Otakar Borůvka

Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante

C. R. Acad. Sci. Paris t. 187, 1928, 334-336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500010

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante.* Note (1) de M. O. BORŮVKA.

1. On a déjà étudié à plusieurs reprises (2) des surfaces minima réelles, plongées dans l'espace euclidien à quatre dimensions, qui jouissent de la propriété que l'indicatrice de la courbure, en chaque point, soit une circonférence et l'on a obtenu à ce sujet des résultats intéressants ; en particulier, on sait que pour qu'une surface réelle plongée dans l'espace euclidien à quatre dimensions puisse être définie par une équation de la forme $u+iv=f(x+iy)$, f étant une fonction analytique, il faut et il suffit (3) qu'elle jouisse des propriétés indiquées. Cependant, la question de la construction géométrique de telles surfaces ainsi que la question de la recherche et des propriétés essentielles des surfaces, jouissant des mêmes propriétés métriques, mais plongées dans un espace non euclidien, n'ont pas été étudiées jusqu'ici.

2. *Les surfaces minima, plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante* c, *dont l'indicatrice de la courbure, en chaque point, est une circonférence, existent, quelle que soit la valeur de la courbure de l'espace ambiant; elles dépendent, en général, de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

3. *Dans le cas de l'espace euclidien* ($c=0$), projectivement, *ces surfaces sont engendrées par des points d'intersection de deux cônes de la deuxième*

(1) Séance du 27 juillet 1928.

(2) S. KUIETNIEWSKI, *Ueber Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven* (*Diss. Zürich*, Speidel, 1902). — K. KOMMERELL, *Riemannsche Flächen in ebenen Raum v. vier Dimensionen* (*Math. Annalen*, 60, 1905, p. 548). L. P. EISENHART, *Minimal surfaces in euclidean four space* (*Amer. Journ. of Math.*, 34, 1912, p. 215).

(3) L. P. EISENHART, *loc. cit.*

espèce [1], *dont les axes ne se coupent pas*. Évidemment, une surface ainsi engendrée contient deux familles de courbes planes, situées dans les plans des deux cônes; *les plans tangents à la surface le long d'une courbe plane quelconque d'une famille passent par un point fixe, qui est situé sur l'axe du cône, dont les plans contiennent les courbes de l'autre famille*. La métrique, qui attribue, aux surfaces ainsi engendrées, les propriétés indiquées plus haut, est déterminée par une quadrique contenant les axes des deux cônes. Le calcul montre, en particulier, que, dans l'espace euclidien à quatre dimensions, il n'existe pas de surfaces minima dont l'indicatrice de la courbure soit une circonférence *de rayon constant*.

4. *Dans le cas d'un espace non euclidien* ($c \pm 0$), du point de vue projectif, *les surfaces considérées sont engendrées par des points d'intersection des couples de plans osculateurs de deux courbes situées sur une quadrique non dégénérée et telles que leurs tangentes sont elles-mêmes sur la même quadrique*. Cette quadrique, prise comme l'absolu, détermine la métrique en question.

5. Un cas particulièrement intéressant se présente, lorsqu'on se demande s'il existe, dans l'espace projectif à quatre dimensions, parmi les surfaces, qui sont engendrées par des points d'intersection des couples de plans osculateurs de deux courbes situées sur une quadrique non dégénérée et telles que leurs tangentes sont elles-mêmes sur la même quadrique, des surfaces, qui jouissent de la propriété *d'être coupées par les plans osculateurs d'une des deux courbes considérées des coniques suivantes*. On trouve qu'*il existe une surface et une seule jouissant de cette propriété et que c'est la projection (prise d'un point général, c'est-à-dire non situé sur l'hypersurface des coniques dégénérées) de la surface de Véronèse; les deux courbes, dont les plans osculateurs l'engendrent, se confondent dans une courbe rationnelle normale du quatrième degré qui, à son tour, est située sur la surface*. On arrive ainsi à une construction nouvelle de la projection de la surface de Véronèse et une considération simple montre que *cette construction n'est possible que d'une seule manière;* c'est-à-dire, il n'existe, sur la surface considérée, qu'une courbe rationnelle normale du quatrième degré dont les plans osculateurs l'engendrent. En reprenant le point de vue métrique, la surface en question est susceptible d'une définition métrique dans un espace non euclidien et précisément, elle appartient aux surfaces minima, dont l'indicatrice en chaque

(1) Un cône de la deuxième espèce est la totalité de ∞^1 plans passant par une droite fixe.

point est une circonférence; *parmi de telles surfaces elle est caractérisée par la propriété que le rayon de l'indicatrice est le même en chaque point de la surface.* Mais il existe une relation entre le rayon de l'indicatrice et la courbure de l'espace; en particulier, *pour que le rayon de l'indicatrice soit réel, il faut et il suffit que l'espace ambiant soit à courbe positive.* Quant au rôle que joue la quadrique absolue par rapport à la surface considérée, cette surface étant engendrée par des points d'intersection des couples de plans osculateurs d'une courbe rationnelle normale du quatrième degré, située sur la surface, et d'une seule, il existe une quadrique (non dégénérée) et une seule qui contient cette courbe et ses tangentes. *C'est précisément la quadrique qui attribue à la surface la métrique en question.* On peut encore définir cette quadrique comme *la projection de la première polaire de l'hypersurface des coniques dégénérées associée au centre de la projection.*

La méthode qui m'a permis d'obtenir ces résultats est la méthode du repère mobile, sous la forme employée par M. E. Cartan.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **187**, p. 334, séance du 6 août 1928.)

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
84741-28 Quai des Grands Augustins, 55.