V.

## POSTUP PO PROVEDENÉM VYROVNÁNÍ.

Po vyrovnání se často tážeme, mají-li odchylky vlastnosti nahodilých chyb. Uvedeme nejprve podle Helmerta*) několik kriterií pro nahodilost chyb a způsob, jak odhadnouti přesnost těch kriterií.

**1. Zkoušky znamének.** a) Součet znamének v dané řadě chyb nebo odchylek.

Označíme řadu uvažovaných chyb (nebo odchylek) $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Jejich znaménka označíme $V_1$, $V_2, \ldots, V_n$, t. j. klademe $V_i = \pm 1$, má-li chyba (nebo odchylka) znaménko $\pm$. Při tom nutno všechny chyby počítati ve stejném smyslu a ne tedy na př. některá $\varepsilon$ považovati za chyby měřených úhlů a jiná jako chyby rozdílu (360° — měřený úhel). Pak je součet znamének v dané řadě $s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$. Mysleme si měření, z nichž vzešla každá chyba nebo odchylka $\varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, opakována nekonečněkrát. Mají-li $\varepsilon_i$ vlastnosti chyb nahodilých a necháme-li chybu $\varepsilon_1$ nabýti všech jejích nekonečně mnoho hodnot, a nezávisle na ní chybu $\varepsilon_2$ nabýti zase všech nekonečně mnoho jejích hodnot atd., a utvoříme-li vždy příslušné $s$ pro všechny možné kombinace hodnot chyb, bude aritmetický průměr všech těchto součtů $s$ roven 0, protože k určitému počtu případů $\varepsilon_i$ se znaménkem $+$ musíme počítati stejný počet případů $\varepsilon_i$ se znaménkem —.

Můžeme tedy říci: Průměrně je součet znamének v řadě nahodilých chyb nebo odchylek roven 0.

Aby odhadl přesnost tohoto kriteria, to znamená, aby nějak odhadl meze, v nichž můžeme ve skutečném případě čekati součet $s$, uvažuje Helmert podobně, jako když se hledá

*) F. R. Helmert: Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. Sitzb. der k. preuss. Ak. der Wiss., Phys.-math. Classe, 1905, str. 594—612.

průměrná hodnota chyb (srovn. I, odst. 3 a 4). Jenže zde jde o průměrné hodnoty odchylek od průměrné hodnoty. Jako tam se uvažují všechny možné hodnoty chyb, uvažují se zde všechny rozdíly mezi hodnotami, jichž může nabýti součet $s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ a jeho aritmetickým průměrem rovným 0. A jako tam se počítají čtverce všech možných hodnot chyb a jejich aritmetický průměr je (přibližně) roven čtverci střední chyby, počítají se zde všechny možné hodnoty čtverce

$$(V_1 + V_2 + \ldots + V_n - 0)^2 = V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2 + + \sum_{i,k=1}^{n} V_i V_k = s^2. \tag{1}$$

Odmocnina aritmetického průměru hodnot (1) je pak střední odchylka součtu $s$ od jeho průměru 0.

Protože aritmetický průměr součtu $\Sigma V_i V_k$ se rovná 0 (plyne jako v I, odst. 4) a aritmetické průměry hodnot $V_i^2$ jsou rovny 1, bude aritmetický průměr výrazů $(V_1 + V_2 + \ldots + V_n - 0)^2$ roven $n$. Je tedy $\sqrt{n}$ střední odchylka součtu $s$ od jeho průměru 0.

Je-li absolutní hodnota součtu $s$ větší než $\sqrt{n}$, předpokládá se, že působí nějaké systematické vlivy a že tedy chyby nebo odchylky nejsou nahodilé.

b) Změny znamének v řadě chyb nebo odchylek.

Jestliže uspořádáme vyšetřované chyby nebo odchylky podle nějaké proměnné $t$ (na př. podle času, teploty atd.), jež nabývala při různých měřeních různých hodnot, a o níž tušíme, že měla systematický vliv na výsledky měření, a ukáže-li se, že pro první polovinu všech měření takto uspořádaných mají odchylky znaménka kladná a pro druhou záporná, soudíme, že odchylky nemají vlastnosti nahodilých chyb.

K obecnému kriteriu pro změny znamének v řadách nahodilých chyb nebo odchylek se dojde takto:

Označme počet sledů v řadě znamének $V_1, V_2, \ldots, V_n$ písmenem $f$ a počet změn písmenem $w$. Pak jest $f - w =$

$= V_1 V_2 + V_2 V_3 + V_3 V_4 + \dots + V_{n-1} V_n$, neboť $V_i V_{i+1}$ je $+1$ pro sled a $-1$ pro změnu.

Pro nekonečně mnoho případů, uvažovaných v odst. 1a, je průměrná hodnota všech $f - w$ rovna 0, protože pro každý součin $V_i V_{i+1}$ na každé dvě kladné hodnoty $(+1) . (+1)$, $(-1) . (-1)$ připadají dvě záporné hodnoty $(+1) . (-1)$, $(-1) . (+1)$.

Tedy: Průměrně je rozdíl sledů a změn v řadě nahodilých chyb nebo odchylek roven 0.

Aby vypočetl, jaká je střední odchylka rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0, uvažuje Helmert zase o čtverci rozdílů

$$(V_1 V_2 + V_2 V_3 + \dots + V_{n-1} V_n - 0)^2 =$$
$$= V_1^2 V_2^2 + V_2^2 V_3^2 + \dots + V_{n-1}^2 V_n^2 + \sum_{i=1}^{n} V_{i-1} V_i^2 V_{i+1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} V_{i-1} V_i V_{h-1} V_h,$$

kde $h > i + 1$.

Aritmetický průměr těchto čtverců je $n - 1$ (viz 1a), tedy $\sqrt{n-1}$ lze považovati za střední odchylku rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0.

Je-li některá chyba nebo odchylka rovna 0, možno při výpočtu součtu $s$ a rozdílu $f - w$ klásti příslušné znaménko jednou jako kladné, po druhé pak záporné a vzíti střed. Ke stejnému výsledku však dojdeme, když ve vzorcích

$$s = V_1 + V_2 + \dots + V_n,$$
$$f - w = V_1 V_2 + V_2 V_3 + \dots + V_{n-1} V_n$$

klademe příslušné $V_i$ rovné 0.

Na střední odchylky $\sqrt{n}$ resp. $\sqrt{n-1}$ nemá existence nulových chyb nebo odchylek žádného vlivu, protože pravděpodobnost jejich existence je nekonečně malá a průměrné hodnoty čtverců $V_i^2$, $V_i^2 V_{i+1}^2$ jsou stejně rovné 1, jako kdyby se nulové chyby nevyskytovaly.

**2. Zkouška součtem skutečných chyb nebo aritmetickým průměrem skutečných chyb.** Nechť je funkce četnosti pro chyby $\varepsilon_i$ sudou funkcí, a jako v odst. 1a mysleme si opakována nekonečněkrát měření, z nichž vzešla každá chyba $\varepsilon_i$. Necháme-li každou chybu $\varepsilon_i$ nabýti všech jejích nekonečně mnoho hodnot nezávisle na ostatních $\varepsilon$, utvoříme-li součet $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ pro všechny možné kombinace hodnot chyb a pak aritmetický průměr všech těchto součtů, bude průměr roven 0, neboť aritmetický průměr pro každé $\varepsilon_i$ je roven 0.

Tedy průměrná hodnota součtu $[\varepsilon]$ je rovna 0, nebo průměrná hodnota aritmetického průměru $[\varepsilon] : n$ je rovna 0. Značíme-li písmenem $m$ střední hodnotu chyby $\varepsilon$, t. j. veličinu danou přibližně rovnicí $m^2 = [\varepsilon^2] : n$ (srovn. I, (10')), je čtverec střední odchylky součtu $[\varepsilon]$ od jeho průměru 0 roven $n \,.\, m^2$. Ukážeme to, určíme-li čtverec rozdílu $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + + \ldots + \varepsilon_n - 0)^2 = \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2 + \Sigma\varepsilon_i\varepsilon_k$ pro nekonečně mnoho hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jako v odst. 1a, a hledáme-li aritmetický průměr všech čtverců takto vytvořených. Je roven $nm^2$, předpokládáme-li, že všechna měření byla stejné váhy.

Střední odchylka součtu $[\varepsilon]$ od jeho průměru 0 je tedy rovna $\pm m\sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$ a střední odchylka výrazu $[\varepsilon] : n$ od jeho průměru 0 je podobně $\pm m : \sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} : n$. Je-li hodnota $[\varepsilon]$, $([\varepsilon] : n)$ vně mezí $\mp \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$, $(\mp \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} : n)$, předpokládá se, že v chybách $\varepsilon$ jsou skryty nějaké systematické vlivy.

Pro odchylky musí býti vždy splněno $[v] = 0$, v případě odchylek tedy nemá smyslu zkouška vyložená v tomto odstavci.

**3. Zkouška srovnáním součtu čtverců kladných chyb a součtu čtverců záporných chyb.** Uvažujme o výrazu

$$V_1\varepsilon_1{}^2 + V_2\varepsilon_2{}^2 + \ldots + V_n\varepsilon_n{}^2. \tag{2}$$

Je-li funkce četnosti pro chyby $\varepsilon_i$ sudá funkce, probíhá-li $\varepsilon_i$

všech nekonečně mnoho hodnot uvažovaných v předcházejících odstavcích, je-li $V_i = \pm 1$ a je-li $\pm$ znaménko chyby $\varepsilon_i$, bude součet všech hodnot $V_i \varepsilon_i^2$ při stálém $i$ roven 0. Tedy průměrná hodnota výrazu (2), vypočtená ve stejném smyslu jako v předcházejících případech, bude rovna 0.

Čtverec střední odchylky součtu (2) od jeho průměru 0 bude roven $nm'^4$, kde $m'$ plyne přibližně ze vzorce

$$m'^4 = [\varepsilon^4] : n.$$

Tento výsledek se odvodí stejně jako v odstavci 2, uvažujeme-li o všech možných čtvercích

$$(V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \dots + V_n \varepsilon_n^2 - 0)^2 =$$

$$= V_1^2 \varepsilon_1^4 + V_2^2 \varepsilon_2^4 + \dots + V_n^2 \varepsilon_n^4 + \sum_{i,k=1}^{n} V_i V_k \varepsilon_i^2 \varepsilon_k^2.$$

Tedy: Průměrná hodnota výrazu $V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \dots + V_n \varepsilon_n^2$ je rovna 0, nebo průměrná hodnota součtu čtverců kladných chyb se rovná průměrné hodnotě součtu čtverců záporných chyb. Střední odchylka výrazu (2) nebo rozdílu čtverců kladných a záporných chyb od průměru 0 je rovna $\pm m'^2 \sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon^4]}$. Je-li rozdíl součtu čtverců kladných a záporných chyb vně mezí $\mp \sqrt{[\varepsilon^4]}$, předpokládá se, že v chybách $\varepsilon_i$ lze očekávati systematické vlivy.

**4. Zkoušky E. Abbeho.** a) Vlastní zkouška E. Abbeho. Jestliže systematické vlivy zatěžují kladné i záporné chyby přibližně stejně, bude výsledek vyšetřování podle odst. 2 a 3 negativní. Proto se doporučuje srovnávati dvě funkce chyb, z nichž v jedné jsou tušené systematické vlivy co možná potlačeny, kdežto ve druhé působí v plné míře.

E. Abbe doporučuje uspořádati chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ podle proměnné, jejíž systematický vliv tušíme, a utvořiti součty

$$A = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2,$$

$$B = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_1)^2.$$

V součtu $A$ se tušené systematické vlivy plně uplatňují, v $B$ se uplatní obyčejně jen v posledním členu. Utvoříme ještě výraz

$$C = A - \tfrac{1}{2}B = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n\varepsilon_1.$$

Jsou-li chyby $\varepsilon$ nahodilé, bude průměrná hodnota výrazu $C$, vypočtená jako v předcházejících odstavcích, rovna 0. A čtverec střední odchylky výrazu $A - \frac{1}{2}B = C$ od jeho průměru 0 se vypočte zase s pomocí čtverce

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n\varepsilon_1 - 0)^2 =$$
$$= \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2\varepsilon_1^2 + 2\,(\varepsilon_1\varepsilon_2^2\varepsilon_3 + \dots).$$

Průměrná hodnota, vypočtená jako v dřívějších odstavcích, bude $nm^4$, čili střední odchylka výrazu $A - \frac{1}{2}B = C$ od jeho průměru 0 jest $\pm\, m^2\sqrt{n}$.

b) Upravená zkouška E. Abbeho.

Na místě výrazů $A, B, C$, uvažuje Helmert výrazy $A^*$, $B^*$, $C^*$, kde

$$A^* = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) - \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_n^2),$$
$$B^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2,$$
$$C^* = A^* - \tfrac{1}{2}B^* = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n.$$

Zase se dá ukázati, že průměrná hodnota výrazu $C^*$, vypočtená jako v předcházejících odstavcích, je rovna 0 a odchylka výrazu $A^* - \frac{1}{2}B^* = C^*$ od jeho průměru 0 jest $\pm\, m^2\sqrt{n-1}$.

Vybočují-li čísla $A - \frac{1}{2}B$ a $A^* - \frac{1}{2}B^*$ z mezí $\mp\, m^2\sqrt{n}$ a $\mp\, m^2\sqrt{n-1}$, předpokládá se zase, že existují systematické vlivy, zatěžující chyby $\varepsilon_i$.

**5. Jak zjistíme, že se odchylky od aritmetického průměru řídí normálním zákonem četnosti?** Z odstavce (VII, 2b, $\alpha$) plyne, že se odchylky naměřených hodnot od jejich aritmetického průměru řídí normálním zákonem četnosti, jestliže se jím řídí skutečné chyby jednotlivých měření.

Zkoušku, že se odchylky řídí normálním zákonem četnosti, provádíme takto: Nejprve se přesvědčíme, že počet každého druhu znamének je přibližně stejný (v mezích uvedených v odstavci 1). Pak zjistíme, kolik odchylek má absolutní hodnotu v mezích

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0—0,1; | 0,1—0,2; | ...; | 0,9—1,0, |
| nebo | 0—0,2; | 0,2—0,4; | ...; | 1,8—2,0, |
| nebo | 0—0,4; | 0,4—0,8; | ...; | 3,6—4,0, |

podle toho, jsou-li odchylky přibližně v mezích od —1,0 do + 1,0, nebo od —2,0 do + 2,0, nebo od —4,0 do + 4,0.

Čísla, která takto zjistíme z pozorování, srovnáme s příslušnými čísly teoretickými, vypočtenými za předpokladu, že se odchylky řídí normálním zákonem a že při tom $h = 1 : m_0\sqrt{2}$, kde $m_0$ je střední chyba pro jednotku váhy při uvažované řadě měření [viz II, (15')]. V odst. VII, 2b, $\alpha$) je dokázáno: Je-li normální zákon, kterým se řídí skutečné chyby $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$, je normální zákon, kterým se řídí odchylky $v$ od aritmetického průměru

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, e^{-h^2 \frac{n}{n-1} v^2},$$

kde $n$ je počet měření. Pak pravděpodobnost, že odchylka je mezi $-x$ a $+x$, je rovna

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\int_0^x e^{-h^2 \frac{n}{n-1} v^2}\, dv.$$

Zavedeme-li proměnnou

$$y = h\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, v,$$

přejde předcházející výraz v tento tvar:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\sqrt{\frac{n}{n-1}}x} e^{-y^2}\, dy,$$

což podle definice funkce $\Phi$ [viz I, (8)] je rovno

$$\Phi\left(xh\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right).$$

Theoretický počet odchylek, které mají absolutní hodnotu v mezích od 0 do 0,1 (0,2, 0,4), jest tedy

$$\Phi\left(0{,}1\,.\,h\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) = n\Phi\left(\frac{0{,}1}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right),$$

$$\left[n\Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right),\quad n\Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right].$$

Dále theoretický počet odchylek, které mají absolutní hodnotu v mezích od 0,1 do 0,2 od 0,2 do 0,4 nebo od 0,4 do 0,8 jest

$$n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}1}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right\},$$

resp.

$$n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right\},$$

resp.

$$n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}8}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right\}.$$

A podobně dále.

Protože $n$ i $m_0$ známe, vypočteme snadno potřebné hodnoty argumentu funkce $\Phi$, příslušné hodnoty funkce $\Phi$ interpolujeme z tabulky v odstavci I, (8) a hledaný teoretický počet odchylek plyne již podle předchozího snadno.

(Srovn. př. 3 v odst. 7.)

**6. Jak zjistíme, že se chyby v uzávěru trojúhelníků řídí normálním zákonem četnosti?** V odstavci (VII, 2b, $\beta$) je dokázáno: Chyby v uzávěru trojúhelníků se řídí normálním zákonem četnosti, jestliže se jím řídí skutečné chyby jednotlivých úhlů.

Zkoušku, že se chyby v uzávěru řídí normálním zákonem četnosti provádíme podobně jako v odstavci 5. Jen musíme nyní uvážiti, že podle odstavce (VII, 2b, $\beta$) je normální zákon četnosti, kterým se řídí chyby v uzávěru,

$$\frac{h}{\sqrt{3\pi}}\, e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2}.$$

Pak pravděpodobnost, že chyba v uzávěru je mezi $-x$ a $+x$, je rovna

$$\frac{2h}{\sqrt{3\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon.$$

Zavedeme-li proměnnou $y = \frac{h}{\sqrt{3}}\varepsilon$, je předcházející výraz roven

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}}x} e^{-y^2}\, dy = \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}x\right) = \Phi\left(\frac{x}{m_0\sqrt{6}}\right).$$

Známe-li tedy na př., kolik chyb v uzávěru má absolutní hodnotu v mezích 0—0,2; 0,2—0,4; atd., vypočteme hodnoty argumentu $\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{6}}$ a její dvojnásobek, trojnásobek atd., pak příslušné hodnoty $\Phi$ a z nich teoretický počet chyb v uzávěru, jejichž absolutní hodnota je v uvedených mezích

$$\left[n\Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{6}}\right),\ n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{6}}\right)\right\},\ \text{atd.}\right].$$

7. **Příklady.** 1. Vyšetřiti, mají-li odchylky od aritmetického středu v příkladě 1 z (II, 6) vlastnosti nahodilých chyb.

Odchylky, v jednotkách $10^{-8}$ sec, jsou rovny po řadě

+24, +7, +64, +35, —53, —26, +5, —76, +41,
+93, —64, —55.

Odtud plyne $s = +2$, $\sqrt{n} = \pm 3{,}5$. Součet znamének se rovná $+2$, střední odchylka součtu $s$ od jeho průměru 0 je $\pm 3{,}5$ (srovn. odst. 1a).

Dále je $f - w = +1$, $\sqrt{n-1} = \pm 3{,}3$. Rozdíl sledů a změn je roven $+1$ a střední odchylka rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0 je $\pm 3{,}3$ (srovn. odst. 1b).

Součet čtverců kladných odchylek je $+16\,301 \cdot 10^{-16}$, součet čtverců záporných odchylek $16\,382 \cdot 10^{-16}$. Rozdíl je $-81 \cdot 10^{-16}$. Součet čtvrtých mocnin odchylek je pak $1{,}64 \cdot 10^{-24}$, tedy střední odchylka rozdílu mezi součtem čtverců kladných a součtem záporných odchylek od průměru 0 bude (podle odst. 3)

$$\pm \sqrt{1{,}64} \cdot 10^{-12} = \pm 1{,}3 \cdot 10^{-12}.$$

Zkouška E. Abbeho: Uvažujeme uspořádání odchylek podle času ($\varepsilon_1 = +24 \cdot 10^{-8}, \ldots, \varepsilon_{12} = -55 \cdot 10^{-8}$). Pak $A = 32\,683 \cdot 10^{-16}$, $B = 67\,738 \cdot 10^{-16}$, tedy $A - \frac{1}{2}B = -1\,186 \cdot 10^{-16}$. Čtverec

$$m^2 = \frac{32\,683}{12} \cdot 10^{-16} \quad \text{a} \quad \pm m^2\sqrt{n} = \pm 9\,436 \cdot 10^{-16}.$$

Všechny tyto zkoušky ukazují tedy, že uvažovaná řada odchylek má vlastnosti nahodilých chyb.

2. Vyšetřiti, mají-li odchylky od aritmetického středu v příkladě 3 z (II, 6) vlastnosti nahodilých chyb. (Mají.)

3. Z Besselových měření rektascense Polárky byla střední chyba pro jednotku váhy $m_0 = \pm 1{,}3093$ sec a počet odchylek od aritmetického průměru, jejichž absolutní hodnota byla v mezích 0—0,4 sec; 0,4—0,8 sec atd. až 3,6 sec a výše, byl po řadě 25, 22, 19, 11, 9, 8, 2, 3, 1, 0. Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly, vypočtenými za předpokladu, že se odchylky řídí normálním zákonem.*)

Podle odst. 5 nutno počítati hodnotu argumentu

*) E. Czuber: l. c. str. 192—193.

$$\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{4}{1{,}3093\sqrt{198}} = 0{,}21711$$

a její dvojnásobek až desateronásobek. Pro tyto hodnoty argumentu se vypočtou příslušné hodnoty funkce $\Phi$: 0,2410; 0,4607; 0,6429; 0,7806; 0,8753; 0,9346; 0,9683; 0,9859; 0,9942; 0,9978. Odtud plynou hledaná theoretická čísla: 24,1; 22,0; 18,2; 13,8; 9,5; 5,9; 3,3; 1,8; 0,8; 0,4. Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —0,9; —0,0; —0,8; +2,8; —0,5; —2,1; +1,3; —1,2; —0,2; +0,4.

4. V 61 trojúhelnících jihofinské základní triangulace bylo v uzávěrech 31 kladných chyb, 29 záporných a 1 chyba rovna 0. Střední hodnota chyby v uzávěru byla $\pm 0{,}611''$. Počet chyb s absolutní hodnotou v mezích 0—0,2″; 0,2″—0,4″; 0,4″ až 0,6″; 0,6″—0,8″; 0,8″—1,0″; 1,0″—1,2″; 1,2″—1,4″, byl po řadě: 17; 10; 8; 12,5; 8,5; 4; 1. (Při tom byla na př. chyba 0,80″ čítána jednou polovinou do skupiny v mezích 0,6″ až 0,8″ a jednou polovinou do skupiny v mezích 0,8″—1,0″.) Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly, vypočtenými za předpokladu, že se chyby v uzávěru řídí normálním zákonem četnosti.*)

V (VII, 2b, $\beta$) je ukázáno, že vztah mezi střední hodnotou $M$ chyby v uzávěru a střední chybou $m_0$ v jednom měřeném úhlu je

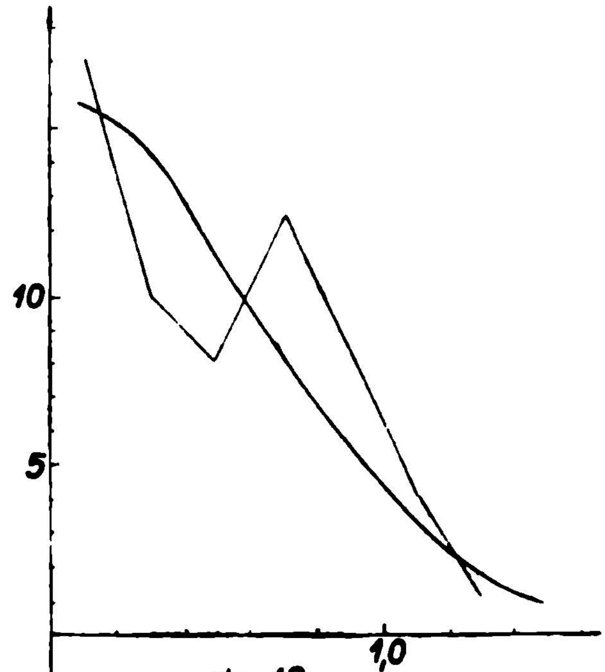
$m_0 = \frac{M}{\sqrt{3}}$, tedy $m_0 = \pm \frac{0{,}611''}{\sqrt{3}}$. Pak (viz. odst. 6)

$\frac{x}{m_0\sqrt{6}} = \frac{x}{0{,}611''\sqrt{2}}$. Pro $x = 0{,}2''$ je $\frac{x}{m_0\sqrt{6}} = 0{,}2315$.

Pro tuto hodnotu a její dvojnásobek, trojnásobek atd. byly z tabulky funkce $\Phi$ vyhledány příslušné funkční hodnoty (0,2567, 0,4904 atd.). Z nich pak plyne, že theoretický počet

*) T. J. Kukkamäki: Verbesserung der horizontalen Winkelmessungen wegen der Seitenrefraktion. Veröff. des fin. Geod. Inst. No. 28, Helsinki 1939, str. 14.

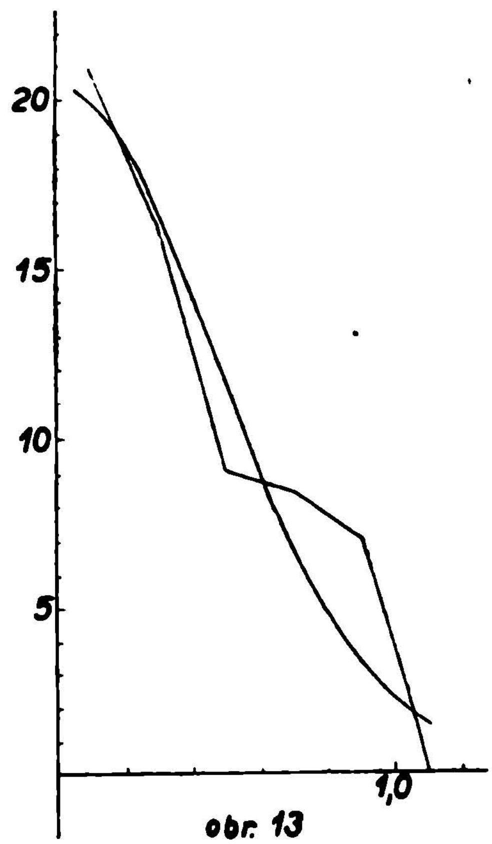
odchylek, jejichž absolutní hodnota je v mezích od 0 do 0,2″, je roven 61 . 0,2567 = 15,7. Počet odchylek, jejichž absolutní hodnota je v mezích od 0,2″ do 0,4″ jest 61 (0,4904 — — 0,2567) = 14,3. Dále plynou čísla 11,2; 8,3; 5,4; 3,2; 1,7. Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —1,3; +4,3; +3,2; —4,2; —3,1; —0,8; +0,7 (viz obr. 12).



obr. 12

Na obr. 12 jsou theoretická čísla i čísla plynoucí z měření vyobrazena tak, že chyby v uzávěru jsou naneseny na osu úseček (0,2″ ≙ 5 mm) a počet chyb v uzávěru na osu pořadnic (10 chyb v uzávěru ≙ 25 mm).

5. V téže síti byly směry opraveny vzhledem na příčnou refrakci. Kladných chyb v uzávěrech bylo zase 31, záporných 29 a 1 byla rovna 0. Střední hodnota chyby v uzávěru klesla na ±0,470″. Počet chyb s absolutní hodnotou v mezích 0 —0,2″ až 1,0″—1,2″ byl 21; 16,5; 9; 8,5; 7; 0. Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly.*) (Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —0,9; +0,3; +2,8; —1,6; —3,6; +1,4; viz obr. 13.)



obr. 13

**8. Systematické vlivy zatěžující měření.** Neřídí-li se odchylky nebo chyby normálním zákonem četnosti,

*) T. J. Kukkamäki, l. c. str. 14.

nebo ukazují-li kriteria uvedená v odst. 1—4 na nějaký systematický vliv, hledá se, jaký by to mohl býti vliv.

Na příklad: Při určování, jak závisí doba kyvu kyvadel na tlaku vzduchu ($p$) a na teplotě kyvadel ($t$), pokud se závislost na tlaku a teplotě vyjadřovala vzorcem $a_1p + a_2t$, nebo $\bar{a}_1d + a_2t$, kde $d$ je hustota vzduchu, ukazovala kriteria pro nahodilost chyb na existenci systematických vlivů. Teprve když se závislost na $p$ a na $t$ vyjádřila vzorcem

$$a_1p + a_2\sqrt{p} + a_3t + a_4pt + a_5t^2,$$

byla zbývající systematická chyba odstraněna.*)

Jiný příklad: Rozdíly patrné v př. 4, obr. 12, mezi theoretickým počtem chyb v uzávěru a počtem, který plynul z měření, ukazovaly rovněž na existenci nějakých systematických vlivů. Když byly jednotlivé směry opraveny vzhledem k příčné refrakci, zlepšil se souhlas mezi theoretickým počtem chyb v uzávěru a počtem plynoucím z měření (př. 5, obr. 13). Jak patrno z těchto dvou příkladů, vyšetřování odchylek nebo chyb vede k hledání systematických vlivů, zatěžujících měření. Pokud odchylky nebo chyby ukazují nějaký systematický vliv, nesmíme býti s výsledky měření a vyrovnání spokojeni.

Uvedu ještě podle Hayforda**) tři pokyny, jak objeviti systematické chyby.

$\alpha$) Rozdělíme měření na několik skupin (na př. večerní a ranní měření azimutu) a určíme výsledky ($A_k$) a střední chyby ($m_k$) výsledků z každé skupiny měření zvlášť. Ukáže-li se, že rozdíly mezi výsledky jednotlivých skupin ($a_k - a_l$) jsou větší, než by měly býti podle příslušných středních chyb ($\sqrt{m_k^2 + m_l^2}$), soudíme, že měření v jednotlivých skupinách jsou zatížena nějakou systematickou chybou.

$\beta$) Užíváme-li při měření nějakého přístroje, jehož práce se může v jistých mezích za měření měniti, je nutno přímo vy-

*) Jahresbericht des Direktors des Geod. Inst. Potsdam 1939, str. 16.

**) Wright-Hayford, l. c. str. 277—278.

šetřiti, jaký vliv mají tyto změny na výsledek, po případě docíliti, aby přístroj pracoval po celé měření za podmínek pokud možno stejných. (Tak je na př. nutno kontrolovati opoždění, zaviněné elektromagnetickým relais při měření tíže.)

$\gamma$) Systematické chyby mohou býti konečně zjištěny, užijeme-li k měření různých přístrojů a různých method. (Na př. určíme zeměpisnou šířku některým způsobem užívajícím universálního stroje a pak Nušl-Fričovým cirkumzenitálem.)