

Měřické chyby a jejich vyrovnaní: (podle metody nejmenších čtverců)

Měření s předepsanou přesností. Hospodárnost měření

In: B. Kladivo (author): Měřické chyby a jejich vyrovnaní: (podle metody nejmenších čtverců). (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1943. pp. 140–150.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405506>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VI.

MĚŘENÍ S PŘEDEPSANOU PŘESNOSTÍ. HOSPODÁRNOST MĚŘENÍ.

V měřických vědách, na př. v geodesii, astronomii a částečně i ve fyzice, nejde jen o to, určití z měření nějakou veličinu, nýbrž určití ji s určitou předepsanou přesností. V ojedinelých případech pak bylo dokonce uvažováno, jak určití hledanou veličinu co nejhospodárněji, t. j. jak při daném množství měřické práce získati výsledek co nejpřesnější, a měření byla podle této úvahy provedena.

1. Měření s předepsanou přesností. Vyložím nejprve na několika příkladech, jak přesně nutno provésti měření, má-li býti dosaženo výsledků určité přesnosti. Při tom umožňují odhadovati přesnost měření a výsledků buď největší možné chyby nebo střední chyby.

a) Při tak zv. relativním měření tíže se určuje doba kyvu neproměnného kyvadla jednak na místě B , kde zrychlení tíže (g_B) známe, jednak na místě x , kde chceme zrychlení (g_x) určití. Označíme-li měřené doby kyvu T_B a T_x , bude přibližně

$$T_B = \pi \sqrt{\frac{l}{g_B}}, \quad T_x = \pi \sqrt{\frac{l}{g_x}},$$

kde l je t. zv. redukovaná délka kyvadla. Odtud plyne $g_B T_B^2 = g_x T_x^2$ čili

$$g_x = g_B \left(\frac{T_B}{T_x} \right)^2. \quad (1)$$

Z tohoto vzorce vyplývá

$$\begin{aligned} g_x &= g_B \left(\frac{T_B}{T_B + T_x - T_B} \right)^2 = g_B \left(1 + \frac{T_x - T_B}{T_B} \right)^{-2} = \\ &= g_B - 2g_B \frac{T_x - T_B}{T_B} + 3g_B \left(\frac{T_x - T_B}{T_B} \right)^2 - \dots \end{aligned} \quad (1')$$

S jakou přesností musíme při tom měřiti dobu kyvu T_B a T_x , abychom určili g_x na 1 miligal? (1 mgal = 10^{-3} cm/sec²). Vliv chyb ΔT_B a ΔT_x na g_x je roven přibližně

$$\Delta g_x \doteq \frac{\partial g_x}{\partial T_B} \Delta T_B + \frac{\partial g_x}{\partial T_x} \Delta T_x,$$

a protože ze vzorce (1') pro $T_x \doteq T_B$ vyplývá

$$\frac{\partial g_x}{\partial T_B} \doteq + \frac{2g_B}{T_B}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial T_x} = - \frac{2g_B}{T_B},$$

bude

$$\Delta g_x \doteq - \frac{2g_B}{T_B} (\Delta T_B - \Delta T_x). \quad (1'')$$

Aby

$$|\Delta g_x| \leq \frac{1}{10^3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

musí býti

$$\frac{1}{T_B} |\Delta T_B - \Delta T_x| \leq \frac{1}{2 \cdot 10^6},$$

poněvadž $g_B \doteq 10^3$ cm/sec². Největší možný vliv chyb ΔT_B a ΔT_x nastane, budou-li obě chyby míti opačná znaménka. V tomto nejneprůzračnějším případě musí tedy býti

$$2 \frac{|\Delta T|}{T} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^6}, \quad |\Delta T| \leq \frac{T}{4 \cdot 10^6}.$$

K relativním měřením tíže se užívá kyvadel půlsekundových, při nichž $T \doteq \frac{1}{2}$ sec. Pro ně tedy má býti

$$|\Delta T| \leq \frac{1}{8 \cdot 10^6} \text{ sec} \doteq \frac{1,3}{10^7} \text{ sec}.$$

Výsledek lze shrnouti takto: Abychom ze vzorce (1) vypočetli zrychlení tíže v místě x s chybou nejvyšší rovnou 1 mgal, musíme změřiti doby kyvu půlsekundových kyvadel asi na jednu desetimiliontinu vteřiny přesně. Musíme tedy k tomu

užití takové metody, která zajišťuje tuto přesnost (na př. registrace na filmu).

b) S jakou střední chybou musíme určovat dobu kyvu kyvadel, chceme-li na každé stanici (x) i na stanici připojovací (B) určit vždy čtyři řady měření a má-li střední chyba ve výsledné hodnotě tíže býti menší než $\pm 0,5$ mgal? (Řadou měření jmenujeme určení doby kyvu všech čtyř kyvadel pokud možno rychle za sebou a při podmínkách pokud možno stejných.)

Vztah mezi středními chybami m_1 (pro g_x), m_2 (pro T_B), m_3 (pro T_x) podle vzorce (1'') je

$$m_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial g_x}{\partial T_B}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial g_x}{\partial T_x}\right)^2 m_3^2} \doteq \pm \frac{2g_B}{T_B} \sqrt{m_2^2 + m_3^2} \quad (2)$$

Klademe-li

$$m_2 = m_3, \quad T_B \doteq \frac{1}{2} \text{ sec}, \\ g_x \doteq 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \quad \text{a} \quad m_1 = \pm \frac{1}{2 \cdot 10^3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

plyne ze vzorce (2), že má býti

$$m_3 = \pm \frac{1}{1,13} \cdot 10^{-7} \text{ sec}.$$

A protože T_x je odvozeno ze čtyř řad po čtyřech měřeních doby kyvu, musí jedno měření doby kyvu míti střední chybu asi

$$\pm \frac{\sqrt{16}}{1,13} \cdot 10^{-7} \text{ sec} = \pm 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ sec}.$$

Přesnost jednotlivých měřených elementů má býti tedy taková, aby střední chyba ve výsledné době kyvu byla nejvyšší asi $\pm 3,5 \cdot 10^{-7}$ sec (viz př. c) a d)).

c) Při relativním měření tíže máme vypočísti t. zv. redukci na nekonečně malý výkyv $r_\alpha = \frac{1}{16} T \alpha^2$, kde T je doba kyvu

kyvadla a α výkyv v obloukové míře. Chceme ji určit s chybou menší nebo nejvýš rovnou 10^{-8} sec. Amplituda α se určuje z rozkvyvu d_{mm} na filmu, na němž jsou kyvy kyvadla registrovány, a z konstanty D podle vzorce $\alpha \doteq \frac{1}{2} \frac{d}{D}$.

S jakou přesností musíme určit měřené veličiny?

Určíme-li rozkvyv d s chybou $\Delta d = \pm 2 \cdot 10^{-2}$ mm, bude její vliv na vypočtené r_α roven $\frac{T}{16} \alpha \frac{\Delta d}{D}$. Klademe-li $T = \frac{1}{2}$ sec,

$\alpha = \frac{14,6'}{e'}$ (průměrná hodnota) a $D = 1,72 \cdot 10^3$ mm (přibližná hodnota konstanty D), bude vliv chyby Δd roven $\pm 1,54 \cdot 10^{-9}$ sec.

S jakou přesností musíme pak určit konstantu D , aby celková chyba v r_α nestoupla nad žádanou mez?

Protože z celkové chyby $\pm 10^{-8}$ sec zbývá po odečtení $1,54 \cdot 10^{-9}$ sec jen $8,46 \cdot 10^{-9}$ sec, musí

$$\left| T \cdot \frac{2\alpha}{16} \frac{\partial \alpha}{\partial D} \Delta D \right| \leq \frac{8,46}{10^9} \text{ sec, t. j. } T \frac{\alpha}{16} \frac{d}{D^2} |\Delta D| \leq \frac{8,46}{10^9} \text{ sec.}$$

Klademe-li zase $T = \frac{1}{2}$ sec, $\alpha = \frac{14,6'}{e'}$, $D = 1,72 \cdot 10^3$ mm a za rozkvyv na filmu $d = 60$ mm, musí

$$|\Delta D| \leq \frac{8,46}{10^9} \cdot \frac{16 \cdot 2}{14,6'} e' \frac{1,72^2 \cdot 10^6}{60} \text{ mm} \doteq 3 \text{ mm.}$$

Je tedy patrné, že musíme konstantu D určit s chybou rovnou nejvýš asi 3 mm.

Podobně nutno uvážit vliv měřických chyb na ostatní redukce dob kyvu (redukci na teplotu a hustotu vzduchu, na chod hodin a na soukvyv stativu).*) A střední hodnota součtu všech těchto uvažovaných chyb na dobu kyvu musí být podle př. b) menší než $\pm 3,5 \cdot 10^{-7}$ sec. Ukáží-li se při mě-

*) B. Kládivo: K měření zrychlení tíže, Sborník české vys. školy techn. v Brně, sv. XII, spis 46.

Protože pak množství měřické práce jest dané, musí býti

$$p_1 + p_2 + \dots + p_e = c; \quad (1)$$

(c je konstanta).

Váhy p_j jsou kladné nebo rovné nule; proto je píšeme ve tvaru $p_j = y_j^2$. Máme tedy vhodnou volbou veličin y_j , $j = 1, 2, \dots, e$, učiniti minimem výraz

$$\frac{1}{p_\phi} = \frac{F_1^2}{y_1^2} + \frac{F_2^2}{y_2^2} + \dots + \frac{F_e^2}{y_e^2}$$

při podmínce $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_e^2 = c$. Abychom našli podmínky minima, anulujeme parciální derivace funkce

$$\frac{1}{p_\phi} + k(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_e^2 - c)$$

podle jednotlivých proměnných y_1, y_2, \dots, y_e (srovn. kap. IV, odst. 2). První podmínka bude na př.

$$\begin{aligned} & \frac{-2F_1^2}{y_1^3} + \frac{2F_1}{y_1^2} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial h_l} \frac{\partial h_l}{\partial y_1} + \frac{2F_2}{y_2^2} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\partial F_2}{\partial h_l} \frac{\partial h_l}{\partial y_1} + \dots + \\ & + \frac{2F_e}{y_e^2} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\partial F_e}{\partial h_l} \frac{\partial h_l}{\partial y_1} + 2ky_1 = 0. \end{aligned}$$

Koeficient při $\frac{\partial h_l}{\partial y_1}$ jest

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \frac{F_1}{p_1} \frac{\partial F_1}{\partial h_l} + \frac{F_2}{p_2} \frac{\partial F_2}{\partial h_l} + \dots + \frac{F_e}{p_e} \frac{\partial F_e}{\partial h_l} \right\} = \\ & = -2 \left\{ \frac{F_1}{p_1} a_{1l} + \frac{F_2}{p_2} a_{2l} + \dots + \frac{F_e}{p_e} a_{el} \right\}. \end{aligned}$$

Protože rovnice (6) lze psáti ve tvaru

$$\sum_{j=1}^e \frac{1}{p_j} a_{1j} F_j = 0, \quad \sum_{j=1}^e \frac{1}{p_j} a_{2j} F_j = 0, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^e \frac{1}{p_j} a_{\sigma j} F_j = 0, \quad (6')$$

bude koeficient při $\frac{\partial h_l}{\partial y_1}$ roven nule, a to pro $l = 1, 2, \dots, \sigma$.

Bude tedy první podmínka pro minimum

$$y_1 \left(k - \frac{F_1^2}{p_1^2} \right) = 0.$$

A stejně plynou ostatní podmínky

$$y_2 \left(k - \frac{F_2^2}{p_2^2} \right) = 0, \dots, \quad y_e \left(k - \frac{F_e^2}{p_e^2} \right) = 0. \quad (7)$$

K určení veličiny Φ je třeba znáti ϱ hodnot $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_e$, z nich však σ je určeno podmínkami (3), je tedy nutno určit $\varrho - \sigma$ neznámých.

Protože hodnoty $\frac{F_j}{p_j}$, $j = 1, 2, \dots, \varrho$, splňují σ podmínek (6'), je z nich jen $\varrho - \sigma$ nezávislých. Zvolme za ně hodnoty s indexem $1, 2, \dots, \varrho - \sigma$. Ostatní závislé hodnoty

$$\frac{F_{\varrho-\sigma+1}}{p_{\varrho-\sigma+1}}, \dots, \frac{F_e}{p_e}$$

jsou pak určeny rovnicemi (6'). Až na zvláštní případy, které z úvahy vylučujeme, nebudou rovny konstantě k ; musí tedy [viz (7)] — až na vyloučené zvláštní případy — býti příslušné veličiny y rovny nule. Bude tedy za uvedeného předpokladu

$$y_{\varrho-\sigma+1} = y_{\varrho-\sigma+2} = \dots = y_e = 0$$

a tedy i

$$p_{\varrho-\sigma+1} = p_{\varrho-\sigma+2} = \dots = p_e = 0. \quad (8)$$

Pokud pak z rovnic (6') plynou pro

$$\frac{F_{\varrho-\sigma+1}}{p_{\varrho-\sigma+1}}, \dots, \frac{F_e}{p_e}$$

hodnoty konečné, což předpokládáme, musí býti

$$F_{\varrho-\sigma+1} = F_{\varrho-\sigma+2} = \dots = F_e = 0.$$

Jak patrně z podmínek (8), nemá býti σ neznámých $x_{e-\sigma+1}, x_{e-\sigma+2}, \dots, x_e$ vůbec měřeno. Protože pak k určení funkce Φ je nezbytně nutno měřiti $e - \sigma$ neznámých, musí býti měřeny všechny zbývající úhly $x_1, x_2, \dots, x_{e-\sigma}$. To zase značí, že $p_1, p_2, \dots, p_{e-\sigma}$ musí býti kladná čísla, a z podmínek (7) plyne, že musí

$$\frac{F_1^2}{p_1^2} = \frac{F_2^2}{p_2^2} = \dots = \frac{F_{e-\sigma}^2}{p_{e-\sigma}^2} = k. \quad (9)$$

Absolutní hodnoty veličin

$$\frac{F_1}{p_1}, \frac{F_2}{p_2}, \dots, \frac{F_{e-\sigma}}{p_{e-\sigma}}$$

mají podle toho býti si rovny.

Tedy máme-li docíliti co největší váhy výsledku Φ , musíme měřiti jen právě tolik veličin, kolik je jich k určení hledané funkce Φ nezbytně potřeba. Všechny ostatní veličiny nemají býti měřeny (věta Schreiberova).*)

Ze vzorce (4) plyne

$$\left(\frac{1}{p_\Phi}\right)_{\min} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \dots + \frac{F_{e-\sigma}^2}{p_{e-\sigma}} = k(p_1 + p_2 + \dots + p_{e-\sigma}) = |\sqrt{k}| (|F_1| + |F_2| + \dots + |F_{e-\sigma}|). \quad (10)$$

Jsme tedy vedeni k tomuto postupu: Vhodnou volbou čísel $h_1, h_2, \dots, h_\sigma$ docílíme, aby σ z veličin F_1, F_2, \dots, F_e bylo rovno nule a aby při tom součet absolutních hodnot zbývajících veličin F byl minimální.

Uurčíme-li takto hodnoty F_j , budou podle rovnic (9) hledané váhy p_j rovny

$$p_j = |F_j| \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

*) C. Runge: Der Schreibersche Satz. Z. f. Vermessungswesen, 1890, str. 21—24.

Konstanta k plyne pak z rovnice $p_1 + p_2 + \dots + p_e = c$.
Bude

$$\frac{1}{\sqrt{k}} (|F_1| + |F_2| + \dots + |F_{e-\sigma}|) = c.$$

Jde-li o více podmínek (3), poskytuje skutečné řešení obtíže.

Uvedu jednoduchý příklad s jednou podmínkou (3).

Předpokládáme, že v trojúhelníku ABC je dána strana \overline{AB} a že byly měřeny vnitřní úhly A, B, C s vahami p_1, p_2, p_3 . Jak zvoliti p_1, p_2, p_3 , aby $p_1 + p_2 + p_3 = c$ a aby při tom byla co nejlépe určena výška

$$v_c = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \sin B \sin A?^* \quad (11)$$

Podmínka (3) [viz str. 144] je zde

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C - (180^\circ - A - B - C) = 0.$$

Ze vzorce (11) plyne

$$\Phi = v_c + f_1 \Delta A + f_2 \Delta B + f_3 \Delta C,$$

kde

$$f_1 = v_c \cotg A, \quad f_2 = v_c \cotg B, \quad f_3 = -v_c \cotg C.$$

Pak ze vzorce [IV, (13)] plyne

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3},$$

při čemž

$$F_1 = f_1 - h_1, \quad F_2 = f_2 - h_1, \quad F_3 = f_3 - h_1$$

a podle vzorců [IV, (12)] jest

$$h_1 = \frac{q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Máme tedy určit minimum výrazu

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{y_1^2} + \frac{F_2^2}{y_2^2} + \frac{F_3^2}{y_3^2} \text{ při podmínce } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c.$$

*) Jordan: I, l. c. str. 139—141.

Podmínky minima jsou

$$y_1 \left(k - \frac{F_1^2}{p_1^2} \right) = 0, \quad y_2 \left(k - \frac{F_2^2}{p_2^2} \right) = 0, \quad y_3 \left(k - \frac{F_3^2}{p_3^2} \right) = 0.$$

Protože

$$\frac{F_1}{p_1} + \frac{F_2}{p_2} + \frac{F_3}{p_3} = 0,$$

jsou dvě z hodnot $F_j : p_j$ nezávislé a jedna je závislá. Pro nezávislé musí být $F : p = \pm \sqrt{k}$; není-li závislá hodnota ve zvláštním případě rovna k , bude příslušné $y = 0$ a tedy i příslušné $F = 0$.

Předpokládejme, že $A > B > C$ a že jsou v 1. kvadrantě. Klademe-li $F_1 = 0$, je $h_1 = v_c \cotg A$ a

$$|F_2| + |F_3| = v_c \{ |\cotg B - \cotg A| + |-\cotg C - \cotg A| \} = v_c (\cotg B + \cotg C).$$

Při $F_2 = 0$, je $h_1 = v_c \cotg B$ a

$$|F_1| + |F_3| = v_c (2 \cotg B - \cotg A + \cotg C).$$

Při $F_3 = 0$, je $h_1 = -v_c \cotg C$ a

$$|F_1| + |F_2| = v_c (\cotg A + \cotg B + 2 \cotg C).$$

Protože

$$\begin{aligned} 2 \cotg B - \cotg A + \cotg C - \cotg B - \cotg C &= \\ &= \cotg B - \cotg A > 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \cotg A + \cotg B + 2 \cotg C - 2 \cotg B + \cotg A - \\ - \cotg C = 2 \cotg A - \cotg B + \cotg C > 0, \end{aligned}$$

je v uvažovaném případě $|F_2| + |F_3|$ nejmenší. Nejlepší rozdělení vah by tedy bylo v poměru čísel

$$\begin{aligned} |F_1| &= 0, \quad |F_2| = v_c |\cotg B - \cotg A|, \\ |F_3| &= v_c |\cotg C + \cotg A|. \end{aligned}$$

Je-li

$$\begin{aligned}A &= 78^\circ, \cotg A = 0,213, \\B &= 68^\circ, \cotg B = 0,404, \\C &= 34^\circ, \cotg C = 1,483,\end{aligned}$$

je nejlepší rozdělení vah v poměru čísel

$$| \cotg B - \cotg A | = 0,191, \quad | \cotg C + \cotg A | = 1,696.$$

Má-li býti na př. $p_1 + p_2 + p_3 = 30$, musí býti konstanta úměrnosti $30 : 1,887$ a tedy $p_1 = 0$, $p_2 \doteq 3,0$, $p_3 \doteq 27,0$, t. j. úhel A nemá býti měřen, úhel B má býti měřen třikrát a úhel C má býti měřen 27krát.