IV.

VYROVNÁNÍ ZÁVISLÝCH MĚŘENÍ.

1. Vyrovnání závislých měření (převedením na vyrovnání zprostředkujících měření). Uvažujme o této úloze: Neznámé $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$, pro něž jsme naměřili hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_\varrho$, mají přesně splňovati σ podmínek

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0,\ f_2(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0,\ \ldots,$$
$$f_\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0;\ (\varrho > \sigma). \tag{1}$$

Obyčejně známe předem, nebo získáme předem, přibližné hodnoty neznámých $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}$, takže

$$X_1 = x_{10} + x_1,\ X_2 = x_{20} + x_2,\ \ldots,\ X_\varrho = x_{\varrho 0} + x_\varrho.$$

O opravách $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ předpokládáme, že jsou tak malé, že lze zanedbati již členy obsahující jejich součiny a čtverce, Pak z měření plyne ϱ rovnic $X_j - M_j = x_{j0} + x_j - M_j = 0$. čili

$$x_j - l_j = 0, \text{ kde } l_j = M_j - x_{j0},\ j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{2}$$

Místo podmínek (1) můžeme psáti přibližně

$$f_g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}) + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_\varrho}\right)_0 x_\varrho = 0,$$

nebo

$$a_{g1}x_1 + a_{g2}x_2 + \cdots + a_{g\varrho}x_\varrho = a_{g0},\ g = 1, 2, \ldots, \sigma, \tag{3}$$

kde

$$a_{gj} = \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_j}\right)_0,\ a_{g0} = -f_g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}).$$

Rovnice (3) mají býti splněny přesně, proto nejsou všechny neznámé nezávislé. Z rovnic (3) můžeme vyjádřiti na př. $x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$ jako lineární funkce neznámých $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$, jejichž počet je $\varrho - \sigma$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \dots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10},\\
x_2 &= A_{21}x_{\sigma+1} + A_{22}x_{\sigma+2} + \dots + A_{2,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{20},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_\sigma &= A_{\sigma 1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma 2}x_{\sigma+2} + \dots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma 0}.
\end{aligned}
\tag{3'}
$$

Máme tedy určiti $\varrho - \sigma$ nezávislých neznámých tak, aby bylo splněno pokud možno přesně ϱ rovnic:

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \dots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10} - l_1 &= 0,\\
A_{21}x_{\sigma+1} + A_{22}x_{\sigma+2} + \dots + A_{2,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{20} - l_2 &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
A_{\sigma 1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma 2}x_{\sigma+2} + \dots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma 0} - l_\sigma &= 0,\\
x_{\sigma+1} - l_{\sigma+1} &= 0,\\
x_{\sigma+2} - l_{\sigma+2} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots&\\
x_\varrho - l_\varrho &= 0.
\end{aligned}
\tag{2'}
$$

Protože počet nezávislých neznámých $(\varrho - \sigma)$ je menší než počet těchto rovnic (ϱ), nebude obecně lze nalézti takové hodnoty $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \dots, x_\varrho$, aby všechny rovnice (2′) byly splněny. Ať dosadíme za $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \dots, x_\varrho$ jakékoli hodnoty, budou levé strany rovnic (2′) rovny malým veličinám v_j. Tedy

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \dots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10} - l_1 &= v_1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
A_{\sigma 1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma 2}x_{\sigma+2} + \dots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma 0} - l_\sigma &= v_\sigma,\\
x_{\sigma+1} - l_{\sigma+1} &= v_{\sigma+1},\\
\dots\dots\dots\dots&\\
x_\varrho - l_\varrho &= v_\varrho.
\end{aligned}
\tag{2''}
$$

Předpokládejme, že váha j-té rovnice je p_j. Hodnoty vah odhadujeme v tomto případě obyčejně podle středních chyb měřených veličin M_j, vypočtených přímo z měření, nebo podle výsledků podobných měření dřívějších. Máme-li důvod k úsudku, že váhy jsou stejné, klademe je obyčejně rovné 1.

Tím bylo převedeno vyrovnání závislých měření na vyrovnání zprostředkujících měření. Vyrovnané hodnoty $x'_{\sigma+1}$,

$x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$ určíme jako v kap. III tak, aby byl minimální součet $\sum_{j=1}^{\varrho} p_j v_j^2$. Z podmínek pro minimum (derivace podle neznámých $x'_{\sigma+1}, x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$ mají býti rovny nule) plyne $\varrho - \sigma$ normálních rovnic, z nichž vypočteme nezávislé neznámé $x'_{\sigma+1}, x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$. Dosadíme-li tyto vypočtené hodnoty za $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$ do rovnic (3'), dostaneme vyrovnané hodnoty $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\sigma$.

Střední chyba pro jednotku váhy plyne stejně jako v kap. III ze vzorce (20")

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{\varrho - (\varrho - \sigma)}} = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{\sigma}}. \tag{4}$$

Lomená závorka značí součet členů $p_j v_j^2$ pro všechny hodnoty indexu $j = 1, 2, \ldots, \varrho$.

2. **Vyrovnání závislých měření** užitím korelát. Často se však užívá při výpočtu vyrovnaných hodnot $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ jiného postupu.*) Tyto hodnoty mají činiti součet

$$\sum_{j=1}^{\varrho} p_j v_j^2 = \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)^2$$

minimem a při tom mají přesně splňovati podmínky (3).

Podmínka minima jest

$$2 \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)\, \mathrm{d}x'_j = 0. \tag{5}$$

Ale protože veličiny $x'_1, \ldots, x'_\varrho$ musí přesně splňovati rovnice (3), nejsou přírůstky $\mathrm{d}x'_j$ nezávislé, nýbrž musí vyhovovati σ podmínkám

$$a_{g1}\,\mathrm{d}x'_1 + a_{g2}\,\mathrm{d}x'_2 + \ldots + a_{g\varrho}\,\mathrm{d}x'_\varrho = 0, \quad g = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{6}$$

Z těchto rovnic a z podmínky (5) vyloučíme σ závislých pří-

*) J. Vojtěch, l. c. I, str. 411—413. — K. Petr, l. c. str. 414—418.

růstků a položíme koeficienty u nezávislých přírůstků rovny nule.

Předpokládejme, že na př. determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\sigma} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\sigma} \\ \vdots \\ a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Násobme rovnice (6) po řadě koeficienty $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_\sigma$, a odečtěme je od rovnice (5). Bude

$$\sum_{j=1}^{\varrho} \{p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j}\} \, \mathrm{d}x'_j = 0.$$

Určeme tak koeficienty $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, kterým se říká korelá ty, aby faktory u $\mathrm{d}x'_1, \ldots, \mathrm{d}x'_\sigma$ byly rovny nule. To je za uvedeného předpokladu o determinantu Δ možné.

Pak ale zbývá podmínka

$$\sum_{j=\sigma+1}^{\varrho} \{p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j}\} \, \mathrm{d}x'_j = 0,$$

a protože přírůstky $\mathrm{d}x'_{\sigma+1}, \ldots, \mathrm{d}x'_\varrho$ jsou nezávislé, musí jejich koeficienty býti rovněž rovny nule.

Celkem tedy musí býti

$$p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{7}$$

Levé strany těchto podmínek jsou parciální derivace funkce

$$\begin{aligned} F = {} & p_1 (x_1 - l_1)^2 + p_2 (x_2 - l_2)^2 + \ldots + p_\varrho (x_\varrho - l_\varrho)^2 - \\ & - 2k_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1\varrho} x_\varrho - a_{10}) - \\ & - 2k_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2\varrho} x_\varrho - a_{20}) - \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2k_\sigma (a_{\sigma 1} x_1 + a_{\sigma 2} x_2 + \ldots + a_{\sigma\varrho} x_\varrho - a_{\sigma 0}). \end{aligned} \tag{8}$$

Podmínky (7) tedy vypočteme, anulujeme-li parciální derivace prvního řádu funkce F podle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$.

Zvolíme-li za přibližné hodnoty pro neznámé $x'_1, \ldots, x'_\varrho$ naměřené hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_\varrho$, jest $x_{j0} = M_j$, tedy $l_j = 0$.

Z rovnic (7) plyne

$$x'_j = \frac{1}{p_j} \sum_{g=1}^{\sigma} k_g a_{gj} + l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{7'}$$

Tyto vzorce vyjadřují neznámé $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ pomocí korelát $k_1, \ldots, k_\sigma$. Dosadíme-li odtud za x'_j do první z rovnic (3), plyne

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{11}}{p_1}(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{\sigma 1}k_\sigma + l_1p_1) + \\
&+ \frac{a_{12}}{p_2}(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{\sigma 2}k_\sigma + l_2p_2) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{a_{1\varrho}}{p_\varrho}(a_{1\varrho}k_1 + a_{2\varrho}k_2 + \ldots + a_{\sigma\varrho}k_\sigma + l_\varrho p_\varrho) - a_{10} = 0,
\end{aligned}$$

a uspořádáme-li jako lineární funkci korelát $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, bude

$$k_1\left[\frac{a_{1j}^2}{p_j}\right] + k_2\left[\frac{a_{1j}a_{2j}}{p_j}\right] + \ldots + k_\sigma\left[\frac{a_{1j}a_{\sigma j}}{p_j}\right] - a_{10} + [a_{1j}l_j] = 0.$$

Aby se vzorce zjednodušily, zavedeme pro převrácenou hodnotu vah značku $q_j = 1 : p_j$ a vynecháme druhý index j, podle něhož se tvoří součty naznačené lomenou závorkou. Pak bude předcházející rovnice a ostatní rovnice, které plynou, dosadíme-li do dalších rovnic (3):

$$\begin{aligned}
&k_1[qa_1^2] + k_2[qa_1a_2] + \ldots + k_\sigma[qa_1a_\sigma] - a_{10} + [a_1l] = 0, \\
&k_1[qa_2a_1] + k_2[qa_2^2] + \ldots + k_\sigma[qa_2a_\sigma] - a_{20} + [a_2l] = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&k_1[qa_\sigma a_1] + k_2[qa_\sigma a_2] + \ldots + k_\sigma[qa_\sigma^2] - a_{\sigma 0} + [a_\sigma l] = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Zvolíme-li $x_{j0} = M_j$, bude $l_j = 0$ a v rovnicích (9) odpadnou členy $[a_1l] = [a_2l] = \ldots = [a_\sigma l] = 0$.

Těmto rovnicím se říká normální rovnice pro koreláty. Z nich vypočteme koreláty na př. Gaussovým postupem (III, 2). Pak ze vzorců (7′) plynou neznámé x'_1, x'_2, ..., x'_ϱ.

Výpočet normálních rovnic (9) pro koreláty se zase kontroluje součtovou kontrolou. Připojíme ke koeficientům z rovnic (3), t. j. k číslům

$$\begin{array}{c} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\varrho}, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\varrho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma\varrho}, \end{array} \tag{10}$$

součty jednotlivých sloupců, $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$, takže je

$$s_1 = \sum_{g=1}^{\sigma} a_{g1}, \quad s_2 = \sum_{g=1}^{\sigma} a_{g2}, \quad \text{atd.}$$

Násobíme-li na př. sloupce (10) po řadě čísly $q_1 a_{11}, q_2 a_{12}, \ldots$ $q_\varrho a_{1\varrho}$, budou součty v jednotlivých řádcích $[qa_1^2]$, $[qa_1a_2]$, ..., $[qa_1a_\sigma]$, $[qa_1s]$, a při tom

$$[qa_1s] = [qa_1^2] + [qa_1a_2] + \cdots + [qa_1a_\sigma].$$

Tak jsou kontrolovány koeficienty první normální rovnice pro koreláty. Podobně se kontrolují i koeficienty ostatních normálních rovnic, pro něž

$$\begin{gathered} [qa_2s] = [qa_2a_1] + [qa_2^2] + \cdots + [qa_2a_\sigma], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [qa_\sigma s] = [qa_\sigma a_1] + [qa_\sigma a_2] + \cdots + [qa_\sigma^2]. \end{gathered}$$

Koreláty $k_{\sigma-1}, k_{\sigma-2}, \ldots, k_1$ se počítají vždy ze dvou různých redukovaných rovnic. Tím ověříme správnost výpočtu korelát. Správnost výpočtu neznámých $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ ze vzorců (7′) ověříme, dosadíme-li vypočtené hodnoty do podmínek (3).

3. Výpočet součtu [*pvv*]. a) Součet $[pvv]$, kterého potřebujeme k výpočtu střední chyby m_0 pro jednotku váhy, můžeme počítati přímo z hodnot x'_j; vypočteme odchylky $v_j = x'_j - l_j$, čtverce v_j^2, pak součiny $p_j v_j^2$ a utvoříme součet pro všechna $j = 1, 2, \ldots, \varrho$.

b) Nepřímá cesta.

α) Užijeme-li vzorce (7), můžeme psáti

$$[pvv] = \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\varrho} (k_1 a_{1j} + \ldots + k_\sigma a_{\sigma j}) \cdot q_j (k_1 a_{1j} + \ldots + k_\sigma a_{\sigma j}) =$$

$$= k_1 \{k_1 [qa_1a_1] + k_2 [qa_1a_2] + \ldots + k_\sigma [qa_1a_\sigma]\} +$$

$$+ k_2 \{k_1 [qa_2a_1] + k_2 [qa_2a_2] + \ldots + k_\sigma [qa_2a_\sigma]\} + \ldots +$$

$$+ k_\sigma \{k_1 [qa_\sigma a_1] + k_2 [qa_\sigma a_2] + \ldots + k_\sigma [qa_\sigma a_\sigma]\}.$$

Užijeme-li rovnic (9) a položíme-li $l_j = 0$, bude

$$[pvv] = a_{10}k_1 + a_{20}k_2 + \ldots + a_{\sigma 0}k_\sigma. \qquad (11)$$

Můžeme tedy počítati součet $[pvv]$ podle vzorce (11) z hodnot korelát.

β) Podobně jako ve výpočtu $[pvv]$ (viz III, 6), můžeme vyloučiti koreláty ze vzorce (11) a z normálních rovnic (9). V tomto případě je místo $[pll]$ nyní 0, místo koeficientů $-[pal]$, $-[pbl]$, $-[pcl]$ atd. je nyní $+a_{10}$, $+a_{20}$, $+a_{30}$, ..., místo $[paa]$ je nyní $[qa_1a_1]$, (t. j. koeficient u k_1 v první z rovnic (9)), místo $[pbb \,.\, 1]$, $[pbl \,.\, 1]$ nyní $[qa_2a_2 \,.\, 1]$, $[a_{20} \,.\, 1]$ (koeficient u k_2 a prostý člen v první redukované rovnici prvního řádu) a místo $[pcc \,.\, 2]$, $[pcl \,.\, 2]$ nyní $[qa_3a_3 \,.\, 2]$, $[a_{30} \,.\, 2]$ (koeficient u k_3 a prostý člen v první redukované rovnici druhého řádu).

Pak podle vzorce [III, (22)] plyne

$$[pvv] = \frac{a_{10}^2}{[qa_1a_1]} + \frac{[a_{20} \,.\, 1]^2}{[qa_2a_2 \,.\, 1]} + \frac{[a_{30} \,.\, 2]^2}{[qa_3a_3 \,.\, 2]} + \ldots \qquad (11')$$

z koeficientů a prostých členů normálních a redukovaných rovnic.

4. Střední chyba lineární funkce vyrovnaných hodnot. Chceme vypočísti střední chybu funkce $\Phi = f_0 + f_1 x'_1 + f_2 x'_2 + \ldots + f_\varrho x'_\varrho$. K tomu cíli musíme vyjádřiti Φ jako lineární funkci měřených veličin M_i nebo veličin l_i. Bude

$$\Phi = f_0 + \sum_{j=1}^{\varrho} f_j x'_j = f_0 + \sum_{j=1}^{\varrho} \{f_j q_j \sum_{g=1}^{\sigma} k_g a_{gj} + f_j l_j\} =$$

$$= f_0 + \sum_{g=1}^{\sigma} k\,[q a_g f] + [fl].$$

Zavedeme veličiny $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, které splňují rovnice

$$\begin{array}{l} h_1\,[qa_1a_1] + h_2\,[qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_1a_\sigma] = [qa_1f], \\ h_1\,[qa_2a_1] + h_2\,[qa_2a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_2a_\sigma] = [qa_2f], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1\,[qa_\sigma a_1] + h_2\,[qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_\sigma a_\sigma] = [qa_\sigma f]. \end{array} \qquad (12)$$

Násobíme-li rovnice (9) po řadě čísly $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, sečteme-li a přihlédneme-li k rovnicím (12), dostaneme

$$k_1\,[qa_1f] + k_2\,[qa_2f] + \ldots + k_\sigma\,[qa_\sigma f] = \sum_{g=1}^{\sigma} k_g\,[qa_gf] = a_{10}h_1 +$$
$$+ a_{20}h_2 + \ldots + a_{\sigma 0}h_\sigma - h_1\,[a_1l] - h_2\,[a_2l] - \ldots - h_\sigma\,[a_\sigma l],$$

tedy

$$\Phi = f_0 + a_{10}h_1 + a_{20}h_2 + \ldots + a_{\sigma 0}h_\sigma +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\varrho} (f_j - h_1a_{1j} - h_2a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})\, l_j.$$

Protože střední chyba j-té z rovnic (2) je rovna $m_0 : \sqrt{p_j}$, bude podle vzorce [I, (12″)] čtverec střední chyby funkce Φ roven

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \sum_{j=1}^{\varrho} q_j\,(f_j - h_1a_{1j} - h_2a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})^2. \qquad (13)$$

Vzorec (13) můžeme ještě upraviti takto:

$$\sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}) (f_j - h_1 a_{1j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}) =$$
$$= [qff] - 2h_1 [qfa_1] - 2h_2 [qfa_2] - \ldots - 2h_\sigma [qfa_\sigma] +$$
$$+ h_1 \{h_1 [qa_1a_1] + h_2 [qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_1a_\sigma]\} +$$
$$+ h_2 \{h_1 [qa_2a_1] + h_2 [qa_2a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_2a_\sigma]\} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ h_\sigma \{h_1 [qa_\sigma a_1] + h_2 [qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_\sigma a_\sigma]\}.$$

Užijeme-li vzorců (12) a sloučíme-li, jest

$$\sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})^2 =$$
$$= [qff] - h_1 [qfa_1] - h_2 [qfa_2] - \ldots - h_\sigma [qfa_\sigma],$$

tedy

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2 \{[qff] - h_1 [qfa_1] - h_2 [qfa_2] - \ldots - h_\sigma [qfa_\sigma]\}. \quad (13')$$

Podobně jako v (III, 6) o výpočtu $[pvv]$, můžeme vylučiti veličiny $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ ze vzorce (13′) a z rovnic (12). Jen místo p je nyní q, místo l jest f a místo $a, b, c, \ldots$ je nyní $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Místo vzorce [III, (22)] bude tedy

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2 \left(q[ff] - \frac{[qa_1f]^2}{[qa_1a_1]} - \frac{[qa_2f \,.\, 1]^2}{[qa_2a_2 \,.\, 1]} - \frac{[qa_3f \,.\, 2]^2}{[qa_3a_3 \,.\, 2]} - \ldots \right). \quad (13'')$$

Při tom $[qa_1a_1]$, $[qa_1f]$ jest koeficient u h_1 a prostý člen v první z rovnic (12), $[qa_2a_2 \,.\, 1]$, $[qa_2f \,.\, 1]$ je koeficient u h_2 a prostý člen v příslušné první redukované rovnici prvního řádu, $[qa_3a_3 \,.\, 2]$, $[qa_3f \,.\, 2]$ je koeficient u h_3 a prostý člen v první redukované rovnici druhého řádu atd.

Jde-li na př. o jedinou podmínku

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\varrho}x_\varrho = a_{10},$$

bude také jediná veličina h_1 a příslušná rovnice (12) jest

$$h_1 [qa_1a_1] = [qa_1f],$$

takže čtverec střední chyby lineární funkce vyrovnaných hodnot $\Phi = f_0 + f_1 x'_1 + f_2 x'_2 + \ldots + f_\varrho x'_\varrho$ bude podle vzorce (13') nebo (13") roven

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ [qff] - \frac{[qa_1 f]^2}{[qa_1 a_1]} \right\}. \tag{14}$$

Nechť jde o σ podmínek tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 + y'_1 + z'_1 &= a_{10}, \\ x'_2 + y'_2 + z'_2 &= a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ x'_\sigma + y'_\sigma + z'_\sigma &= a_{\sigma 0}; \end{aligned} \tag{15}$$

váhy měřených veličin označíme $p_1, p'_1, p''_1; p_2, p'_2, p''_2; \ldots; p_\sigma, p'_\sigma, p''_\sigma$. Chceme určiti střední chybu výrazu

$$\Phi = f_0 + \sum_{g=1}^{\sigma} (f_g x'_g + f'_g y'_g + f''_g z''_g).$$

Zavedeme čísla $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, která splňují rovnice (12),

$$h_g (q_g + q'_g + q''_g) = (q_g f_g + q'_g f'_g + q''_g f''_g), \quad g = 1, 2, \ldots, \sigma.$$

Pak ze vzorce (13') plyne

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{\sigma} \left\{ (q_g f_g^2 + q'_g f'^2_g + q''_g f''^2_g) - \frac{(q_g f_g + q'_g f'_g + q''_g f''_g)^2}{(q_g + q'_g + q''_g)} \right\}. \tag{15'}$$

Chceme ještě vypočísti, jaká je průměrná hodnota poměru váhy měřené hodnoty k váze vyrovnané hodnoty. Označíme váhu měřené hodnoty M_j písmenem p_j a váhu (střední chybu) vyrovnané hodnoty x'_j písmenem P_j (m_j). Máme tedy určiti průměrnou hodnotu $\dfrac{1}{\varrho} \sum\limits_{j=1}^{\varrho} \dfrac{p_j}{P_j}$.

Protože $\dfrac{1}{P_j} = \dfrac{m_j^2}{m_0^2}$ a podle vzorce (13') jest

$$\frac{m_j^2}{m_0^2} = q_j - h_1 q_j a_{1j} - h_2 q_j a_{2j} - \ldots - h_\sigma q_j a_{\sigma j},$$

bude

$$\frac{p_j}{P_j} = 1 - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j},$$

a

$$\sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \varrho - \sum_{j=1}^{\varrho} h_1 a_{1j} - \sum_{j=1}^{\varrho} h_2 a_{2j} - \ldots - \sum_{j=1}^{\varrho} h_\sigma a_{\sigma j}.$$

Při tom podle vzorců (12) jest

$$\begin{aligned}
h_1[qa_1a_1] + h_2[qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma[qa_1a_\sigma] &= q_j a_{1j},\\
h_1[qa_2a_1] + h_2[qa_2a_2[+ \ldots + h_\sigma[qa_2a_\sigma] &= q_j a_{2j},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
h_1[qa_\sigma a_1] + h_2[qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma[qa_\sigma a_\sigma] &= q_j a_{\sigma j}.
\end{aligned}$$

Odtud na př.

$$h_1 a_{1j} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} q_j a_{1j} a_{1j}, & [qa_1a_2], & \ldots, & [qa_1a_\sigma] \\ q_j a_{2j} a_{1j}, & [qa_2a_2], & \ldots, & [qa_2a_\sigma] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_j a_{\sigma j} a_{1j}, & [qa_\sigma a_2], & \ldots, & [qa_\sigma a_\sigma] \end{vmatrix},$$

kde Δ' je determinant předcházející soustavy lineárních rovnic; tedy

$$\sum_{j=1}^{\varrho} h_1 a_{1j} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} [qa_1a_1], & [qa_1a_2], & \ldots, & [qa_1a_\sigma] \\ [qa_2a_1], & [qa_2a_2], & \ldots, & [qa_2a_\sigma] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [qa_\sigma a_1], & [qa_\sigma a_2], & \ldots, & [qa_\sigma a_\sigma] \end{vmatrix} = 1.$$

Podobně

$$\sum_{j=1}^{\varrho} h_2 a_{2j} = 1, \ldots, \quad \sum_{j=1}^{\varrho} h_\sigma a_{\sigma j} = 1, \text{ tedy } \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \varrho - \sigma.$$

Počet sčítanců $p_j : P_j$ jest ϱ. Průměrná hodnota poměru váhy měřené hodnoty k váze vyrovnané hodnoty jest tedy

$$\frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \frac{\varrho - \sigma}{\varrho}. \tag{16}$$

5. Příklady na vyrovnání závislých měření. 1. V trojúhelníku ABC byly měřeny úhly $A = 61^\circ\, 07'\, 52{,}00''$, $B = 76^\circ\, 50'\, 54{,}00''$, $C = 42^\circ\, 01'\, 12{,}15''$. Jejich váhy jsou po řadě 3, 2, 2, sférický excess $\varepsilon' = 2{,}11''$. Provésti vyrovnání.

Označíme-li opravy úhlů x_1, x_2, x_3, má býti $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ minimální a při tom má býti přesně splněna podmínka

$$x_1 + x_2 + x_3 = + 3{,}96''. \tag{17}$$

Funkce

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 + x_3 - 3{,}96'')$$

nabude minima, když

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0,$$

tedy když

$$3x'_1 = k_1,\; 2x'_2 = k_1,\; 2x'_3 = k_1;$$

dosadíme-li do rovnice (17), bude $k_1\,(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = +3{,}96''$. To je normální rovnice, kterou bychom mohli přímo napsati podle první z rovnic (9): $k_1\,[qa_1a_1] = a_{10}$. Odtud $k_1 = 2{,}97''$.

Pak

$$x'_1 = \tfrac{1}{3}k_1 = + 0{,}990'',\; x'_2 = \tfrac{1}{2}k_1 = + 1{,}485'' = x'_3.$$

Vyrovnané úhly budou:

$$\begin{aligned} A + x'_1 &= 61^\circ\, 07'\, 52{,}990'',\\ B + x'_2 &= 76^\circ\, 50'\, 55{,}485'',\\ C + x'_3 &= 42^\circ\, 01'\, 13{,}635''. \end{aligned}$$

Střední chyba pro jednotku váhy je $m_0 = \pm\sqrt{[pvv] : 1}$, kde $v_j = x'_j$, tedy $[pvv] = 3x'^2_1 + 2x'^2_2 + 2x'^2_3 = 11{,}7611$. Podle vzorce (11) je $[pvv] = a_{10}k_1 = + 3{,}96'' \,.\, 2{,}97'' = 11{,}7612$. Pak $m_0 = \pm\, 3{,}43''$.

Čtverec střední chyby pro x_1 je podle vzorce (14), do něhož dosadíme $f_0 = f_2 = \ldots = f_\varrho = 0$ a $f_1 = 1$, roven

$$m_{x_1}^2 = m_0^2 \left\{ q_1 - \frac{q_1^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\} = m_0^2\, \frac{q_1\,(q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3},$$

odtud

$$m_{x_1}^2 = \tfrac{1}{4} m_0^2, \quad m_{x_1} = \pm\, 1{,}72''.$$

Podobně je

$$m_y^2 = m_0^2\, \frac{q_2(q_2+q_3)}{q_1+q_2+q_3}, \qquad m_y = \tfrac{1}{4} m_0 \sqrt{5} = \pm\, 1{,}92'' = m_z.$$

To jsou střední chyby vyrovnaných úhlů uvažovaného trojúhelníka.

Můžeme je vypočísti také přímo takto: Jsou-li ΔA, ΔB, ΔC skutečné chyby úhlů A, B, C a tedy

$$k_1 = \frac{180^\circ + \varepsilon' - A - B - C}{q_1 + q_2 + q_3},$$

bude skutečná chyba ve vyrovnaném úhlu $A + x'_1$ rovna

$$\Delta A - \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{q_1 + q_2 + q_3}\, q_1 =$$

$$= \frac{(q_2 + q_3)\,\Delta A - q_1\,\Delta B - q_1\,\Delta C}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

A protože střední hodnoty $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ jsou $\frac{m_0}{\sqrt{p_1}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{p_2}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{p_3}}$ čili $m_0\sqrt{q_1}$, $m_0\sqrt{q_2}$, $m_0\sqrt{q_3}$, bude čtverec střední chyby vyrovnaného úhlu $A + x'_1$ roven podle vzorce [I, (12″)]

$$\frac{m_0^2}{(q_1 + q_2 + q_3)^2}\left[(q_2 + q_3)^2 q_1 + q_1^2 q_2 + q_1^2 q_3\right] =$$

$$= m_0^2\, \frac{q_1(q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Podobně jest čtverec střední chyby pro vyrovnaný úhel $B + x'_2$ roven

$$m_0^2\, \frac{q_2(q_1 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}$$

a pro úhel $C + x'_3$ jest

$$m_0^2 \frac{q_3(q_1+q_2)}{q_1+q_2+q_3}.$$

Váhy vyrovnaných úhlů jsou po řadě rovny

$$\frac{q_1+q_2+q_3}{q_1(q_2+q_3)}, \quad \frac{q_1+q_2+q_3}{q_2(q_1+q_3)}, \quad \frac{q_1+q_2+q_3}{q_3(q_1+q_2)}.$$

V uvažovaném zvláštním případě budou rovny číslům 4, $\frac{16}{5}$, $\frac{16}{5}$.

2. Na stanovisku bylo měřeno n úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tvořících dohromady plný úhel. Jaká je váha jednotlivých vyrovnaných úhlů, je-li váha každého měřeného úhlu rovna p?

V tomto případě je

$$F = px_1^2 + px_2^2 + \ldots + px_n^2 - \\ - 2k_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_{10}),$$

kde $a_{10} = 360° - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n$. Pak

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{k_1}{p},$$

a dosadíme-li do podmínky $x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n - a_{10} = 0$, bude

$$k_1 = \frac{a_{10}p}{n} \text{ a } x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{a_{10}}{n}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy je

$$m_0 = \pm \sqrt{p(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_n)} = k_1 \sqrt{\frac{n}{p}} = a_{10} \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Abychom vypočetli čtverec střední chyby vyrovnané hodnoty x_j (a vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x_j$), položíme ve vzorci (14) $f_j = 1$ a místo ostatních f klademe 0. Pak

$$m_{x_j}^2 = m_0^2 \left(q_j - \frac{q_j^2}{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}\right) = m_0^2 \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 n}\right) = \\ = m_0^2 \frac{n-1}{pn},$$

tedy

$$m_{x_j} = \pm m_0 \sqrt{\frac{n-1}{pn}} = \pm \frac{a_{10}}{n} \sqrt{n-1}.$$

Váha vyrovnaného úhlu bude $pn:(n-1)$.

Střední chybu vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x'_j$ můžeme počítati také přímo:

$$\alpha_j + x'_j = \alpha_j + \frac{360^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n}{n} =$$

$$= \frac{360^\circ}{n} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\alpha_2}{n} - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\alpha_j -$$

$$- \frac{\alpha_{j+1}}{n} - \ldots - \frac{\alpha_n}{n}.$$

Protože střední chyba jednoho měřeného úhlu je $m_0 : \sqrt{p}$, je střední chyba vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x'_j$ podle vzorce [I, (12″] rovna

$$m_0 \sqrt{\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)}{p} + \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{1}{p}} = m_0 \sqrt{\frac{n-1}{pn}}.$$

3. Mezi body Brest, Greenwich a Paříž byly v r. 1872 určeny tyto rozdíly zeměpisných délek:

Brest—Greenwich	$17^m\, 57{,}154{,}^s$	váha 10,
Greenwich—Paříž ...	$9^m\, 21{,}120{,}^s$	váha 7,
Brest—Paříž	$27^m\, 18{,}190{,}^s$	váha 9.

Určiti jejich vyrovnané hodnoty, jejich střední chyby a váhy nejprve obecně a pak číselně.*)

Označíme délkové rozdíly

$$\omega_{B-G} = \omega_1 + x_1,\ \omega_{G-P} = \omega_2 + x_2,\ \omega_{B-P} = \omega_3 + x_3,$$

má býti

$$\omega_1 + x_1 + \omega_2 + x_2 = \omega_3 + x_3, \text{ tedy } x_1 + x_2 - x_3 = a_{10},$$

*) Wright-Hayford, l. c. str. 166.

kde

$$a_{10} = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 = -0{,}084^s.$$

Funkce

$$F = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 - x_3 - a_{10}),$$

odtud

$$x'_1 = \frac{k_1}{p_1}, \quad x'_2 = \frac{k_1}{p_2}, \quad x'_3 = -\frac{k_1}{p_3}.$$

Dosadíme-li do rovnice

$$x'_1 + x'_2 - x'_3 = a_{10}, \text{ bude } k_1 = \frac{a_{10}}{q_1 + q_2 + q_3},$$

tedy

$$x'_1 = \frac{a_{10} q_1}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad x'_2 = \frac{a_{10} q_2}{q_1 + q_2 + q_3},$$

$$x'_3 = -\frac{a_{10} q_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

V uvažovaném zvláštním případě jest

$k_1 = 0{,}237^s$, $x'_1 = -0{,}024^s$, $x'_2 = -0{,}034^s$, $x'_3 = +0{,}026^s$

a tedy vyrovnané hodnoty délkových rozdílů jsou

$$17^m\ 57{,}130^s;\ 9^m\ 21{,}086^s;\ 27^m\ 18{,}216^s.$$

Střední chyba pro jednotku váhy bude

$$m_0 = \pm \sqrt{p_1 x'^2_1 + p_2 x'^2_2 + p_3 x'^2_3} =$$
$$= \pm \sqrt{1{,}994 \cdot 10^{-2}} = \pm 0{,}141^s.$$

Podle vzorce (11) je

$$[pvv] = a_{10} k_1 = 1{,}991 \cdot 10^{-2}.$$

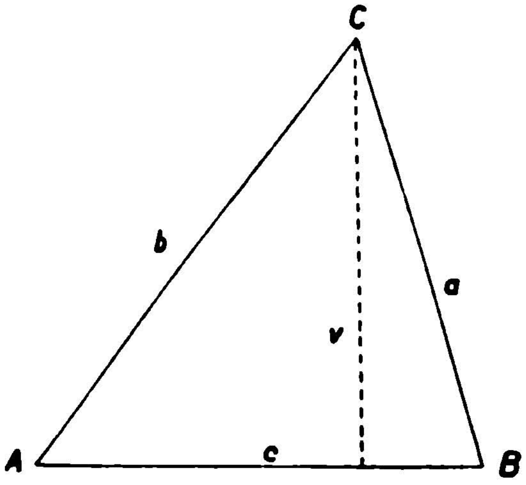
Jako v 1. příkladě jsou střední chyby vyrovnaných veličin x'_1, x'_2, x'_3 rovny

$$m_0 \sqrt{\frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}}, \quad m_0 \sqrt{\frac{q_2 (q_1 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}}, \quad m_0 \sqrt{\frac{q_3 (q_1 + q_2)}{q_1 + q_2 + q_3}}$$

a váhy daných délkových rozdílů jsou

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_1 (q_2 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_2 (q_1 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_3 (q_1 + q_2)}.$$

V uvažovaném číselném příkladě jsou střední chyby $\pm 0{,}038^s$, $\pm 0{,}041^s$, $\pm 0{,}039^s$ a váhy po řadě $\frac{223}{16}$, $\frac{223}{19}$, $\frac{223}{17}$.



obr. 6

4. V trojúhelníku ABC (obr. 6) jsou vnitřní úhly měřeny s vahami p_1, p_2, p_3. Je-li dána délka strany $\overline{AB} = c$, o které předpokládáme, že je bez chyby, a je-li m_0 střední chyba pro jednotku váhy, jaká je relativní střední chyba délky $a = \overline{BC}$ a výšky v_c?

Označíme-li úhly A, B, C a jejich opravy x_1, x_2, x_3, bude jako v 1. příkladě

$$F = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 + x_3 - a_{10}),$$

kde

$$a_{10} = 180 + \varepsilon' - A - B - C.$$

Hledáme především střední chybu veličiny

$$a = \frac{c}{\sin C} \sin A.$$

Jsou-li ΔA, ΔB, ΔC skutečné chyby v úhlech A, B, C a jestliže skutečnou chybu v a označíme Δa, jest

$$\Delta a = \frac{\partial a}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial a}{\partial C} \sin C.$$

A protože

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{c}{\sin C} \cos A = a \operatorname{cotg} A,$$

$$\frac{\partial a}{\partial C} = -\frac{c}{\sin^2 C} \sin A \cos C = -a \operatorname{cotg} C,$$

bude, zavedeme-li zkratky

$$c_1 = \operatorname{cotg} A, \quad c_2 = \operatorname{cotg} B, \quad c_3 = \operatorname{cotg} C,$$

relativní chyba

$$\Phi = \frac{\Delta a}{a} = c_1 \Delta A - c_3 \Delta C.$$

Protože tedy jde o střední chybu výrazu $c_1 x'_1 - c_3 x'_3$, stačí použíti vzorce (14), kde položíme $f_1 = c_1$, $f_2 = 0$, $f_3 = -c_3$. Bude tedy

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ q_1 c_1^2 + q_3 c_3^2 - \frac{(q_1 c_1 - q_3 c_3)^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\}.$$

Pro $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ bude

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ c_1^2 + c_3^2 - \frac{(c_1 - c_3)^2}{3} \right\} = \frac{2m_0^2}{3} (c_1^2 + c_1 c_3 + c_3^2).$$

Jde-li o trojúhelník rovnostranný, je

$$c_1 = c_3 = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a tedy

$$m_\Phi = m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Chceme ještě vyhledati střední relativní chybu ve výšce

$$v_c = \frac{c}{\sin C} \sin A \sin B.$$

V tomto případě je

$$\frac{\Delta v_c}{v_c} = c_1 \Delta A + c_2 \Delta B - c_3 \Delta C.$$

Půjde tedy o střední chybu lineárního výrazu

$$\Phi_1 = c_1 x'_1 + c_2 x'_2 - c_3 x'_3.$$

Užijeme-li zase vzorce (14), bude

$$m_{\Phi_1}^2 = m_0^2 \left\{ q_1c_1^2 + q_2c_2^2 + q_3c_3^2 - \frac{(q_1c_1 + q_2c_2 - q_3c_3)^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\}.$$

Je-li uvažovaný trojúhelník rovnoramenný a měříme-li oba úhly při základně stejně přesně, jest $c_1 = c_2$, $p_1 = p_2$ a tedy

$$m_{\Phi_1}^2 = m_0^2 \left\{ 2q_1c_1^2 + q_3c_3^2 - \frac{(2q_1c_1 - q_3c_3)^2}{2q_1 + q_3} \right\} =$$

$$= m_0^2\, 2q_1q_3 \frac{(c_1 + c_3)^2}{2q_1 + q_3} = m_0^2 \frac{2(c_1 + c_3)^2}{p_1 + 2p_3}.$$

V tomto případě je

$$c_1 = \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg}(90 - \tfrac{1}{2}C) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C,$$

takže

$$c_1 + c_3 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{cotg} C = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \frac{1 - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C}{2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C} = \frac{1}{\sin C},$$

tedy

$$m_{\Phi_1} = \frac{m_0}{\sin C}\sqrt{\frac{2}{p_1 + 2p_3}}.$$

5. Od vrcholu P_0 je veden podél poledníku bodu P_0 řetěz σ trojúhelníků (obr. 7), s vrcholy $P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma+1}$, v nichž byly měřeny všechny úhly se stejnou přesností. Jaká je střední chyba: a) ve straně $s_g = P_gP_{g+1}$; b) v úhlu, který svírá strana s_g s poledníkem bodu P_0; c) v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ čáry $P_0P_1 \ldots P_{\sigma+1}$ do poledníku bodu P_0.*) (Výpočty prováděti jakoby body $P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma+1}$ ležely v rovině.)

Délku P_0P_1 označíme s_0 a předpokládáme o ní, že byla změřena bez chyby. Měřené úhly v g-tém trojúhelníku jsou

*) A. R. Charke: Geodesy, Oxford 1880, str. 225—227.

A_g, B_g, C_g a jejich opravy x_g, y_g, z_g. Podmínka z g-tého trojúhelníka bude

$$x_g + y_g + z_g = a_{g0}, \quad (17')$$

kde

$$a_{g0} = 180^0 - A_g - B_g - C_g.$$

Funkce F je v tomto případě

$$F = \sum_{g=1}^{\sigma} (x_g{}^2 + y_g{}^2 + z_g{}^2) -$$

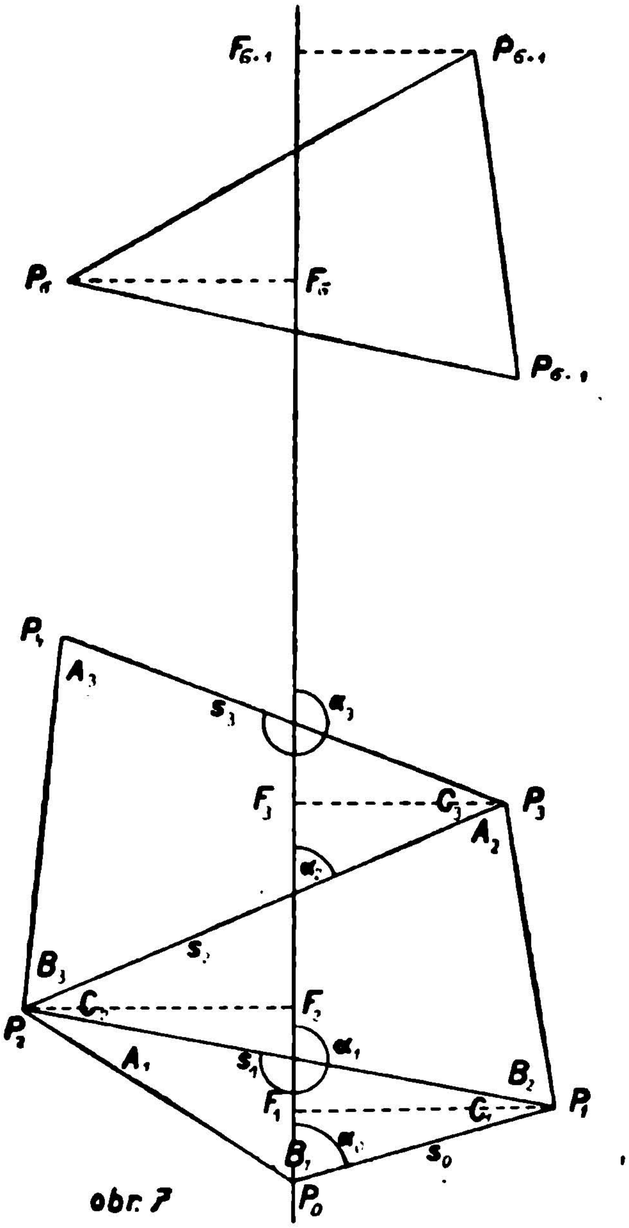
$$- 2k_g (x_g + y_g + z_g - a_{g0}).$$

Anulováním derivací podle x_g, y_g, z_g plyne $x'_g = y'_g = z'_g = k_g$. Dosadíme-li do podmínek (17′), bude

$$y'_g = x'_g = z'_g = \tfrac{1}{3} a_{g0},$$

tedy vyrovnané hodnoty úhlů v g-tém trojúhelníku jsou

$$A_g + x'_g, \; B_g + y'_g, \; C_g + z'_g.$$



obr. 7

Označíme-li střední chybu pro jednotku váhy (t. j. v jednom měřeném úhlu) písmenem m_0, pak podle vzorce (15′), kde klademe na př. $f_g = 1$ a ostatní f rovna 0 a $q_g = q'_g = q''_g = 1$, plyne střední chyba ve vyrovnaném úhlu

$$m_0 \sqrt{q_g - \frac{q_g}{q_g + q'_g + q''_g}} = m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

a) Abychom odvodili vztah mezi skutečnými chybami $\Delta A_i, \Delta B_i, i = 1, 2, \ldots, g$ a příslušnou skutečnou chybou strany s_g, vyjdeme z věty sinové

$$s_g = s_0 \frac{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_g}{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_g}.$$

A_1 jest úhel proti dané straně s_0, B_1 proti první hledané straně s_1 atd.

Ze změněných hodnot úhlů bychom vypočetli

$$s_g + \Delta s_g = s_0 \frac{\sin(B_1+\Delta B_1)\sin(B_2+\Delta B_2)\ldots\sin(B_g+\Delta B_g)}{\sin(A_1+\Delta A_1)\sin(A_2+\Delta A_2)\ldots\sin(A_g+\Delta A_g)}.$$

Logaritmováním plyne odtud

$$\log(s_g + \Delta s_g) - \log s_0 = \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin(B_i + \Delta B_i) - \\ - \log\sin(A_i + \Delta A_i)\}$$

a z předcházející rovnice

$$\log s_g - \log s_0 = \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin B_i - \log\sin A_i\},$$

tedy

$$\log(s_g + \Delta s_g) - \log s_g = \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin(B_i+\Delta B_i) - \log\sin B_i\} - \\ - \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin(A_i + \Delta A_i) - \log\sin A_i\}.$$

Rozdíl

$$\log(s_g + \Delta s_g) - \log s_g = M \log\frac{s_g + \Delta s_g}{s_g} = \\ = M \log\left(1 + \frac{\Delta s_g}{s_g}\right) \doteq M \,.\, \frac{\Delta s_g}{s_g}.$$

Označíme-li značkami δA_i, δB_i tabulkové diference pro log sin a jednu vteřinu v místě A_i, resp. B_i, jest

$$\log\sin(B_i + \Delta B_i) - \log\sin B_i \doteq \Delta B_i\, \delta B_i$$

a

$$\log\sin(A_i + \Delta A_i) - \log\sin A_i \doteq \Delta A_i\, \delta A_i,$$

tedy

$$\frac{\Delta s_g}{s_g} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{g}(\Delta B_i\, \delta B_i - \Delta A_i\, \delta A_i).$$

Půjde tedy o střední chybu výrazu

$$\Phi = \frac{\Delta s_g}{s_g} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{g}(y'_i\, \delta B_i - x'_i\, \delta A_i).$$

Užijeme zase vzorce (15′), v němž klademe

$$q_g = q'_g = q''_g = 1,\ f_g = -\delta A_i,\ f'_g = +\delta B_i,\ f''_g = 0.$$

Pak

$$m_\Phi{}^2 = \frac{m_0{}^2}{M^2}\sum_{i=1}^{g}\left\{\delta A_i^2 + \delta B_i^2 - \frac{(-\delta A_i + \delta B_i)^2}{3}\right\} =$$

$$= \frac{m_0{}^2}{M^2}\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{g}(\delta A_i^2 + \delta A_i\, \delta B_i + \delta B_i^2).$$

Tedy střední relativní chyba ve straně s_g jest

$$\frac{m_0}{M}\sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{g}(\delta A_i^2 + \delta A_i\, \delta B_i + \delta B_i^2)}. \tag{18}$$

Při tom ΔA_i, ΔB_i, ΔC_i a tedy i m_0 značí počet vteřin, tedy prostá čísla.

b) Označíme-li úhel, který svírá strana s_0 s poledníkem bodu P_0, písmenem α_0 (azimut bodu P_1, čítaný od severu přes východ na západ), bude

azimut směru P_1P_2 roven $\alpha_1 = 180° + \alpha_0 + C_1$,
azimut směru P_2P_3 jest $\alpha_2 = -180° + \alpha_1 - C_2$,
azimut směru P_3P_4 jest $\alpha_3 = 180° + \alpha_2 + C_3$,
azimut směru P_4P_5 jest $\alpha_4 = -180° + \alpha_3 - C_4$,
. . . .

azimut směru P_gP_{g+1} jest

$$\alpha_g = (-1)^{g-1}\, 180° + \alpha_{g-1} + (-1)^{g-1}\, C_g.$$

Odtud

$$\alpha_g = \begin{cases} 0° \\ 180° \end{cases} + \alpha_0 + C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{g-1} C_g.$$

Ve vzorci klademe $\begin{cases} 0° \\ 180° \end{cases}$, je-li $g \begin{cases} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{cases}$.

Předpokládáme-li, že azimut první strany (α_0) byl změřen bez chyby, bude skutečná chyba v α_g rovna

$$\Delta\alpha_g = \Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g.$$

Půjde tedy o střední chybu výrazu

$$\Phi_1 = z'_1 - z'_2 + \ldots + (-1)^{g-1} z'_g,$$

a užijeme-li vzorce (15'), plyne

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left(\tfrac{2}{3} g\right);$$

střední chyba v α_g bude proto rovna

$$m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3} g}.$$

c) Průmět

$$P_0F_{\sigma+1} = s_0 \cos \alpha_0 + s_1 \cos \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \cos \alpha_\sigma.$$

Skutečná chyba v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ je rovna

$$\sum_{g=1}^{\sigma} (\Delta s_g \cos \alpha_g - s_g \sin \alpha_g \, \Delta\alpha_g).$$

Viděli jsme, že

$$\Delta s_g = \frac{s_g}{M} \sum_{i=1}^{g} (\delta B_i \, \Delta B_i - \delta A_i \, \Delta A_i),$$

$$\Delta\alpha_g = \Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g,$$

tedy skutečná chyba v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ je

$$\sum_{g=1}^{\sigma} \left\{ \frac{s_g \cos \alpha_g}{M} \sum_{i=1}^{g} \delta B_i \, \Delta B_i - \delta A_i \, \Delta A_i - \right.$$

$$\left. - s_g \sin \alpha_g \, (\Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g) \right\}.$$

Označíme délky průmětů od F_1 do $F_{\sigma+1}$, t. j. $s_1 \cos \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \cos \alpha_\sigma$ písmenem $\overline{P}_\sigma$ a délky průmětů do přímky kolmé k poledníku, t. j. $s_1 \sin \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \sin \alpha_\sigma$, písmenem $\overline{Q}_\sigma$ (pro $\sigma = 1, 2, \ldots, \sigma$). Pak můžeme psáti skutečnou chybu v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$:

$$(\delta B_1 \Delta B_1 - \delta A_1 \Delta A_1) \frac{\overline{P}_\sigma}{M} + (\delta B_2 \Delta B_2 - \delta A_2 \Delta A_2) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_1}{M} +$$
$$+ (\delta B_3 \Delta B_3 - \delta A_3 \Delta A_3) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_2}{M} + \ldots +$$
$$+ (\delta B_\sigma \Delta B_\sigma - \delta A_\sigma \Delta A_\sigma) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_{\sigma-1}}{M} - \overline{Q}_\sigma \Delta C_1 +$$
$$+ (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_1) \Delta C_2 - (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_2) \Delta C_3 +$$
$$+ \ldots - (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_{\sigma-1}) (-1)^{\sigma-1} \Delta C_\sigma.$$

Půjde tedy zde o střední chybu výrazu

$$\Phi_2 = (-x'_1 \delta A_1 + y'_1 \delta B_1) \frac{\overline{P}_\sigma}{M} - z'_1 \overline{Q}_\sigma +$$
$$+ (-x'_2 \delta A_2 + y'_2 \delta B_2) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_1}{M} + z'_2 (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_1) +$$
$$+ (-x'_3 \delta A_3 + y'_3 \delta B_3) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_2}{M} - z'_3 (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_2) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (-x'_\sigma \delta A_\sigma + y'_\sigma \delta B_\sigma) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_{\sigma-1}}{M} -$$
$$- z'_\sigma (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_{\sigma-1}) (-1)^{\sigma-1}.$$

Protože $q_g = q'_g = q''_g = 1$, bude podle vzorce (15'):

$$m_{\Phi_2}^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{\sigma} \left\{ (f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g) - \frac{(f_g + f'_g + f''_g)^2}{3} \right\}.$$

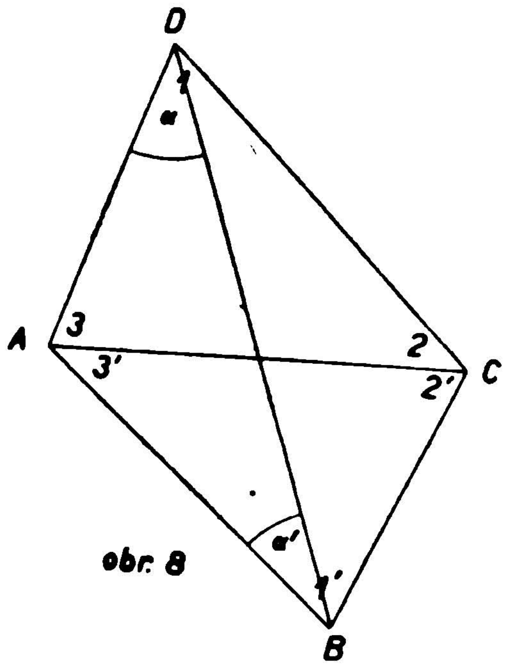
Další výpočet se doporučuje prováděti číselně.

6. V řetězci pěti podobných rovnoramenných trojúhelníků, v nichž úhly při vrcholech jsou 38° a úhly při základně 71°, je dána základna s_0 prvního trojúhelníka. Je-li m_0 střední chyba jednoho měřeného úhlu a předpokládáme-li, že byly měřeny všechny úhly v trojúhelnících a že byly vyrovnány, jaká je relativní střední chyba strany s_5?

Podle vzorce (18) je střední relativní chyba strany s_5 rovna

$$\frac{m_0}{M}\sqrt{\frac{10}{3}\left(\delta^2 38° + \delta 38°\, \delta 71° + \delta^2 71°\right)}.$$

Protože $\delta 38° = 26{,}9 \,.\, 10^{-7}$, $\delta 71° = 7{,}2 \,.\, 10^{-7}$, bude střední relativní chyba strany s_5 rovna $1{,}31 \,.\, 10^{-5} m_0$.



obr. 8

7. Ve čtyrúhelníku $ABCD$ (obr. 8) je dána úhlopříčka $z = \overline{AC}$ a byly měřeny úhly (1), (2), (3); (1′), (2′), (3′) s vahami rovnými po řadě p_1, p'_1, p''_1; p_2, p'_2, p''_2. Určiti střední relativní chybu úhlopříčky $\overline{BD} = Z$.*)

V tomto případě je

$$Z^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AD}\,.\,\overline{AB}\cos\left[(3) + (3')\right],$$

a

$$\overline{AD} = \frac{z}{\sin(1)}\sin(2), \quad \overline{AB} = \frac{z}{\sin(1')}\sin(2').$$

Abychom vypočetli, jak závisí chyba v délce Z na chybách $\Delta 1, \Delta 2, \ldots, \Delta 3'$ měřených úhlů, postupujeme takto: Derivujeme výraz pro Z^2 podle (1). Jest

*) Jordan, l. c. III, Stuttgart 1907 (5. vyd.), str. 153—155.

$$Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1)} = \overline{AD}\,.\,\frac{\mathrm{d}\overline{AD}}{\mathrm{d}(1)} - \overline{AB}\cos\left[(3) + (3')\right]\frac{\mathrm{d}\overline{AD}}{\mathrm{d}(1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{AD}}{\mathrm{d}(1)} = -\frac{z}{\sin^2(1)}\sin(2)\cos(1) = -\overline{AD}\,\mathrm{cotg}\,(1) =$$
$$= -\overline{AD}c_1,$$

edy

$$Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1)} = -\overline{AD}c_1\left\{\overline{AD} - \overline{AB}\cos\left[(3) + (3')\right]\right\},$$

a protože (viz obr. 8)

$$\overline{AD} - \overline{AB}\cos\left[(3) + (3')\right] = Z\cos\alpha,$$

je

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1)} = -\overline{AD}\,c_1\cos\alpha.$$

Podobně je

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(2)} = +\overline{AD}\,c_2\cos\alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1')} = -\overline{AB}\,c'_1\cos\alpha',$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(2')} = +\overline{AB}\,c'_2\cos\alpha',$$

kde

$$c_2 = \mathrm{cotg}\,(2),\; c'_1 = \mathrm{cotg}\,(1'),\; c'_2 = \mathrm{cotg}\,(2').$$

Dále

$$\frac{Z\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(3)} = +\overline{AD}\,.\,\overline{AB}\sin\left[(3) + (3')\right],$$

a protože

$$\overline{AB}\sin\left[(3) + (3')\right] = Z\sin\alpha$$

(viz obr. 8), je

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(3)} = \overline{AD}\sin\alpha.$$

Podobně

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(3')} = \overline{AB}\sin\alpha'.$$

Půjde tedy o výpočet střední chyby pro výraz

$$\Phi = f_1(1) + f'_1(2) + f''_1(3) + f_2(1') + f'_2(2') + f''_2(3'),$$

kde

$$f_1 = -\overline{AD}c_1\cos\alpha,\quad f'_1 = +\overline{AD}c_2\cos\alpha,\quad f''_1 = \overline{AD}\sin\alpha,$$
$$f_2 = -\overline{AB}c'_1\cos\alpha',\quad f'_2 = +\overline{AB}c'_2\cos\alpha',\quad f''_2 = \overline{AB}\sin\alpha'.$$

Při tom podmínky jsou

$$(1) + (2) + (3) = a_{10},\quad (1') + (2') + (3') = a_{20}.$$

Podle vzorce (15′) bude

$$m_\Phi^2 = m_0^2\left\{q_1f_1^2 + q'_1f'^2_1 + q''_1f''^2_1 + q_2f_2^2 + q'_2f'^2_2 + q''_2f''^2_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{(q_1f_1 + q'_1f'_1 + q''_1f''_1)^2}{q_1 + q'_1 + q''_1} - \frac{(q_2f_2 + q'_2f'_2 + q''_2f''_2)^2}{q_2 + q'_2 + q''_2}\right\}.$$

Jde-li o kosočtverec, budou úhly (1) a (1′) stejné a rovněž úhly (2), (3), (2′), (3′) budou stejné; a také $\alpha = \alpha'$, tedy $f_1 = f_2$, $f'_1 = f'_2$, $f''_1 = f''_2$. Předpokládáme-li dále, že $p_1 = p_2, p'_1 = p''_1 = p'_2 = p''_2$, bude výraz ve složené závorce

$$2\left\{q_1f_1^2 + q'_1(f'^2_1 + f''^2_1) - \frac{[q_1f_1 + q'_1(f'_1 + f''_1)]^2}{q_1 + 2q'_1}\right\}.$$

Dosadíme-li sem $f_1 = -\overline{AD}c_1\cos\alpha$, $f'_1 = +\overline{AD}c_2\cos\alpha$, $f''_1 = \overline{AD}\sin\alpha$ a uvážíme-li, že $c_1 = \operatorname{cotg} 2\alpha$, $c_2 = \operatorname{cotg}(2) = \operatorname{tg}\alpha$, jest výraz ve složené závorce po úpravě

$$\frac{\overline{AD}^2}{\sin^2\alpha}\,\frac{q_1q'_1}{q_1 + 2q'_1} = \frac{\overline{AD}^2}{\sin^2\alpha}\,\frac{1}{(p'_1 + 2p_1)},$$

a tedy

$$m_Z = \frac{m_0\overline{AD}}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}$$

A protože v případě kosočtverce jest $\overline{AD}\cos\alpha = \frac{1}{2}Z$, jest

$$\frac{m_Z}{Z} = \frac{m_0}{\sin 2\alpha}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}. \tag{19}$$

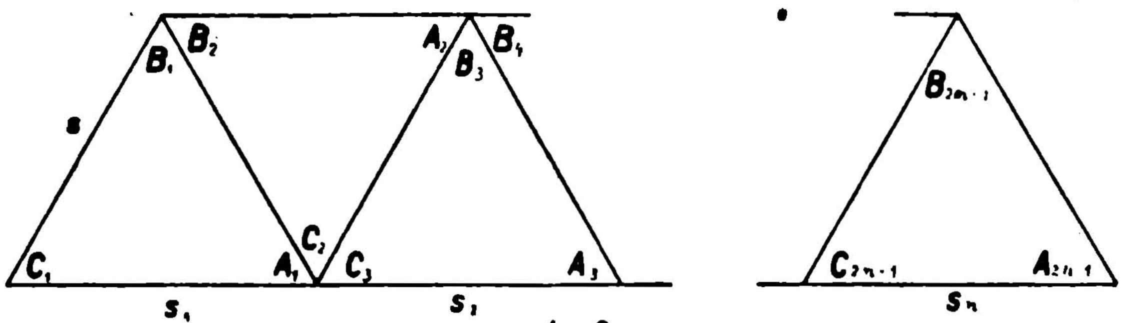
Zavedeme-li místo úhlu α poměr $Z : z = v$, bude

$$\sin\alpha = \frac{z}{2\overline{AD}}, \quad \cos\alpha = \frac{Z}{2\overline{AD}},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2zZ}{4\overline{AD}^2} = \frac{4zZ}{2(Z^2 + z^2)} = \frac{2v}{1 + v^2},$$

tedy

$$\frac{m_Z}{Z} = m_0\,\frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}. \tag{19'}$$



obr. 9

8. V řetězci trojúhelníků (obr. 9) je dána strana s prvního trojúhelníka a byly měřeny všechny úhly se stejnou střední chybou m_0. Jest vypočísti střední chybu součtu $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ za předpokladu, že trojúhelníky jsou rovnostranné.*)

Protože v tomto případě půjde o $2n - 1$ podmínek tvaru (15) a všechny váhy p jsou stejné a rovné 1, bude

$$m_\varphi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{2n-1} \{(f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g) - \tfrac{1}{3}(f_g + f'_g + f''_g)^2\}. \tag{15''}$$

*) Jordan, l. c. str. 159—161.

Musíme tedy určiti veličiny f_g, f'_g, f''_g, t. j. koeficienty u dA_g, dB_g, dC_g ve výrazu

$$S = \sum_{g=1}^{2n-1} (f_g\, dA_g + f'_g\, dB_g + f''_g\, dC_g).$$

Podle věty sinové vypočteme

$$s_1 = \frac{s}{\sin A_1} \sin B_1, \quad s_2 = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \sin B_3,$$

$$s_3 = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \frac{\sin C_3}{\sin A_4} \frac{\sin B_4}{\sin A_5} \sin B_5, \ldots,$$

$$s_g = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \cdots \frac{\sin B_{2g-2}}{\sin A_{2g-1}} \sin B_{2g-1}.$$

Derivujeme-li podle A_1, obdržíme

$$ds_1 = -\frac{s}{\sin^2 A_1} \sin B_1 \cos A_1\, dA_1 = -s_1 \operatorname{cotg} A_1\, dA_1,$$

. . . .

$$ds_g = -s_g \operatorname{cotg} A_1\, dA_1.$$

Podobně, derivujeme-li podle A_2, dostaneme

$$ds_2 = -s_2 \operatorname{cotg} A_2\, dA_2, \ldots, ds_g = -s_g \operatorname{cotg} A_2\, dA_2$$

a stejně pro ostatní úhly A_3, A_4 atd. Tedy

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\operatorname{cotg} A_1 (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = -ns \operatorname{cotg} 60°, \\
f_2 &= -\operatorname{cotg} A_2 (s_2 + \ldots + s_n) = -(n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°, \\
f_3 &= -\operatorname{cotg} A_3 (s_2 + \ldots + s_n) = -(n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°, \\
f_4 &= -\operatorname{cotg} A_4 (s_3 + \ldots + s_n) = -(n-2)\, s \operatorname{cotg} 60°,
\end{aligned}$$

. . . .

$$f_{2n-1} = -\operatorname{cotg} A_{2n-1} s_n = -s \operatorname{cotg} 60°.$$

Derivujeme-li podle B_1, obdržíme

$$ds_1 = \frac{s}{\sin A_1} \cos B_1\, dB_1 = s_1 \operatorname{cotg} B_1\, dB_1$$

a stejně

$$ds_2 = s_2 \operatorname{cotg} B_3 \, dB_3, \; ds_3 = s_3 \operatorname{cotg} B_5 \, dB_5, \; \ldots,$$
$$ds_n = s_n \operatorname{cotg} B_{2n-1} \, dB_{2n-1}.$$

Pro sudé indexy u B jest

$$ds_g = s_g \operatorname{cotg} B_2 \, dB_2, \text{ pro } g = 2, \ldots, n,$$
$$ds_g = s_g \operatorname{cotg} B_4 \, dB_4, \text{ pro } g = 3, \ldots, n \text{ atd.}$$

Tudíž

$$f'_1 = s_1 \operatorname{cotg} B_1 = s \operatorname{cotg} 60^\circ,$$
$$f'_2 = \operatorname{cotg} B_2 (s_2 + \ldots + s_n) = (n - 1) s \operatorname{cotg} 60^\circ,$$
$$f'_3 = s \operatorname{cotg} 60^\circ,$$
$$f'_4 = (n - 2) s \operatorname{cotg} 60^\circ,$$
$$f'_5 = s \operatorname{cotg} 60^\circ,$$
$$f'_6 = (n - 3) s \operatorname{cotg} 60^\circ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'_{2n-1} = s \operatorname{cotg} 60^\circ.$$

Úhel C_1 obsahují $s_2, s_3, \ldots, s_n$, tedy $f''_1 = (n - 1) s \operatorname{cotg} 60^\circ$; úhel C_2 a všechny úhly se sudými indexy neobsahují žádné s_g, tedy $f''_{2k} = 0$; úhel C_3 obsahují $s_3, s_4, \ldots, s_n$, tedy $f''_3 = (n - 2) s \operatorname{cotg} 60^\circ$; podobně $f''_5 = (n - 3) s \operatorname{cotg} 60^\circ$, $f''_7 = (n - 4) s \operatorname{cotg} 60^\circ$ atd.

Vidíme, že

$$f_1 + f'_1 + f''_1 = s \operatorname{cotg} 60^\circ (-n + 1 + n - 1) = 0,$$
$$f_2 + f'_2 + f''_2 = s \operatorname{cotg} 60^\circ (-n + 1 + n - 1) = 0,$$
$$f_3 + f'_3 + f''_3 = s \operatorname{cotg} 60^\circ (-n + 1 + 1 + n - 2) = 0,$$
$$f_4 + f'_4 + f''_4 = s \operatorname{cotg} 60^\circ (-n + 2 + n - 2) = 0 \text{ atd.}$$

Tím vzorec (15″) přejde v

$$m_\varphi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{2n-1} (f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g).$$

Dále jest

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f_g^2 = s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \{n^2 + (n - 1)^2 + (n - 1)^2 +$$
$$+ (n - 2)^2 + (n - 2)^2 + \ldots + 1^2 + 1^2\}.$$

A protože

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \tfrac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1),$$

jest

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(2n-1),$$

tedy

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f_g^2 = \tfrac{1}{3}\,s^2 \cot g^2 60^\circ\, n\,(2n^2+1).$$

Podobně

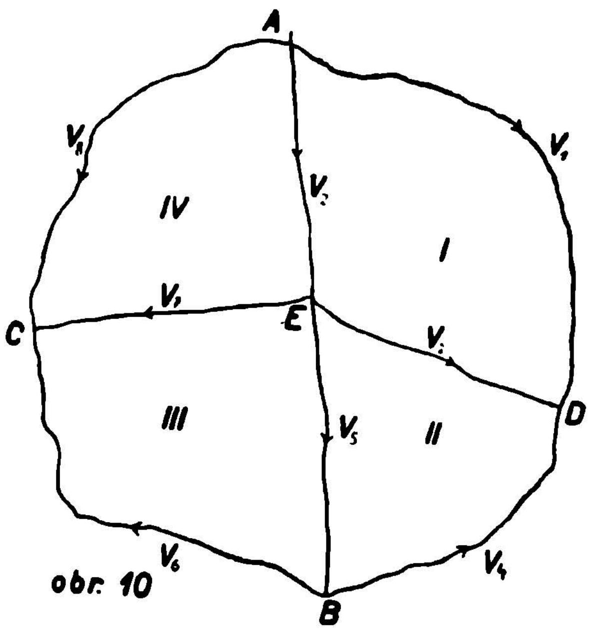
$$\sum_{g=1}^{2n-1} f'^2_g = s^2 \cot g^2 60^\circ \{1^2 + (n-1)^2 + $$
$$+ 1^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2 + 1^2\} =$$
$$= \tfrac{1}{6}\,ns^2 \cot g^2 60^\circ\,(2n^2 - 3n + 7),$$

a

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f''^2_g = s^2 \cot g^2 60^\circ \{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2\} =$$
$$= \tfrac{1}{6}\,s^2 \cot g^2 60^\circ\,(n-1)\,n\,(2n-1);$$

proto

$$m_\varphi^2 = m_0^2 s^2 \cot g^2 60^\circ\,\frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3}.$$



obr. 10

9. Vyrovnání nivelační sítě. Při nivelaci města byla nivelační síť připojena na body A a B základní nivelační sítě, jejichž výšky jsou V_A a V_B. V obr. 10 značí šipky stoupání tratí. V_i jsou naměřené rozdíly výšek a v_i příslušné hledané opravy. Úkolem je vyrovnati tuto nivelační síť. Opravené rozdíly výšek mají splňovati tyto podmínky: Z obrazce I jest

$$V_1 + v_1 - (V_2 + v_2) - (V_3 + v_3) = 0,$$

čili

$$v_1 - v_2 - v_3 = a_1, \text{ kde } a_1 = -V_1 + V_2 + V_3.$$

Podobné jsou podmínky plynoucí z obrazců II, III a IV:

$$\begin{aligned} v_2 - v_4 - v_5 &= a_2, & a_2 &= -V_2 + V_4 + V_5, \\ v_5 + v_6 - v_7 &= a_3, & a_3 &= -V_5 - V_6 + V_7, \\ v_3 + v_7 - v_8 &= a_4, & a_4 &= -V_3 - V_7 + V_8. \end{aligned}$$

Podmínka pevného výškového rozdílu mezi body A a B jest

$$V_3 + v_3 + V_5 + v_5 = V_B - V_A,$$

čili

$$v_3 + v_5 = a_5, \; a_5 = V_B - V_A - V_3 - V_5.$$

Prosté členy $a_1, \ldots, a_5$ vyjadřujeme obyčejně v mm.

Osm neznámých oprav $v_1, \ldots, v_8$ nemůže býti určeno uvedenými pěti podmínkami. Ale přistupuje ještě podmínka, aby součet čtverců oprav násobených příslušnými vahami byl minimální (viz IV, odst. 1). V případě nivelací se podle zkušeností předpokládá, že váhy jsou nepřímo úměrné vzdálenostem. Píše se obyčejně $p_i = 1 : s_i$, kde s_i jest délka příslušné trati v km. To také znamená, že váha rovná 1 přísluší trati rovné 1 km. Má tedy býti minimem součet

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_8 v_8^2$$

a při tom mají býti splněny podmínky

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_3 &= a_1, \\ v_2 - v_4 - v_5 &= a_2, \\ v_5 + v_6 - v_7 &= a_3, \\ v_3 + v_7 - v_8 &= a_4, \\ v_3 + v_5 &= a_5. \end{aligned} \tag{20}$$

Funkce F [viz (7)] v tomto případě jest

$$\begin{aligned} F = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_8 v_8^2 - 2k_1 (v_1 - v_2 - v_3 - a_1) - \\ - 2k_2 (v_2 - v_4 - v_5 - a_2) - 2k_3 (v_5 + v_6 - v_7 - a_3) - \\ - 2k_4 (v_3 + v_7 - v_8 - a_4) - 2k_5 (v_3 + v_5 - a_5). \end{aligned}$$

Anulujeme-li parciální derivace podle jednotlivých v_i, bude

$$\begin{aligned}
p_1v_1 &= k_1,\\
p_2v_2 &= -k_1 + k_2,\\
p_3v_3 &= -k_1 + k_4 + k_5,\\
p_4v_4 &= -k_2,\\
p_5v_5 &= -k_2 + k_3 + k_5,\\
p_6v_6 &= k_3,\\
p_7v_7 &= -k_3 + k_4,\\
p_8v_8 &= -k_4.
\end{aligned} \tag{21}$$

Dosadíme-li tyto rovnice do podmínek (20) a píšeme-li $q_i = 1 : p_i$, bude

$$\begin{aligned}
k_1(q_1 + q_2 + q_3) - k_2q_2 - k_4q_3 - k_5q_3 &= a_1,\\
-k_1q_2 + k_2(q_2 + q_4 + q_5) - k_3q_5 - k_5q_5 &= a_2,\\
-k_2q_5 + k_3(q_5 + q_6 + q_7) - k_4q_7 + k_5q_5 &= a_3,\\
-k_1q_3 - k_3q_7 + k_4(q_3 + q_7 + q_8) + k_5q_3 &= a_4,\\
-k_1q_3 - k_2q_5 + k_3q_5 + k_4q_3 + k_5(q_3 + q_5) &= a_5.
\end{aligned}$$

Ke stejným rovnicím bychom došli podle vzorců (9). Koeficient $[qa_1^2]$ se rovná součtu převrácených hodnot vah pro ty trati, jež se vyskytují v první podmínce. Podobně $[qa_2^2]$, $[qa_3^2]$ atd. V koeficientu $[qa_1a_2]$ jest qa_1a_2 převrácená hodnota váhy pro trať, jež se vyskytuje v podmínce první a druhé a znaménko je buď $+$ nebo $-$ podle toho, jsou-li znaménka u a_1 i a_2 stejná či různá. Tak je na př. $[qa_1a_2] = -q_2$, $[qa_1a_3] = 0$ (protože žádná trať se nevyskytuje současně v první a třetí podmínce) atd.

Sem stačí klásti $q_i = 1 : p_i = s_i$, jsou to tedy lineární rovnice se známými číselnými koeficienty.

Z těchto rovnic vypočteme koreláty $k_1, k_2, \ldots, k_5$ (na př. postupem Gaussovým). Pak z rovnic (21) vypočteme opravy $v_1, \ldots, v_8$.

Pro kontrolu dosadíme do podmínek (20), jež musí býti splněny až na chyby plynoucí ze zaokrouhlování.

Střední chyba m_0 pro jedničku váhy — jmenuje se také střední chyba kilometrová, protože váha rovná 1 přísluší trati dlouhé 1 km — se vypočte podle vzorce (4)

$$m_0 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{5}[pv^2]}.$$

Vyrovnaná výška na př. bodu C jest $V_A + V_8 + v_8$. Předpokládáme, že výšku V_A známe bez chyby. Pak střední chyba vyrovnané výšky bodu C bude rovna střední chybě opravy v_8. Podle vzorce (13′) jest

$$m_{v_8}^2 = m_0^2 (q_8 + q_8 h_4) = m_0^2 q_8 (1 + h_4), \qquad (22)$$

neboť jen $f_8 = 1$ a ostatní f jsou rovna 0, takže $[qa_1 f] = 0$ (člen $qa_1 f$ je součin převrácené hodnoty váhy, příslušného koeficientu v první podmínce a příslušného f),

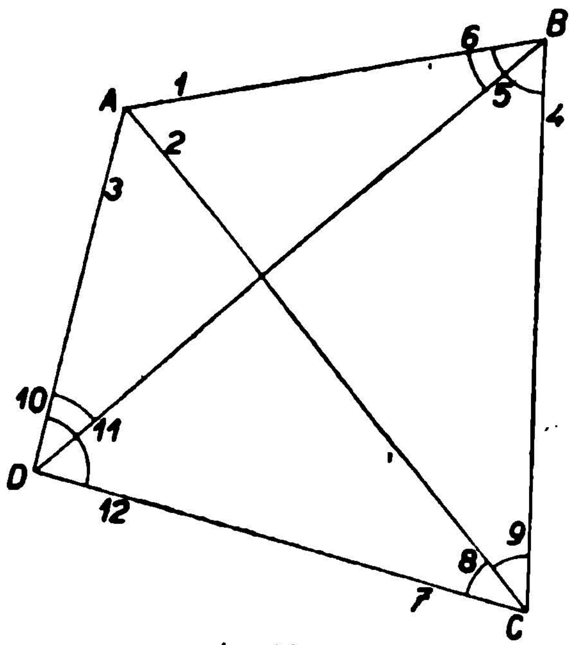
$$[qa_2 f] = 0, \; [qa_3 f] = 0, \; [qa_4 f] = -q_8, \; [qa_5 f] = 0.$$

Stačí tedy vypočísti h_4 z rovnic (12), jež zde budou:

$$\begin{aligned}
h_1 (q_1 + q_2 + q_3) - h_2 q_2 - h_4 q_3 - h_5 q_3 &= 0,\\
-h_1 q_2 + h_2 (q_2 + q_4 + q_5) - h_3 q_5 - h_5 q_5 &= 0,\\
-h_2 q_5 + h_3 (q_5 + q_6 + q_7) - h_4 q_7 + h_5 q_5 &= 0,\\
-h_1 q_3 - h_3 q_7 + h_4 (q_3 + q_7 + q_8) + h_5 q_3 &= -q_8,\\
-h_1 q_3 - h_2 q_5 + h_3 q_5 + h_4 q_3 + h_5 (q_3 + q_5) &= 0,
\end{aligned}$$

a dosaditi do vzorce (22).

10. Vyrovnání trigonometrické sítě. Ve čtyrúhelníku byly měřeny na každém vrcholu směry vždy ke všem třem zbývajícím vrcholům. Vyrovnati tuto síť! (Viz obr. 11.)



obr. 11

Označíme naměřené hodnoty S_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$. Vypočteme-li na př. úhly v trojúhelníku ABC (S_2—S_1, S_6—S_4, S_9 — S_8), uvidíme, že jejich součet není přesně roven $180° +$ + excess ε_1 trojúhelníka ABC (počítáme jako na kouli). Je tedy patrno, že musíme naměřené hodnoty S_i opraviti o hledané opravy s_i. Pak podmínka, že součet vyrovnaných úhlů v trojúhelníku ABC má býti $180° + \varepsilon_1$, bude

$$-s_1 + s_2 - s_4 + s_6 - s_8 + s_9 = a_1,$$
$$a_1 = 180° + \varepsilon_1 + S_1 - S_2 + S_4 - S_6 + S_8 - S_9. \quad (23_1)$$

Podobně z trojúhelníků ACD a ABD:

$$-s_2 + s_3 - s_7 + s_8 - s_{10} + s_{12} = a_2,$$
$$a_2 = 180° + \varepsilon_2 + S_2 - S_3 + S_7 - S_8 + S_{10} - S_{12}, \quad (23_2)$$
$$-s_1 + s_3 - s_5 + s_6 - s_{10} + s_{11} = a_3,$$
$$a_3 = 180° + \varepsilon_3 + S_1 - S_3 + S_5 - S_6 + S_{10} - S_{11}. \quad (23_3)$$

Podmínka, která by plynula z trojúhelníka DBC, se dá odvoditi již z těchto tří podmínek, nepodala by tedy nic nového.

Podle sinové věty sférické trigonometrie vypočteme $\sin AC$ ze $\sin AB$ v trojúhelníku ABC, dále $\sin AD$ ze $\sin AC$ v trojúhelníku ADC a konečně $\sin AB$ ze $\sin AD$ v trojúhelníku ABD. Tak se dá odvoditi další podmínka

$$\frac{\sin(S_6 - S_4 + s_6 - s_4)\sin(S_8 - S_7 + s_8 - s_7)}{\sin(S_6 - S_5 + s_6 - s_5)\sin(S_9 - S_8 + s_9 - s_8)} \cdot$$
$$\cdot \frac{\sin(S_{11} - S_{10} + s_{11} - s_{10})}{\sin(S_{12} - S_{10} + s_{12} - s_{10})} = 1.$$

Tuto podmínku převedeme na lineární tvar tím, že ji logaritmujeme a jednotlivé sčítance $\log\sin(S_6 - S_4 + s_6 - s_4)$, $\log\sin(S_8 - S_7 + s_8 - s_7)$ atd. nahradíme přibližně stejnými výrazy $\log\sin(S_6 - S_4) + a'(s_6 - s_4)$, $\log\sin(S_8 - S_7) + b'(s_8 - s_7)$ atd., kde a', b' jsou logaritmické diference pro log sin a $1''$ v místě úhlu $S_6 - S_4$, $S_8 - S_7$ atd. Dá se tedy poslední podmínka psáti ve tvaru

$$a_{4,4}s_4 + a_{4,5}s_5 + a_{4,6}s_6 + a_{4,7}s_7 + a_{4,8}s_8 +$$
$$+ a_{4,9}s_9 + a_{4,10}s_{10} + a_{4,11}s_{11} + a_{4,12}s_{12} = a_4. \quad (23_4)$$

V uvažovaném případě máme 4 podmínky a 12 neznámých. Ale přistupuje ještě podmínka, aby součet čtverců oprav $s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{12}^2$ byl minimální (viz IV, odst. 1).

Funkce F v tomto případě bude

$$F = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{12}^2 - 2k_1(-s_1 + s_2 - \ldots - a_1) -$$
$$- 2k_2(-s_2 + s_3 - \ldots - a_2) - 2k_3(-s_1 + s_3 - \ldots - a_3) -$$
$$- 2k_4(a_{4,4}s_4 + a_{4,5}s_5 + \ldots - a_4).$$

Anulujeme-li derivace podle $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} s_1 &= -k_1 - k_3, & s_7 &= -k_2 + k_4a_{4,7}, \\ s_2 &= k_1 - k_2, & s_8 &= -k_1 + k_2 + k_4a_{4,8}, \\ s_3 &= k_2 + k_3, & s_9 &= k_1 + k_4a_{4,9}, \\ s_4 &= -k_1 + k_4a_{4,4}, & s_{10} &= -k_2 - k_3 + k_4a_{4,10}, \\ s_5 &= -k_3 + k_4a_{4,5}, & s_{11} &= k_3 + k_4a_{4,11}, \\ s_6 &= k_1 + k_3 + k_4a_{4,6}, & s_{12} &= k_2 + k_4a_{4,12}. \end{aligned} \tag{24}$$

Dosadíme-li odtud do podmínek, budeme míti čtyři normální rovnice pro koreláty:

$$6k_1 - 2k_2 + 2k_3 + k_4(-a_{4,4} + a_{4,6} - a_{4,8} + a_{4,9}) = a_1$$

atd.

Můžeme je zase kontrolovati přímo z rovnic (9).

Normální rovnice řešíme na př. způsobem Gaussovým. Tak vypočteme koreláty k_1, k_2, k_3, k_4. Pak z rovnic (24) plynou opravy $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$. Výpočet kontrolujeme dosazením do podmínek (23).

Střední chyba pro jednotku váhy bude podle vzorce (4) rovna

$$m_0 = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}[s^2]}.$$

Střední chybu jednotlivých vyrovnaných směrů, nebo jakékoli lineární funkce vyrovnaných směrů, počítáme zase jako v př. 9 podle vzorce (13'), při čemž koeficienty h plynou z rovnic (12).