frac{1}{6} \,.\, 1{,}325 = +\,0{,}221$, $k = 99{,}421$. Pak $v = +\,0{,}156;\ -0{,}019;\ +\,0{,}163;\ -0{,}102;\ -0{,}088;\ -0{,}109;$ $[v] = +\,0{,}001$; $[vv] = 813 \,.\, 10^{-4}$. Stejná hodnota plyne ze vzorce II, (19′). Pak

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{813 \,.\, 10^{-4}}{5 \,.\, 6}} = \pm\, 10^{-2} \sqrt{27{,}1} = \pm\, 5{,}2 \,.\, 10^{-2}.$$

Výsledek

$$k = 99{,}421 \pm 5{,}2 \,.\, 10^{-2}.$$

3. Pro neznámé x, y jsou dány tyto odchylkové rovnice

$$x \pm y - l_i = v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

v n rovnicích jest u y znaménko $+$, ve zbytku znamení $-$. Vypočísti vyrovnané hodnoty neznámých a jejich střední chyby.

V tomto případě je $[aa] = 2n$, $[ab] = 0$, $[bb] = 2n$, $[al] = [l]$. Je-li s_1 a s_2 aritmetický střed hodnot l_i pro ta i, pro něž je v odchylkové rovnici u y znaménko $+$ resp. $-$, jest $[al] = ns_1 + ns_2$ a $[bl] = ns_1 - ns_2$.

Normální rovnice tedy jsou

$$\begin{aligned} 2nx &= ns_1 + ns_2, \\ 2ny &= ns_1 - ns_2. \end{aligned}$$

Odtud

$$x = \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(s_1 - s_2).$$

Protože $[vv] = [ll] - [al]\, x - [bl]\, y$, [viz III, (21)], bude

$$[vv] = [l^2] - \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2)^2 n - \tfrac{1}{2}(s_1 - s_2)^2 n = [l^2] - n\,(s_1{}^2 + s_2{}^2).$$

Tedy střední chyba m_0 pro jednotku váhy je

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[l^2] - n\,(s_1^2 + s_2^2)}{2\,(n-1)}}$$

a střední chyba vyrovnané hodnoty x a y je $m_0 : \sqrt{2n}$.

4. Dokažte, že n odchylkových rovnic

$$x + b_i y + c_i z - l_i = v_i \quad \text{o váze 1,} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

vede ke stejným vyrovnaným hodnotám pro neznámé y, z jako n odchylkových rovnic t. zv. redukovaných:

$$\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\} y + \left\{c_i - \frac{[c]}{n}\right\} z - \left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\} = v_i' \quad \text{o váze 1,}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Normální rovnice k daným odchylkovým rovnicím jsou

$$\begin{aligned} nx + [b]\,y + [c]\,z - [l] &= 0,\\ [b]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z - [bl] &= 0,\\ [c]\,x + [bc]\,y + [c^2]\,z - [cl] &= 0. \end{aligned}$$

Odtud redukované rovnice prvního řádu budou

$$\begin{aligned} y\left\{[b^2] - \frac{[b]^2}{n}\right\} + z\left\{[bc] - \frac{[b][c]}{n}\right\} - \left\{[bl] - \frac{[b]\,[l]}{n}\right\} &= 0,\\ y\left\{[bc] - \frac{[b][c]}{n}\right\} + z\left\{[c^2] - \frac{[c]^2}{n}\right\} - \left\{[cl] - \frac{[c]\,[l]}{n}\right\} &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Z redukovaných odchylkových rovnic dojdeme k normálním rovnicím.

$$y\left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}^2\right] + z\left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}\left\{c_i - \frac{[c]}{n}\right\}\right] - \\ - \left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}\right] = 0, \tag{23'}$$

$$y\left[\left\{b_i-\frac{[b]}{n}\right\}\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}\right]+z\left[\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}^2\right]- \tag{23'}$$
$$-\left[\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}\left\{l_i-\frac{[l]}{n}\right\}\right]=0.$$

Protože

$$\left[\left\{b_i-\frac{[b]}{n}\right\}^2\right]=\left[b_i^2-2b_i\frac{[b]}{n}+\frac{[b]^2}{n^2}\right]=$$
$$=[b^2]-\frac{2[b]^2}{n}+\frac{[b]^2}{n}=[b^2]-\frac{[b]^2}{n},$$

a dále

$$\left[\left\{b_i-\frac{[b]}{n}\right\}\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}\right]=[bc]-\frac{[c][b]}{n}-\frac{[b][c]}{n}+\frac{[b][c]}{n}=$$
$$=[bc]-\frac{[b][c]}{n};$$

podobnou úpravou ostatních koeficientů dokážeme, že rovnice (23) a (23′) jsou totožné.

Jak se v tomto případě vypočtou střední chyby neznámých y a z? Podle vzorců (16) jest

$$m_y=m_0\sqrt{\frac{1}{[bb\,.\,1]}+\frac{B_1^2}{[cc\,.\,2]}},\quad m_z=m_0\sqrt{\frac{1}{[cc\,.\,2]}},$$

při čemž

$$B_1=-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}.$$

Veličiny $[bb\,.\,1]$, $[bc\,.\,1]$ jsou koeficienty u y a z v redukované rovnici prvního řádu, t. j. v první z rovnic (23) nebo (23′), a veličina $[cc\,.\,2]$ je koeficient u z v redukované rovnici druhého řádu. Střední chybu m_0 pro jednotku váhy vypočteme ze vzorce (20″) t. j. $m_0=\sqrt{[v^2]:(n-3)}$. Při tom součet $[v^2]$ je podle (21) roven $[vv]=[ll]-$ $-[l]\,x-[bl]\,y-[cl]\,z$. Vyloučíme-li odtud a z první normální rovnice $nx + [b]\,y + [c]\,z - [l] = 0$ zase neznámou x, dostaneme

$$[vv] = [ll] - \frac{[l]^2}{n} - y\left\{[bl] - \frac{[l]\,[b]}{n}\right\} - z\left\{[cl] - \frac{[l][c]}{n}\right\},$$

nebo podle předcházející úvahy

$$[vv] = \left[\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}^2\right] - y\left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}\right] -$$

$$- z\left[\left\{c_i - \frac{[c]}{n}\right\}\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}\right] = [v'v'].$$

5. Z grafu, ukazujícího pravděpodobnou výšku syna v závislosti na výšce otce, byla vyňata tato čísla (v palcích)

$$\begin{aligned} S &= 65{,}7;\ 66{,}8;\ 67{,}2;\ 69{,}3;\ 69{,}8;\ 70{,}5;\ 70{,}9, \\ O &= \ \ 62;\ \ \ 64;\ \ \ 65;\ \ \ 69;\ \ \ 70;\ \ \ 71;\ \ \ 72. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li mezi S a O vztah $S = x + yO$, určete vyrovnané hodnoty koeficientů x a y a jejich střední chyby.*) Normální rovnice jsou

$$\begin{aligned} 7x + 473y &= 480{,}2, \\ 473x + 32\,051y &= 32\,494{,}6. \end{aligned}$$

Odtud

$$y = 0{,}522 \pm 0{,}008,\quad x = 33{,}3 \pm 0{,}5.$$

6. Pro časy $T_1, T_2, \ldots, T_n$, vyjádřené ve dnech, byly určeny opravy hodin $o_1, o_2, \ldots, o_n$. Určiti odtud opravu hodin $o = x + yT$ pro libovolný čas T; y je denní chod hodin.**)

Měření vedou k rovnicím $x + yT - o_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Normální rovnice jsou

$$\begin{aligned} nx + [T]\,y &= [o], \\ [T]\,x + [T^2]\,y &= [oT]. \end{aligned}$$

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 214.

**) P. Pizzetti: I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali, Genova 1891, str. 136—138.

Čítáme-li T pro jednoduchost od středu $[T] : n$, který položíme rovný 0, přejdou normální rovnice ve tvar

$$nx = [o] ,$$
$$[T^2]\, y = [oT].$$

Střední chyby budou tedy

$$m_x = m_0 : \sqrt{n}, \quad m_y = m_0 : \sqrt{[T^2]}.$$

Abychom vypočetli střední chybu opravy $o = x + yT$, užijeme vzorce [III, (16')]. V uvažovaném případě jest

$$f_0 = 0, \; f_1 = 1, \; f_2 = T, \; Q_{11} = \frac{1}{n}, \; Q_{12} = Q_{21} = 0, \; Q_{22} = \frac{1}{[T^2]}.$$

Tedy

$$m_\Phi = m_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{T^2}{[T^2]}}.$$

7. Mezi teplotou T ebonitové tyče a odečtením x na stupnici je vztah

$$x = A + BT + CT^2.$$

Vyhledati koeficienty B a C a jejich střední chyby ze šesti dvojic měření.*)

Tabulka VIII.

x	12,47	15,28	18,27	21,00	23,81	28,23
T	14,44	20,14	25,52	30,39	34,92	40,73

Protože nezáleží na výpočtu koeficientu A, užijeme postupu vyloženého v příkl. 4, t. j. odvodíme redukované odchylkové rovnice. Aby koeficienty u C nepřevyšovaly mnohokrát koeficienty u B a prosté členy, dělíme každý stem a současně místo C zavedeme neznámou $C' = 100C$.

*) Srovn. B. Kučera: Základové prakt. fysiky, II, str. 4.

Tabulka

$b' = b - \frac{[b]}{n}$	$c' = c - \frac{[c]}{n}$	$l' = l - \frac{[l]}{n}$	s	b'^2
—13,25	—6,36	—7,37	—26,98	175,56
— 7,55	—4,39	—4,56	—16,50	57,00
— 2,17	—1,93	—1,57	— 5,67	4,71
+ 2,70	+0,79	+1,16	+ 4,65	7,29
+ 7,23	+3,75	+3,97	+14,95	52,27
+13,04	+8,14	+8,39	+29,57	170,04
				466,87

Normální rovnice budou

$$466{,}87B + 256{,}99C' = 276{,}73,$$
$$256{,}99B + 144{,}38C' = 154{,}02.$$

Redukovaná rovnice prvního řádu

$$2{,}92C' = 1{,}69.$$

Odtud

$$C' = 0{,}579, \qquad C = 0{,}00579, \qquad B = 0{,}274.$$

A střední chyby

$$m_C = \pm\ 0{,}00088, \quad m_B = \pm\ 0{,}049.$$

8. Určiti methodou nejmenších čtverců prvních pět koeficientů ve Fourierově řadě.

Odchylkové rovnice zde budou

$$a + b \sin x_k + c \cos x_k + d \sin 2x_k + e \cos 2x_k - l_k = v_k,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1. \qquad (24)$$

Jak vidíme, je v tomto případě výhodné voliti $x_k = \frac{2\pi}{n} k$, kde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, t. j. určiti l_k pro hodnoty x_k, jež rozdělují periodu 2π na n stejných dílů. Normální rovnice budou

IX.

$b'c'$	$b'l'$	$b's$	$c'c'$	$c'l'$	$c's$
+ 84,27	+ 97,65	+ 357,48	40,45	+ 46,87	+ 171,59
+ 33,14	+ 34,43	+ 124,58	19,27	+ 20,02	+ 72,44
+ 4,19	+ 3,41	+ 12,30	3,72	+ 3,03	+ 10,94
+ 2,13	+ 3,13	+ 12,56	0,62	+ 0,92	+ 3,67
+ 27,11	+ 28,70	+ 108,09	14,06	+ 14,89	+ 56,06
+ 106,15	+ 109,41	+ 385,59	66,26	+ 68,29	+ 240,70
+ 256,99	+ 276,73	+ 1000,60	144,38	+ 154,02	+ 555,40

$$an + b\,[\sin x_k] + c\,[\cos x_k] + d\,[\sin 2x_k] + e\,[\cos 2x_k] - [l_k] = 0,$$
$$a\,[\sin x_k] + b\,[\sin^2 x_k] + c\,[\sin x_k \cos x_k] + d\,[\sin x_k \sin 2x_k] +$$
$$+ e\,[\sin x_k \cos 2x_k] - [l_k \sin x_k] = 0,$$

. . . .

$$a\,[\cos 2x_k] + b\,[\cos 2x_k \sin x_k] + c\,[\cos 2x_k \cos x_k] +$$
$$+ d\,[\cos 2x_k \sin 2x_k] + e\,[\cos^2 2x_k] - [l_k \cos 2x_k] = 0.$$

Zmíněná volba hodnot $x_k = \dfrac{2\pi}{n}\,k, \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1$ zjednoduší poslední rovnice takto:

$$na = [l_k], \quad \tfrac{1}{2}n\,b = [l_k \sin x_k], \quad \tfrac{1}{2}n\,c = [l_k \cos x_k],$$
$$\tfrac{1}{2}n\,d = [l_k \sin 2x_k], \quad \tfrac{1}{2}n\,l = [l_k \cos 2x_k]. \tag{25}$$

Abychom to ukázali, uvažujme o součtech

$$S_s = \sum_{k=0}^{n-1} \sin L\,\frac{2\pi}{n}\,k \quad \text{a} \quad S_c = \sum_{k=0}^{n-1} \cos L\,\frac{2\pi}{n}\,k.$$

Výraz $S_s + iS_c$, kde $i = +\sqrt{-1}$, bude roven

$$S_s + iS_c = \sum_{k=0}^{n-1} e^{iL\frac{2\pi}{n}k},$$

což je geometrická řada, jejíž první člen je roven 1 a podíl $e^{iL\frac{2\pi}{n}}$.

Tedy

$$S_s + iS_c = \frac{1 - e^{iL2\pi}}{1 - e^{iL\frac{2\pi}{n}}}.$$

Protože

$$e^{iL2\pi} = \cos 2\pi L + i \sin 2\pi L = 1, \text{ je } S_s + iS_c = 0,$$

čili

$$S_s = S_c = 0.$$

Jmenovatel $1 - e^{iL\frac{2\pi}{n}}$ není roven nule, pokud L není násobkem čísla n. Z toho je patrno, že na př.

$$[\sin l_1 x_k \sin l_2 x_k] = -\tfrac{1}{2}[\cos(l_1 + l_2)x_k - \cos(l_1 - l_2)x_k] = 0,$$

pokud $l_1 \neq l_2$, kdežto pro $l_1 = l_2$ jest

$$[\sin^2 l_1 x_k] = \tfrac{1}{2}n.$$

Stejně je

$$[\sin l_1 x_k \cos l_2 x_k] = \tfrac{1}{2}[\sin(l_1 + l_2)x_k + \sin(l_1 - l_2)x_k] = 0,$$

a to ať je $l_1 \neq l_2$ nebo $l_1 = l_2$.

Konečně je

$$[\cos l_1 x_k \cos l_2 x_k] = \tfrac{1}{2}[\cos(l_1 + l_2)x_k + \cos(l_1 - l_2)x_k] = 0,$$

je-li $l_1 \neq l_2$. A pro $l_1 = l_2$ jest

$$[\cos^2 l_1 x_k] = \tfrac{1}{2}n.$$

Označíme-li zase písmenem m_0 střední chybu pro jednotku váhy, bude střední chyba veličiny a rovna $m_0 : \sqrt{n}$ a střední chyby všech ostatních koeficientů b, c, d, e jsou rovny $m_0\sqrt{2 : n}$

Veličiny Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} atd. plynou totiž z rovnic

$$nQ_{11} = 1, \quad \tfrac{1}{2}n\,Q_{22} = 1, \quad \tfrac{1}{2}n\,Q_{33} = 1 \text{ atd.}$$

Tato úloha se vyskytuje v praksi často. Uvádím na př.: Určování periodických chyb v dělení kruhu, určování periodických chyb mikrometrických šroubů, určování vlivu blízkých hmot na údaje torsní váhy podle způsobu Schweydarova.

9. Určiti vyrovnané hodnoty pravoúhlých souřadnic $(x; y)$ bodu P, jestliže byla změřena se stejnou vahou jeho vzdálenost od bodů (0; 0), (7; 0), (0; 6) a bylo naměřeno po řadě 6,40; 4,47; 5,38.*)

Zvolíme přibližné hodnoty $x_0 = 5$, $y_0 = 4$. Pak z rovnice

$$\sqrt{(5 + x)^2 + (4 + y)^2} - 6{,}40 = 0,$$

uvážíme-li, že

$$\sqrt{41 + 10x + 8y + \ldots} = \sqrt{41}\,(1 + \tfrac{10}{41}x + \tfrac{8}{41}y + \ldots)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{41}\,(1 + \tfrac{5}{41}x + \tfrac{4}{41}y + \ldots),$$

plyne

$$0{,}78x + 0{,}62y + 0{,}0031 = 0.$$

Stejně i druhé dvě rovnice

$$-0{,}45x + 0{,}89y + 0{,}0021 = 0,$$
$$+0{,}93x - 0{,}37y + 0{,}0052 = 0.$$

Odtud vyrovnáním podle metody nejmenších čtverců plyne

$$x \doteq -0{,}004, \quad y = -0{,}002,$$

tedy výsledek

$$x_0 + x = 4{,}996, \quad y_0 + y = 3{,}998.$$

10. Na několika bodech, jejichž pravoúhlé souřadnice $(x_i; y_i)$ známe, byly měřeny směry k těmto známým bodům a k jednomu bodu, jehož souřadnice $(x; y)$ hledáme (hledaný bod). Jak postupujeme při výpočtu vyrovnaných souřadnic x, y?

Nejprve vypočteme t. zv. směrníky směrů od daného bodu na jiný daný bod, t. j. úhly, které svírají uvažované směry s kladným směrem osy x-ové. Na př. pro směrník σ_{12} od bodu $(x_1; y_1)$ na bod $(x_2; y_2)$ bude

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 214—215.

Protože při měření směrů nemůžeme dělený kruh přesně orientovati, na př. tak, aby směr od středu kruhu k rysce 0° směřoval ve směru rovnoběžném s kladným směrem osy x-ové, musíme k měřeným směrům S_{12} (s bodu (x_1; y_1) na bod (x_i; y_i)) připojiti t. zv. orientační konstantu o_1, aby z řady směrů vznikla řada směrníků, tedy

$$\sigma_{1i} = S_{1i} + o_1, \; o_1 = \sigma_{1i} - S_{1i}.$$

Jestliže na př. v bodě (x_1; y_1), kromě směru na hledaný bod (x; y) byl zaměřen jen jeden směr na některý daný bod, máme pro orientační konstantu o_1 jen jednu hodnotu. Jestliže jsme zaměřili několik směrů na dané body, máme pro orientační konstantu několik hodnot a jejich aritmetický průměr klademe jako její vyrovnanou hodnotu. Připojíme-li pak orientační konstantu k směru naměřenému při zaměření na hledaný bod, dostaneme t. zv. orientovaný směrník S_{01} s bodu (x_1; y_1) na hledaný bod (x; y).

Nyní vypočteme přibližné souřadnice x_0, y_0 hledaného bodu ze dvou orientovaných směrů, a to takto: Ze souřadnic (x_1; y_1), (x_2; y_2), z nichž oba orientované směry vycházejí, vypočteme vzdálenost těchto dvou bodů $s_{12} = \dfrac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \dfrac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}}$, pak ze sinové věty určíme strany s_{10}, s_{20} a konečně ze vzorců

$$x_0 - x_1 = s_{10} \cos S_{01}, \; y_0 - y_1 = s_{10} \sin S_{01},$$

nebo

$$x_0 - x_2 = s_{20} \cos S_{02}, \; y_0 - y_2 = s_{20} \sin S_{02}$$

přibližné souřadnice x_0, y_0 hledaného bodu a ze vzorce

$$\operatorname{tg} \sigma'_i = \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}$$

přibližné hodnoty směrníků σ'_i z daných bodů na hledaný. Dále uvážíme, že pro definitivní směrník σ_i bude

$$\operatorname{tg} \sigma_i = \frac{y_0 + \Delta y - y_i}{x_0 + \Delta x - x_i},$$

kde Δx, Δy jsou hledané opravy přibližných souřadnic.

Odtud

$$\sigma_i = \operatorname{arctg} \frac{y_0 + \Delta y - y_i}{x_0 + \Delta x - x_i},$$

a rozvineme-li v řadu Taylorovu,

$$\sigma_i = \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} + a_i \Delta x + b_i \Delta y = \sigma'_i + a_i \Delta x + b_i \Delta y,$$

kde

$$a_i = -\frac{y_0 - y_i}{s_{i0}{}^2}, \qquad b_i = \frac{x_0 - x_i}{s_{i0}{}^2};$$

při tom s_{i0} je délka strany mezi bodem $(x_i; y_i)$ a $(x_0; y_0)$.

Protože definitivní směrník σ_i se má rovnati orientovanému směrníku S_{0i}, dojdeme k odchylkovým rovnicím

$$\sigma_i - S_{oi} = a_i \Delta x + b_i \Delta y + l_i = v_i,$$

kde

$$l_i = \sigma'_i - S_{oi}.$$

Z těchto odchylkových rovnic podle methody nejmenších čtverců vypočteme neznámé Δx, Δy a jejich střední chyby.