Otakar Borůvka

Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante

Spisy přír. fak. MU, č. 106, 1929, 28 s.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500014`

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1929 | ČÍS. 106

SUR UNE CLASSE DE SURFACES MINIMA PLONGÉES DANS UN ESPACE À CINQ DIMENSIONS À COURBURE CONSTANTE

PAR

OTAKAR BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES MINIMA PLONGÉES DANS UN ESPACE À CINQ DIMENSIONS À COURBURE CONSTANTE.

Dans un Mémoire récemment paru* je me suis occupé des surfaces minima, plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante, qui jouissent de la propriété que l'indicatrice de la courbure, à chaque point, est une circonférence. Les résultats que j'ai obtenus à ce sujet, laissaient prévoir de ne pas admettre une généralisation immédiate pour des surfaces, jouissant des mêmes propriétés géométriques, mais plongées dans un espace à nombre de dimensions supérieur à quatre et spécialement dans un espace à cinq dimensions. C'est pourquoi j'ai traité l'étude de telles surfaces. Les résultats, auxquels je suis arrivé à ce sujet, font l'objet du Mémoire présent. Ils sont bien différents de ceux que j'ai obtenus pour des surfaces en question, plongées dans un espace à quatre dimensions et ils ont un rapport étroit avec la géométrie projective des réseaux. La méthode que j'applique dans ce Mémoire est encore la méthode extrêmement féconde du repére mobile sous la forme employée par M. E. Cartan, comme je l'ai appliquée dans le Mémoire ci-dessus**.

Ce Mémoire se divise en cinq chapitres dont le premier contient des explications préliminaires indispensables pour comprendre la question. Ces explications préliminaires étant analogues à celles que j'ai exposées dans le Mémoire cité plus haut, elles ne sont faites que brièvement.

Dans le deuxième chapitre je m'occupe de la question d'existence des surfaces jouissant des propriétés indiquées. Je trouve, *quelque soit la courbure de l'espace, il existe des surfaces considérées et elles dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

Dans le troisième chapitre je m'occupe des surfaces plongées dans l'espace *euclidien.* Je trouve, *pourque une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, puisse être définie comme une surface minima de l'espace euclidien à cinq dimensions dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau tel, que la suite de transformées laplaciennes dans un et*

* *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante. (Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928.)*

On trouve un résumé de résultats principeaux de ce Mémoire dans ma Note aux *Comptes Rendus des séances de l Académie de Sciences, Paris; t. 187, p. 334 (1928).*

** Le lecteur pourra consulter le Mémoire de *M. E. Cartan, La géometrie des espaces de Riemann (Mémorial des Sciences mathém., Fasc. IX., 1925, Paris).*

l'autre sens s'arrête après la première transformation selon le cas de Laplace sur une courbe située sur une quadrique non-dégénérée d'un espace à quatre dimensions; les deux courbes en question peuvent être arbitraires, à la condition près, qu'elles ne soient pas des droites toutes les deux et que leurs tangentes sont elles aussi sur la même quadrique. La quadrique en question est précisement la quadrique absolue de l'espace euclidien considéré. En particulier, le calcul montre que, dans l'espace euclidien à cinq dimensions, il n'existe pas des surfaces minima dont l'indicatrice de la courbure est une circonférence de rayon constant.

Le quatrième chapitre contient quelques résultats sur des surfaces considérées plongées dans un espace *non-euclidien.* Je trouve qu'il existe deux types de telles surfaces, les surfaces *générales* dépendant de quatre fonctions arbitraires d'un argument, les autres de trois fonctions seulement. *Pourque une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, puisse être définie comme une surface minima générale, d'un espace non-euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau périodique à période six, et autopolaire par rapport à une quadrique.* Cette quadrique détermine la métrique de l'espace et le réseau en question donne les deux familles de courbes minima sur la surface. On trouve ainsi une interprétation géométrique parfaite d'un problème de M. Guichard* et de plus, on trouve la généralité de la solution de ce problème. En vertu de la théorie générale des réseaux, le résultat précédent entraîne que *à chaque surface minima générale considérée, on peut associer une autre surface ayant les mêmes propriétés métriques et on peut établir entre ces deux surfaces une correspondance ponctuelle biunivoque telle que les réseaux formés, sur les deux surfaces, par les deux familles de courbes minima se déduisent l'un de l'autre par trois transformations successives de Laplace.* Cette propriété, à son tour, caractérise les surfaces *générales.* Les autres surfaces, dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument, s'obtiennent des précédentes *si, dans un sens, la deuxième transformée laplacienne du réseau, formé par les deux familles de courbes minima, se réduit à une courbe.* Sur une telle surface, une famille de courbes minima est formée par des courbes planes, les plans de ces courbes étant des plans osculateurs de la courbe à laquelle se réduit la deuxième laplacienne du réseau.

Enfin, dans le cinquième chapitre je considère un cas particulier des surfaces minima, plongées dans un espace *non-euclidien,* dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence: ce sont les surfaces qui jouissent de la propriété d'avoir *le même rayon de l'indicatrice à chaque point de la surface.* Je trouve qu'il en existe soit parmi les surfaces générales soit parmi les autres. Dans *le premier cas*

---

* Voir p. 19.

il existe une surface et une seule de cette espèce et elle est caractérisée, projectivement, par la propriété que le réseau périodique et autopolaire, formé sur la surface par les deux familles de courbes minima, est à invariant *constant.* On trouve facilement les équations finies de la surface en question; c'est une surface algébrique. Dans *le deuxième cas,* je trouve qu'il existe une famille de surfaces jouissant des propriétés indiquées, cette famille dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument. Je trouve les équations finies de ces surfaces. Du point de vue projective, elles sont caractérisées par la propriété que, la famille de courbes minima, qui sont planes, soit formée par des coniques.

I. Préliminaires.

1. Plaçons nous dans un espace à cinq dimensions à courbure constante c et faisons correspondre à chaque point M de cet espace un repère formé de cinq vecteurs rectangulaires unitaires e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Si l'on passe du point M au point infiniment voisin ces vecteurs subissent des variations et on a les formules de la forme

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \omega_4 e_4 + \omega_5 e_5, \\ de_i &= \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3 + \omega_{i4} e_4 + \omega_{i5} e_5. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \qquad (1)$$

Les quantités ω qui figurent dans ces formules sont des formes différentielles linéaires aux différentielles des coordonnées curvilignes de l'espace et elles satisfont à cause des suppositions faites aux sujet des vecteurs e aux relations linéaires

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5) \qquad (2)$$

quelques soient les deux indices i, j distincts ou non. L'espace étant supposé à courbure constante c on a les formules de structure

$$\omega_i' = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}], \qquad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] - c[\omega_i \omega_j]. \qquad (3)$$

Ajoutons que l'élément linéaire de l'espace est donné par la formule

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2.$$

2. Supposons que le lieu du point M soit une surface (S) et que le choix du repère attaché à chaque point de cette surface soit tel que les vecteurs e_1, e_2 soient tangents à la surface. Cette supposition se traduit par les formules

$$\omega_3 = 0, \ \omega_4 = 0, \ \omega_5 = 0 \qquad (4)$$

qui entraînent, d'après les équations de structure,

$$[\omega_1 \omega_{13}] + [\omega_2 \omega_{23}] = 0, \ [\omega_1 \omega_{14}] + [\omega_2 \omega_{24}] = 0, \ [\omega_1 \omega_{15}] + [\omega_2 \omega_{25}] = 0. \quad (5)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, & \omega_{14} &= a'\omega_1 + b'\omega_2, & \omega_{15} &= a''\omega_1 + b''\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2, & \omega_{24} &= b'\omega_1 + c'\omega_2, & \omega_{25} &= b''\omega_1 + c''\omega_2, \end{aligned} \qquad (6)$$

les a, b, ... étant des fonctions des variables dont dépend le repère attaché à la surface.

Dans un point quelconque M de la surface (S) la *courbure normale* est définie par le vecteur normal à (S) dont les composantes sont les formes quadratiques

$$\Phi_3 = a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2, \qquad \Phi_4 = a'\omega_1^2 + 2b'\omega_1\omega_2 + c'\omega_2^2.$$
$$\Phi_5 = a''\omega_1^2 + 2b''\omega_1\omega_2 + c''\omega_2^2,$$

chacune divisée par ds^2.

Pourque, en particulier, la surface *(S)* soit une surface minima il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$a + c = 0, \qquad a' + c' = 0, \qquad a'' + c'' = 0$$

de sorte que, pour une telle surface, la courbure normale est déterminée par les formes quadratiques

$$\Phi_3 = a(\omega_1^2 - \omega_2^2) + 2b\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_4 = a'(\omega_1^2 - \omega_2^2) + 2b'\omega_1\omega_2,$$
$$\Phi_5 = a''(\omega_1^2 - \omega_2^2) + 2b''\omega_1\omega_2.$$

Or, si l'on pose $\omega_1 = ds\ cos\ \Theta$, $\omega_2 = ds\ sin\ \Theta$ et que l'on désigne par X_3, X_4, X_5 les composantes du vecteur de courbure normale, on obtient

$$X_3 = a\cos 2\Theta + b\sin 2\Theta, \qquad X_4 = a'\cos 2\Theta + b'\sin 2\Theta,$$
$$X_5 = a''\cos 2\Theta + b''\sin 2\Theta, \tag{7}$$

de sorte qu'on voit que, en changent Θ, l'extrémité du vecteur de courbure normal décrit une conique dont le centre est le point correspondant de la surface; c'est *l'indicatrice de la courbure normale* de la surface minima considérée.

II. L'existence et la généralité des surfaces minima dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence.

1. Nous allons nous occuper des surfaces pour lesquelles *l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence* (de rayon différent de zéro).

Pour une telle surface (s'il en existe) les fonctions $a, b, \ldots$ vérifient les relations que l'on obtient en exprimant que l'expression

$$X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2)\cos^2 2\Theta + (b^2 + b'^2 + b''^2)\sin^2 2\Theta +$$
$$+ 2(ab + a'b' + a''b'')\sin 2\Theta \cos 2\Theta$$

ne dépend pas de Θ et ces relations sont suffisantes.

Les relations en question sont

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = R^2, \qquad b^2 + b'^2 + b''^2 = R^2, \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0, \tag{8}$$

R étant une variable (le rayon de la circonférence) que nous introduissons pour la commodité de l'écriture.

Les surfaces étudiées sont donc définies par les équations

$$\omega_3 = 0,\ \omega_4 = 0,\ \omega_5 = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, & \omega_{14} &= a'\omega_1 + b'\omega_2, & \omega_{15} &= a''\omega_1 + b''\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 - a\omega_2, & \omega_{24} &= b'\omega_1 - a'\omega_2, & \omega_{25} &= b''\omega_1 - a''\omega_2, \end{aligned} \tag{9}$$

les $a, b, a' \ldots$ vérifiant identiquement les relations (8).

Les formules de structure donnent

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1(da-2b\omega_{12}-a'\omega_{34}-a''\omega_{35})]+[\omega_2(db+2a\omega_{12}-b'\omega_{34}-b''\omega_{35})]=0,\\
&[\omega_1(db+2a\omega_{12}-b'\omega_{34}-b''\omega_{35})]-[\omega_2(da-2b\omega_{12}-a'\omega_{34}-a''\omega_{35})]=0,\\
&[\omega_1(da'-2b'\omega_{12}+a\omega_{34}-a''\omega_{45})]+[\omega_2(db'+2a'\omega_{12}+b\omega_{34}-b''\omega_{45})]=0,\\
&[\omega_1(db'+2a'\omega_{12}+b\omega_{34}-b''\omega_{45})]-[\omega_2(da'-2b'\omega_{12}+a\omega_{34}-a''\omega_{45})]=0,\\
&[\omega_1(da''-2b''\omega_{12}+a\omega_{35}+a'\omega_{45})]+[\omega_2(db''+2a''\omega_{12}+b\omega_{35}+b'\omega_{45})]=0,\\
&[\omega_1(db''+2a''\omega_{12}+b\omega_{35}+b'\omega_{45})]-[\omega_2(da''-2b''\omega_{12}+a\omega_{35}+a'\omega_{45})]=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ces formules montrent que, en laissant fixes les paramètres qui déterminent la position du point M sur la surface et en changeant infiniment peu les autres, dont dépend le repère attaché à la surface, les fonctions $a, b, \ldots$ subissent des variations qui peuvent s'exprimer par les formules

$$
\begin{aligned}
\delta a &= 2be_{12}+a'e_{34}+a''e_{35}, & \delta b &= -2ae_{12}+b'e_{34}+b''e_{35},\\
\delta a' &= 2b'e_{12}-ae_{34}+a''e_{45}, & \delta b' &= -2a'e_{12}-be_{34}+b''e_{45},\\
\delta a'' &= 2b''e_{12}-ae_{35}-a'e_{45}, & \delta b'' &= -2a''e_{12}-be_{35}-b'e_{45},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

les e étant les formes ω écrites avec des différentielles correspondantes.

Or, les formules (8) montrent en particulier que, pour une surface en question les b, b', b'' ne peuvent pas être nuls à la fois. On peut supposer, à cause de la symétrie, sans restreindre la généralité, $b''\neq 0$. Alors, les formules (11) montrent qu'on peut s'arranger, en choisissant convenablement le repère, que l'on ait $a''=b=0$. On a ensuite, d'après (8),

$$a^2+a'^2=R^2,\quad b'^2+b''^2=R^2,\quad a'b'=0$$

et les formules (11) ont la forme

$$
\begin{aligned}
\delta a &= a'e_{34}, & 2ae_{12}-b'e_{34}-b''e_{35} &= 0,\\
\delta a' &= 2b'e_{12}-ae_{34}, & \delta b' &= -2a'e_{12}+b''e_{45},\\
2b''e_{12}-ae_{35}-a'e_{45} &= 0, & \delta b'' &= -b'e_{45}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Or, la relation $a'b'=0$ exige $a'=0$ ou bien $b'=0$. Les formules précédentes montrent que, par un choix convenable du système de référence, on peut s'arranger d'abord, que l'on ait $b'=0$. On a ensuite

$$a^2+a'^2=R^2,\quad b''=R$$

et les formules (12) s'écrivent

$$
\begin{aligned}
2Re_{12}-ae_{35}-a'e_{45} &= 0, & \delta a &= a'e_{34},\\
2ae_{12}-Re_{35} \qquad\quad &= 0, & \delta a' &= -ae_{34},\\
2a'e_{12} \qquad\quad -Re_{45} &= 0, & \delta R &= 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Dans ces équations, les premières trois sont compatibles. Comme a, a' ne peuvent pas être nuls à la fois, on voit qu'on peut supposer $a'=0$.

En définitive, en choisissant convenablement le système de référence attaché à la surface on a

$$a=R,\quad a'=a''=b=b'=0,\quad b''=R$$

de sorte qu'on peut définir les surfaces en question par les équations suivantes

$$\begin{aligned} &\omega_3 = 0, && \omega_4 = 0, && \omega_5 = 0, \\ &\omega_{13} = R\omega_1, && \omega_{14} = 0, && \omega_{15} = R\omega_2, \\ &\omega_{23} = -R\omega_2, && \omega_{24} = 0, && \omega_{25} = R\omega_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Les formules de structure étant, d'après (10),

$$\begin{gathered} [\omega_1 \frac{dR}{R}] + [\omega_2 (2\omega_{12} - \omega_{35})] = 0, \quad [\omega_1 (2\omega_{12} - \omega_{35})] - [\omega_2 \frac{dR}{R}] = 0, \\ [\omega_1 \omega_{34}] - [\omega_2 \omega_{45}] = 0, \quad [\omega_1 \omega_{45}] + [\omega_2 \omega_{34}] = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

on les peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &[(\omega_1 + i\omega_2) (\frac{dR}{R} - i\bar{2}\omega_{12} - \omega_{35})] = 0, \\ &[(\omega_1 - i\omega_2) (\frac{dR}{R} + i\overline{2\omega_{12} - \omega_{35}})] = 0, \qquad (i = \sqrt{-1}) \\ &[(\omega_1 + i\omega_2) (\omega_{34} + i\omega_{45})] = 0, \\ &[(\omega_1 - i\omega_2) (\omega_{34} - i\omega_{45})] = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

On en voit que,

quelque soit la valeur de la courbure de l'espace, il existe des surfaces considérées et elles dépendent de quatre fonctions d'un argument.

On voit de plus que le système d'équations de Pfaff (14) qui définit les surfaces en question a deux familles de caractéristiques $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$; *ce sont les courbes minima des surfaces considèrées.*

III. Surfaces plongées dans l'espace euclidien.

1. Nous allons déterminer l'intégrale générale du système qui définit les surfaces étudiées plongées dans l'espace euclidien ($c = 0$).

Pour cela, considérons le système d'équations différentielles auquel conduisent les équations (14). On a

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\ de_1 &= \omega_{12} e_2 + R\omega_1 e_3 + R\omega_2 e_5, \\ de_2 &= -\omega_{12} e_1 - R\omega_2 e_3 + R\omega_1 e_5, \\ de_3 &= -R\omega_1 e_1 + R\omega_2 e_2 + \omega_{34} e_4 + \omega_{35} e_5, \\ de_4 &= -\omega_{34} e_3 + \omega_{45} e_5, \\ de_5 &= -R\omega_2 e_1 - R\omega_1 e_2 - \omega_{35} e_3 - \omega_{45} e_4. \end{aligned} \tag{17}$$

Le système avec les formules de structure (3) peut être envisagé comme définissant, dans l'espace projectif à cinq dimensions, une surface, lieu du point M, et en même temps un repère mobile formé par les points M, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Par rapport à ce système de référence chaque point A de l'espace peut être exprimé par une expression de la forme

$$A = xM + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5,$$

les x étant les coordonnées du point A par rapport au système considéré. On vérifie facilement que, dans l'hyperplan $x=0$ la quadrique $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0$ est fixe est c'est précisement la quadrique absolue qui fait de l'espace projectif considéré l'espace euclidien d'où nous sommes partis. Remarquons que les points $e_1 \pm i e_2$, $e_3 \pm i e_5$ sont situés sur la quadrique absolue.

Cela étant, il est facile de voir que, en posant

$$E_1 = e_1 + ie_2, \quad E_2 = e_3 + ie_5, \quad E_3 = e_4, \quad E_4 = e_3 - ie_5, \quad E_5 = e_1 - ie_2$$
$$\Omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2), \qquad \Omega_2 = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2), \tag{18}$$

le système (17) peut être remplacé par le système équivalent

$$\begin{array}{llllll}
dM = & \Omega_1 E_1 & & & & +\Omega_2 E_5, \\
dE_1 = & -i\omega_{12} E_1 & +2R\Omega_1 E_2, & & & \\
dE_2 = & -2R\Omega_2 E_1 & -i\omega_{35} E_2 & +(\omega_{34}-i\omega_{45})E_3, & & \\
dE_3 = & & -\tfrac{1}{2}(\omega_{34}+i\omega_{45})E_2 & & -\tfrac{1}{2}(\omega_{34}-i\omega_{45})E_4, & \\
dE_4 = & & & (\omega_{34}+i\omega_{45})E_3 & +i\omega_{35} E_4 & -2R\Omega_1 E_5, \\
dE_5 = & & & & 2R\Omega_2 E_4 & +i\omega_{12} E_5.
\end{array} \tag{19}$$

On en voit d'abord que le point E_1 (E_5) décrit une courbe dont la tangente, à chaque point passe par le point E_2 (E_4) et que cette courbe ainsi que chaque sa tangente soient situées sur la quadrique absolue. Si l'on se déplace sur une caractéristique quelconque de la famille $\Omega_1=0$ $(\Omega_2=0)$ le point E_1 (E_5) reste fixe en position. Or, la première des équations (19) montre que si l'on fixe sur la surface (M) une courbe quelconque de la famille $\Omega_1=0$ $(\Omega_2=0)$, la tangente à une courbe quelconque de la famille $\Omega_2=0$ $(\Omega_1=0)$ au point où cette courbe rencontre la courbe en question, passe par le point E_1 (E_5). Par suite, les deux familles de caractéristiques $\Omega_1\Omega_2=0$ forment sur la surface (M) un réseau, les développables circonscrites à la surface (M) le long des courbes de la famille $\Omega_1=0$ $(\Omega_2=0)$ étant des surfaces coniques dont les sommets décrivent la courbe qui est le lieu du point E_1 (E_5). On en conclût immédiatement que, en posant $\Omega_1=e^q dv$, $\Omega_2=e^p du$ les coordonnées du point M satisfont à une équation de *Laplace* dont les invariants sont nuls tous les deux. On déduit facilement des équations du système (19) que cette équation est précisement

$$M_{uv}=0$$

de sorte que l'on a

$$M=U+V$$

U étant une fonction de la seule variable u, V une fonction de la seule variable v. On a ainsi a priori douze fonctions d'une variable et il s'agit de les déterminer de manière à satisfaire au système (19).

On voit d'abord, pourque la surface (M) n'appartienne pas à un espace à moins de cinq dimensions il faut que les deux courbes que décrivent les points E_1 et E_5 ne soient pas des droites toutes les deux.

Dans la suite *nous nous bornons au cas général où aucune de ces deux courbes n'est une droite.*

On a $E_1 = e^{-q} V'$, $E_5 = e^{-p} U'$ et par suite ni les fonctions U' et V' ne sont pas nuls à la fois ni les fonctions U'' et V'' ne peuvent pas être proportionelles aux U' et V' respectivement. Nons savons que les deux courbes que décrivent les points E_1, E_5 ainsi que leurs tangentes sont situées sur la quadrique absolue que nous écrivons, pour avoir plus de la symétrie, sous la forme

$$X_5 = 0,\ X^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0. \tag{20}$$

On a donc, en désignant les fonctions U et V d'une manière facile à comprendre,

$$\begin{aligned} U_5' = 0;\quad & U'^2 + U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 + U_4'^2 = 0, \\ & U''^2 + U_1''^2 + U_2''^2 + U_3''^2 + U_4''^2 = 0; \\ V'_5 = 0;\quad & V'^2 + V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 + V_4'^2 = 0, \\ & V''^2 + V_1''^2 + V_2''^2 + V_3''^2 + V_4''^2 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Evidemment, on peut choisir une des fonctions U pour une variable indépendante nouvelle et une des fonctions V pour l'autre. De plus, on conclût facilement de la forme du système (19) que, si l'une des fonctions U', soit U_i', est nul, il en soit de même pour la fonction V_i' correspondante et inversement. On peut donc écrire les relations (21) sous la forme

$$\begin{aligned} U_5' = 0;\quad & 1 + U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 + U_4'^2 = 0, \\ & U_1''^2 + U_2''^2 + U_3''^2 + U_4''^2 = 0; \\ V_5' = 0;\quad & 1 + V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 + V_4'^2 = 0, \\ & V_1''^2 + V_2''^2 + V_3''^2 + V_4''^2 = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Il n'existe pas, en général, entre les fonctions U, V d'autres relations distinctes de celles-ci car, on sait que, l'intégrale générale du système considéré dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument. Par suite, en choisissant convenablement les variables in dépendantes, les coordonnées cartesiennes des surfaces considérées sont données par les formules

$$X = u + v,\ X_1 - U_1 + V_1,\ X_2 = U_2 + V_2,\ X_3 = U_3 + V_3,\ X_4 = U_4 + V_4, \tag{23}$$

u, v étant les variables indépendantes, U et V étant liées par les relations (22).

2. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Pourque une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, puisse être définie comme une surface minima de l'espace euclidien à cinq dimensions dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau tel, que la suite de transformées laplaciennes dans un et l'autre sens s'arrête après la première transformation selon le cas de Laplace sur une courbe située sur une quadrique non-dégénérée d'un espace à quatre dimensions;

les deux courbes en question peuvent être arbitraires, à la condition près, qu'elles ne soient pas des droites toutes les deux et que leurs tangentes sont elles aussi sur la même quadrique.

Nous venons de démontrer que, chaque surface minima plongée dans l'espace euclidien à cinq dimensions dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, envisagée comme une surface de l'espace projectif, est douée d'un réseau jouissant des propriétés ci-dessus. Donc, il ne reste que établir la réciproque.

Or, soit dans l'espace projectif à cinq dimensions, M un point quelconque d'une surface douée d'un réseau jouissant des propriétés indiquées. Faisons correspondre au point M un repère mobile formé par les points M, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. On aura un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} dM &= \omega_{oo} M + \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \omega_4 e_4 + \omega_5 e_5, \\ de_i &= \omega_{io} M + \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3 + \omega_{i4} e_4 + \omega_{i5} e_5. \end{aligned} \quad (i=1,2,3,4,5) \quad (24)$$

Chaque point A de l'espace peut être mis sous la forme

$$A = xM + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5, \quad (25)$$

les x étant les coordonnées de ce point par rapport au repère mobile. Pourque le point A ne dépend pas de la position du repère il faut et il suffit que les x vérifient les équations différentielles

$$\begin{aligned} dx &+ x\omega_{oo} + x_1\omega_{10} + x_2\omega_{20} + x_3\omega_{30} + x_4\omega_{40} + x_5\omega_{50} = 0, \\ dx_i &+ x\omega_i + x_1\omega_{1i} + x_2\omega_{2i} + x_3\omega_{3i} + x_4\omega_{4i} + x_5\omega_{5i} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Cela étant, exprimons que la quadrique $x=0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$ soit fixe.

On obtient par un calcul facile les conditions

$$\omega_{io} = 0; \quad \omega_{ii} = \omega_{oo}; \quad \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (27)$$

et on en peut ajouter $\omega_{oo} = 0$, car cela exprime que le déterminant formé par les coordonnées des sommets du repère mobile ait une valeur constante.

Or, on peut, évidemment, particulariser le repère mobile de manière à prendre les points e_1, e_2 dans le plan tangent au point M. Ce choix étant fait, on a

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0, \quad \omega_5 = 0 \quad (28)$$

et ces relations entraînent, d'après les formules de structure de l'espace projectif

$$[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = 0, \; [\omega_1\omega_{14}] + [\omega_2\omega_{24}] = 0, \; [\omega_1\omega_{15}] + [\omega_2\omega_{25}] = 0. \quad (29)$$

On arrive ainsi au système suivant

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\ de_i &= \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3 + \omega_{i4} e_4 + \omega_{i5} e_5, \\ &\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \qquad (i,j = 1,2,3,4,5) \end{aligned} \quad (30)$$

La surface (M) étant douée d'un réseau supposons que ce soient les deux familles $\omega_1 + i\omega_2 = 0$, $\omega_1 - i\omega_2 = 0$ qui le forment. Soient E_1, E_5 les transformées laplaciennes de ce réseau dans les deux sens, ces points étant situés sur la quadrique

$$X = 0, \; X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0. \tag{31}$$

Or, les points E_1, E_5 sont contenus dans le plan tangent au point M et par suite ils s'expriment comme des combinaisons linéaires des points M, e_1, e_2; comme ils sont situés sur la quadrique (31) ils sont proportionnels aux $e_1 + ie_2$, $e_1 - ie_2$ et on peut prendre tout simplement

$$E_1 = e_1 + ie_2, \qquad E_5 = e_1 - ie_2.$$

On a

$$\begin{aligned} dE_1 &= -i\omega_{12}E_1 + \overline{\omega_{13} + i\omega_{23}}\, e_3 + \overline{\omega_{14} + i\omega_{24}}\, e_4 + \overline{\omega_{15} + i\omega_{25}}\, e_5, \\ dE_5 &\quad\; i\omega_{12}E_5 + \overline{\omega_{13} - i\omega_{23}}\, e_3 + \overline{\omega_{14} - i\omega_{24}}\, e_4 + \overline{\omega_{15} - i\omega_{25}}\, e_5. \end{aligned} \tag{32}$$

Exprimons que la suite de réseaux transformés se termine dans les deux sens après la première transformation selon le cas de Laplace. Pourqu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les points E_1, E_5 décrivent des courbes et qu'ils restent fixes lorsqu'on se déplace sur une courbe quelconque de la famille $\omega_1 - i\omega_2 = 0$, $\omega_1 + i\omega_2 = 0$ respectivement. Les conditions nécéssaires et suffisantes, pour qu'il en soit ainsi, sont évidement

$$\begin{aligned} \omega_{13} + i\omega_{23} &= \alpha_3(\omega_1 - i\omega_2), & \omega_{13} - i\omega_{23} &= \beta_3(\omega_1 + i\omega_2), \\ \omega_{14} + i\omega_{24} &= \alpha_4(\omega_1 - i\omega_2), & \omega_{14} - i\omega_{24} &= \beta_4(\omega_1 + i\omega_2), \\ \omega_{15} + i\omega_{25} &= \alpha_5(\omega_1 - i\omega_2), & \omega_{15} - i\omega_{25} &= \beta_5(\omega_1 + i\omega_2). \end{aligned} \tag{33}$$

Or, ni les fonctions $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ni $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ ne peuvent pas être nuls à la fois car, autrement, les points E_1, E_5 seraient fixes; de plus, comme on suppose que les tangentes aux courbes que décrivent les points E_1, E_5 sont situées, elles aussi, sur la quadrique (31) on a nécéssairement

$$\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 0, \qquad \beta_3^2 + \beta_4^2 + \beta_5^2 = 0. \tag{34}$$

Les formules de structure de l'espace projectif, appliquées aux équations (33), donnent

$$\begin{aligned} &[(\omega_1 - i\omega_2)(d\alpha_3 + 2i\alpha_3\omega_{12} - \alpha_4\omega_{34} - \alpha_5\omega_{35})] = 0, \\ &[(\omega_1 - i\omega_2)(d\alpha_4 + \alpha_3\omega_{34} + 2i\alpha_4\omega_{12} - \alpha_5\omega_{45})] = 0, \\ &[(\omega_1 - i\omega_2)(d\alpha_5 + \alpha_3\omega_{35} + \alpha_4\omega_{45} + 2i\alpha_5\omega_{12})] = 0; \\ &[(\omega_1 + i\omega_2)(d\beta_3 - 2i\beta_3\omega_{12} - \beta_4\omega_{34} - \beta_5\omega_{35})] = 0, \\ &[(\omega_1 + i\omega_2)(d\beta_4 + \beta_3\omega_{34} - 2i\beta_4\omega_{12} - \beta_5\omega_{45})] = 0, \\ &[(\omega_1 + i\omega_2)(d\beta_5 + \beta_3\omega_{35} + \beta_4\omega_{45} - 2i\beta_5\omega_{12})] = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

On en voit d'abord, qu'on puisse s'arranger, en choisissant convenablement le système de référence, que l'on ait $\alpha_4 = 0$; on a ensuite $\alpha_3^2 + \alpha_5^2 = 0$ et on peut prendre $\alpha_5 = i\alpha_3$. On ne peut pas avoir, en même temps, $\beta_5 = i\beta_3$, car, autrement, on ait nécéssairement $\beta_4 = 0$ et par suite, en vertu des relations (35) $\omega_{34} - i\omega_{45} = 0$, de sorte que, les surfaces (M) correspondantes seraient plongées dans un espace à moins de cinq dimensions. On peut donc s'arranger que l'on ait $\beta_4 = 0$ et par suite $\beta_5 = -i\beta_3$.

Cela étant, on a

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\omega_{14} = \omega_{24} = 0,} \\ \omega_{13} + i\omega_{23} = \alpha_3(\omega_1 - i\omega_2), & \omega_{13} - i\omega_{23} = \beta_3(\omega_1 + i\omega_2), \\ \omega_{15} + i\omega_{25} = i\alpha_3(\omega_1 - i\omega_2), & \omega_{15} - i\omega_{25} = -i\beta_3(\omega_1 + i\omega_2), \end{array} \tag{36}$$

$$\begin{array}{l} [(\omega_1 - i\omega_2)(d\alpha_3 + i\alpha_3\overline{2\omega_{12} - \omega_{35}})] = 0, \\ [(\omega_1 + i\omega_2)(d\beta_3 - i\beta_3\overline{2\omega_{12} - \omega_{35}})] = 0, \\ [(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{34} - i\omega_{45})] = 0, \\ [(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{34} + i\omega_{45})] = 0. \end{array} \tag{37}$$

Or, le système de référence n'est pas encore parfaitement déterminé et $\dfrac{\beta_3}{\alpha_3}$ n'est pas invariant. On peut supposer $\beta_3 = \alpha_3$.

Cela étant, si l'on pose $\alpha_3 = R$ on retrouve le système (19) et cela démontre la proposition.

3. On peut se poser la question s'il existe, parmi les surfaces minima, plongées dans l'espace euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatrice à chaque point est une circonférence, des surfaces jouissant de la propriété que, le rayon de l'indicatrice soit *le même à chaque point de la surface.*

On démontre facilement *qu'il n'existe aucune surface jouissant de cette propriété.*

IV. Surfaces plongées dans un espace non-euclidien.

1. Nous allons nous occuper des surfaces étudiées plongées dans un espace non-euclidien ($c \neq 0$).

Pour cela, considérons le système d'équations différentielles auquel conduisent les équations (14). On a

$$\begin{array}{lllll} dM = & & \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, & & \\ de_1 = & -c\omega_1 M & + \omega_{12} e_2 & + R\omega_1 e_3 & + R\omega_2 e_5, \\ de_2 = & -c\omega_2 M - \omega_{12} e_1 & & - R\omega_2 e_3 & + R\omega_1 e_5, \\ de_3 = & & -R\omega_1 e_1 + R\omega_2 e_2 & & + \omega_{34} e_4 + \omega_{35} e_5, \\ de_4 = & & & - \omega_{34} e_3 & + \omega_{45} e_5, \\ de_5 = & & R\omega_2 e_1 - R\omega_1 e_2 - \omega_{35} e_3 - \omega_{45} e_4. & & \end{array} \tag{38}$$

Ce système avec les formules de structure (3) peut être envisagé comme définissant, dans l'espace projectif à cinq dimensions, une surface, lieu du point M, et en même temps un repère mobile formé par les points $M, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$. Par rapport à ce système de référence chaque point A de l'espace peut être exprimé par une expression de la forme

$$A = xM + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5, \tag{39}$$

les x étant les coordonnées du point A par rapport au système considéré. On vérifie facilement que la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \frac{1}{c} x^2 = 0 \tag{40}$$

est fixe; c'est précisement la quadrique absolue qui fait de l'espace projectif considéré l'espace métrique d'où nous sommes partis. Remarquons que les points $e_1 \pm i e_2$, $e_3 \pm i e_5$ sont situés sur la quadrique en question.

Cela étant, il est facile de voir que, en posant

$$\begin{gathered} E_1 = e_1 + i e_2,\ E_2 = e_3 + i e_5,\ E_3 = e_4,\ E_4 = e_3 - i e_5,\ E_5 = e_1 - i e_2, \\ \Omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2),\quad \Omega_2 = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2), \end{gathered} \tag{41}$$

le système (38) peut être remplacé par le système équivalent

$$\begin{aligned} dM &= \Omega_1 E_1 + \Omega_2 E_5, \\ dE_1 &= -2c\Omega_2 M - i\omega_{12} E_1 + 2R\Omega_1 E_2, \\ dE_2 &= -2R\Omega_2 E_1 - i\omega_{35} E_2 + (\omega_{34} - i\omega_{45}) E_3, \\ dE_3 &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{34} + i\omega_{45}) E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_{34} - i\omega_{45}) E_4, \\ dE_4 &= (\omega_{34} + i\omega_{45}) E_3 + i\omega_{35} E_4 - 2R\Omega_1 E_5, \\ dE_5 &= -2c\Omega_1 M + 2R\Omega_2 E_4 + i\omega_{12} E_5. \end{aligned} \tag{42}$$

2. D'abord, il est clair, pourque une surface (M) qui est définie par un système de la forme (42) ne soit pas contenue dans un espace à moins de cinq dimensions, il faut que les expressions $\omega_{34} \pm i\omega_{45}$ ne soient pas nuls identiquement tous les deux. Nous allons nous occuper d'abord du cas général où aucune de ces expressions n'est égal à zèro, identiquement, et nous appelerons, pour abréger, les surfaces correspondantes *surfaces générales.*

On voit que les points $M, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ décrivent des surfaces; nous les désignérons par (M), (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), (E_5). Par chaque point de n'importe quelle de ces surfaces il passe une courbe caractéristique et une seule de chaque famille $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$. Si l'on écrit les systèmes d'équations différentielles que l'on obtient de (42) en y posant $\Omega_1 = 0$ ou bien $\Omega_2 = 0$ on a

$$\begin{aligned} dM &= \Omega_2 E_5, \\ dE_1 &= -2c\Omega_2 M - i\omega_{12} E_1, \\ dE_2 &= -2R\Omega_2 E_1 - i\omega_{35} E_2, \\ dE_3 &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{34} + i\omega_{45}) E_2, \\ dE_4 &= (\omega_{34} + i\omega_{45}) E_3 + i\omega_{34} E_4, \\ dE_5 &= 2R\Omega_2 E_4 + i\omega_{12} E_5; \end{aligned} \tag{43}$$

ou bien

$$\begin{array}{llllll}
dM = & \Omega_1 E_1, & & & & \\
dE_1 = & -i\omega_{12} E_1 + 2R\Omega_1 E_2, & & & & \\
dE_2 = & & -i\omega_{35} E_2 + (\omega_{34} - i\omega_{45}) E_3, & & & \\
dE_3 = & & & -\frac{1}{2}(\omega_{34} - i\omega_{45}) E_4, & & \\
dE_4 = & & & & i\omega_{35} E_4 - 2R\Omega_1 E_5, & \\
dE_5 = & -2c\Omega_1 M & & & & + i\omega_{12} E_5.
\end{array} \tag{44}$$

On a une correspondance biunivoque entre les deux surfaces (M) et (E_1) dans laquelle les points M, E_1 se correspondent. Or, fixons sur la surface (M) une courbe quelconque de la famille $\Omega_1 = 0$ et envisageons la courbe correspondante sur la surface (E_1). La deuxième des équations (43) montre que, en chaque position du point M sur la courbe considérée, la droite $[ME_1]$ est la tangente, au point E_1, à la courbe qui est le lieu de ce point. D'autre part, la première des équations (44) montre que la droite en question est la tangente, au point M, à la courbe de la famille $\Omega_2 = 0$ qui passe par ce point. Par suite, les deux familles de caractéristiques $\Omega_1 \Omega_2 = 0$ forment sur la surface (M) un réseau, les développables, circonscrites à la surface (M) le long des courbes de la famille $\Omega_1 = 0$ étant engendrées par des tangentes des courbes correspondantes sur la surface (E_1). Par suite, le surface (E_1) est la transformée laplacienne de la surface (M) dans le sens des courbes $\Omega_2 = 0$.

On vérifie de la même manière, de proche en proche, que la surface (E_2) est la transformée laplacienne de la surface (E_1) dans le sens des courbes $\Omega_2 = 0$; la surface (E_3) est la transformée laplacienne de la surface (E_2) dans le sens des courbes $\Omega_2 = 0$; la surface (E_4) est la transformée laplacienne de la surface (E_3) dans le sens de courbes $\Omega_2 = 0$; la surface (E_5) est la transformée laplacienne de la surface (E_4) dans le sens des courbes $\Omega_2 = 0$; enfin, la surface (M) est la transformée laplacienne de la surface (E_5) dans le sens des courbes $\Omega_2 = 0$.

On voit ainsi que le réseau formé sur la surface (M) par le deux familles $\Omega_1 \Omega_2 = 0$ est périodique et six est sa période. De plus, comme le point M, en chaque position, est conjugué aux points E_1, E_2, E_3 E_4, E_5 par rapport à la quadrique absolue

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + \frac{1}{c} X^2 = 0, \tag{45}$$

le réseau en question est autopolaire par rapport à cette quadrique.

3. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Pourque une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, puisse être définie comme une surface minima générale d'un espace non-euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonference, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau périodique, à période six, et autopolaire.

Nous venons de démontrer que, chaque surface minima générale plongée dans un espace non euclidien à cinq dimensions dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, envisagée comme une surface de l'espace projectif, est douée d'un réseau jouissant des propriétés ci-dessus. Donc, il ne reste que établir la réciproque.

Or, soit dans l'espace projectif à cinq dimensions, M un point quelconque d'une surface douée d'un réseau jouissant des propriétés indiquées. Faisons correspondre au point M un repère mobile formé par les points M, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. On aura un système d'équations différentielles tel que (24) et on pourra exprimer chaque point A de l'espace par une expression de la forme (25), les x étant les coordonnées du point A par rapport au système mobile. Pourque le point A ne dépend pas de la position du repère il faut et il suffit que les x satisfont aux équations différentielles telles que (26).

Cela étant, soit $c \neq 0$ et exprimons que la quadrique $x_1^2 + x_2^2 + {} + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \frac{1}{c} x^2 = 0$ soit fixe. On obtient par un calcul facile les conditions

$$\omega_{io} = -c\omega_i; \quad \omega_{ii} = \omega_{oo}; \quad \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{46}$$

et on en peut ajouter $\omega_{oo} = 0$, car cela exprime que le déterminant formé par les coordonnées des sommets du repère mobile ait une valeur constante.

Or, on peut, évidement, particulariser le repère mobile de manière à prendre les points e_1, e_2 dans le plan tangent au point M. Ce choix étant fait on a

$$\omega_3 = 0, \ \omega_4 = 0, \ \omega_5 = 0, \tag{47}$$

et ces équations entraînent, d'après les formules de structure de l'espace projectif

$$[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = 0, \ [\omega_1\omega_{14}] + [\omega_2\omega_{24}] - 0, \ [\omega_1\omega_{15}] + [\omega_2\omega_{25}] = 0. \tag{48}$$

On arrive ainsi au système suivant

$$\begin{aligned} dM \quad & \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\ de_1 = & -c\omega_i M + \omega_{i1}e_1 + \omega_{i2}e_2 + \omega_{i3}e_3 + \omega_{i4}e_4 + \omega_{i5}e_5, \\ & \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned} \tag{49}$$

La surface (M) étant douée d'un réseau supposons que ce soient les deux familles $\omega_1 + i\omega_2 = 0$, $\omega_1 - i\omega_2 = 0$ qui le forment. Le réseau en question étant supposé périodique à période six et autopolaire on sait, en vertu de la théorie générale des réseaux, que sa première et sa deuxième transformée laplacienne dans les deux sens sont situées sur la quadrique par rapport à laquelle il est autopolaire. Avec notre système mobile soit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \frac{1}{c} x^2 = 0 \tag{50}$$

cette quadrique.

Soient E_1, E_5 les transformées laplaciennes du réseau en question dans le sens des courbes $\omega_1+i\omega_2=0$, $\omega_1-i\omega_2=0$ respectivement. Or, les points E_1, E_5 sont contenus dans le plan tangent au point M et par suite ils s'expriment comme des combinaisons linéaires des points M, e_1, e_2; comme ils sont conjugués au point M par rapport à la quadrique (50) ils s'expriment comme des combinaisons linéaires des points e_1, e_2 seulement; enfin, comme ils sont situés sur la quadrique (50) ils sont proportionnelles aux e_1+ie_2, e_1-ie_2 et on peut prendre tout simplement

$$E_1=e_1+ie_2, \qquad E_5=e_1-ie_2.$$

On a

$$\begin{aligned} dE_1 &= -c(\omega_1+i\omega_2)M-i\omega_{12}E_1+\\ &\quad+(\omega_{13}+i\omega_{23})e_3+(\omega_{14}+i\omega_{24})e_4+(\omega_{15}+i\omega_{25})e_5,\\ dE_5 &= -c(\omega_1-i\omega_2)M+i\omega_{12}E_5+\\ &\quad+(\omega_{13}-i\omega_{23})e_3+(\omega_{14}-i\omega_{24})e_4+(\omega_{15}-i\omega_{25})e_5. \end{aligned} \tag{51}$$

Exprimons les suppositions fait au sujet des points E_1, E_5. Pourque, en chaque position, le point E_1 (E_5) soit la transformée laplacienne du point M dans le sens des courbes $\omega_1+i\omega_2=0$ ($\omega_1-i\omega_2=0$) il faut et il suffit que, si l'on fixe sur la surface (M) une courbe quelconque de la famille $\omega_1-i\omega_2=0$ ($\omega_1+i\omega_2=0$) et que l'on considère la courbe correspondante sur la surface (E_1) [(E_5)], la droite [ME_1] ([ME_5]) soit la tangente au point E_1 (E_5) à la courbe qui est le lieu de ce point. Les conditions nécéssaires et suffisantes pourqu'il en soit ainsi sont évidement

$$\begin{aligned} \omega_{13}+i\omega_{23}&=\alpha_3(\omega_1-i\omega_2), & \omega_{13}-i\omega_{23}&=\beta_3(\omega_1+i\omega_2),\\ \omega_{14}+i\omega_{24}&=\alpha_4(\omega_1-i\omega_2), & \omega_{14}-i\omega_{24}&=\beta_4(\omega_1+i\omega_2),\\ \omega_{15}+i\omega_{25}&=\alpha_5(\omega_1-i\omega_2), & \omega_{15}-i\omega_{25}&=\beta_5(\omega_1+i\omega_2), \end{aligned} \tag{52}$$

et ces équations entraînent, d'après les formules de structure de l'espace projectif, des relations quadratiques telles que (35).

Or, ni les fonctions α_3, α_4, α_5 ni β_3, β_4, β_5 ne peuvent pas être nuls à la fois car, autrement les points E_1, E_5 décrivaient des courbes et le réseau en question serait terminé, contrairement l'hypothèse.

Cela étant, les points E_1, E_5 décrivent des surfaces (E_1), (E_5) qui sont douées des réseaux formés par les deux familles $\omega_1\pm i\omega_2=0$. Soit E_2 (E_4) la transformée laplacienne du point E_1 (E_5) dans le sens des courbes $\omega_1+i\omega_2=0$ ($\omega_1-i\omega_2=0$). Or, le point E_2 (E_4) est contenu dans le plan tangent au point E_1 (E_5) et par suite, il s'exprime comme une combinaison linéaire des points M, E_1, $\alpha_3e_3+\alpha_4e_4+\alpha_5e_5$ (M, E_5, β_3e_3+ $+\beta_4e_4+\beta_5e_5$); comme il est conjugué aux points M, E_1, E_5 il est proportionnel au point $\alpha_3e_3+\alpha_4e_4+\alpha_5e_5$ ($\beta_3e_3+\beta_4e_4+\beta_5e_5$), enfin, comme il est situé sur la quadrique (50) on a

$$\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2=0, \qquad \beta_3^2+\beta_4^2+\beta_5^2=0. \tag{53}$$

En tenant compte des relations (35) on voit d'abord qu'on peut s'arranger, en choisissant convenablement le système de référence, que l'on ait $\alpha_4 = 0$; on a ensuite $\alpha_3^2 + \alpha_5^2 = 0$ et on peut prendre $\alpha_5 = i\alpha_3$. On ne peut pas avoir, en même temps, $\beta_5 = i\beta_3$, car, autrement, on ait nécéssairement $\beta_4 = 0$, et par suite, en vertu des relations (35), $\omega_{34} - i\omega_{45} = 0$ de sorte que, les surfaces (M) correspondantes seraient plongées dans un espace à moins de cinq dimensions. On peut donc s'arranger que l'on ait $\beta_4 = 0$ et par suite $\beta_5 = -i\beta_3$ et on peut prendre tout simplement

$$E_2 = e_3 + ie_5, \qquad E_4 = e_3 - ie_5.$$

On a

$$\begin{aligned} dE_2 &= -\beta_3(\omega_1 + i\omega_2)E_1 - i\omega_{35}E_2 + (\omega_{34} - i\omega_{45})e_4, \\ dE_4 &= -\alpha_3(\omega_1 - i\omega_2)E_5 + i\omega_{35}E_4 + (\omega_{34} + i\omega_{45})e_4, \\ de_4 &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{34} + i\omega_{45})E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_{34} - i\omega_{45})E_4. \end{aligned} \tag{54}$$

On voit ainsi que toutes les suppositions fait au sujet du réseau sur la surface (M) sont exprimées, le point e_4 étant la transformée laplacienne du point E_2 dans le sens des courbes $\omega_1 + i\omega_2 = 0$ et en même temps c'est la transformée laplacienne du point E_4 dans le sens des courbes de la famille $\omega_1 - i\omega_2 = 0$.

On arrive ainsi à un système d'équations différentielles tel que (36). Comme le système de référence n'est pas encore parfaitement déterminé et $\frac{\beta_3}{\alpha_3}$ n'est pas invariant, on peut supposer $\beta_3 = \alpha_3$.

Cela étant, si l'on pose $\alpha_3 = R$ on retrouve le système (42) et cela démontre la proposition.

4. *M. Guichard* a étudié le problème suivant*:

Trouver les équations de la forme

$$x_{uv} = hx$$

admettant six solutions $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ indépendantes, liées par les relations

$$Sx^2 = 1, \; Sx_u^2 = 0, \; Sx_v^2 = 0, \; Sx^2_{uu} = 0, \; Sx^2_{vv} = 0.$$

C'est *M. G. Tzitzéica*** qui a montré que, dans l'espace projectif à cinq dimensions chaque surface douée d'un réseau périodique à période six et autopolaire par rapport à la quadrique $Sx^2 = 0$ peut être définie, analytiquement, par une équation de cette forme et inversement, les six solutions indépendantes d'une telle équation donnent les coordonnées projectives d'une surface jouissant des propriétés ci-dessus.

Le théorème du N° 3. entraîne donc le résultat suivant:

Chaque solution du problème de M. Guichard définie une surface minima générale plongée dans un espace à cinq dimensions dont l'indi-

---

* Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences; Paris, 10 mars, 1913.

** Géométrie différentielle projective des réseaux, chap. XIV.

catrice de la courbure, à chaque point est une circonférence et inversement, chaque surface jouissant de ces propriétés fournit une solution de ce problème. La solution générale du problème en question dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Nous trouvons ainsi une interpretation géométrique parfaite ainsi que la généralité de la solution du problème de M. Guichard.

5. Il faut encore eclaircir la notion des surfaces minima *générales* dont nous avons parlé jusqu'ici. D'après la définition que nous avons donnés au N° 2 une surface, jouissant des propriétés métriques indiquées s'appelle surface *générale* si, dans le système d'équations différentielles (42), qui la définit, aucune des expressions $\omega_{34} \pm i\omega_{45}$ n'est nul identiquement.

Or, il est facile de donner une interpretation géométrique de cette définition. En effet, si la surface (M) est une surface générale, le point E_3 décrit une surface (E_3) qui est, elle aussi, douée d'un réseau périodique à période six et autopolaire, ce réseau étant formé par les deux familles $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$. Par suite, la surface (E_3) est elle aussi une surface minima, plongée dans un espace non euclidien, dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence et le réseau, dont elle est douée, est formé par les deux familles de courbes minima. Ce réseau est dans une correspondance biunivoque avec le réseau analogue sur la surface (M), ces deux réseaux se déduisant l'un de l'autre par trois transformations de Laplace. On voit donc que, *une surface (M) étant une surface minima générale on en peut associer une autre surface (E_3) jouissant des mêmes propriétés métriques et on peut établir entre ces deux surfaces une correspondance ponctuelle biunivoque telle, que les réseaux formés, sur les deux surfaces, par les deux familles de courbes minima se déduisent l'un de l'autre par trois transformations successives de Laplace.* On voit immédiatement que *cette propriété est caractéristique,* car si une des expressions $\omega_{34} \pm i\omega_{45}$ est nul identiquement, la surface (E_3) se réduit à une courbe et il n'existe pas de la surface qui serait liée à la surface (M) de la manière indiquée.

6. Nous avons laissé à côté, jusqu'ici, les surfaces pour lesquelles une des expressions $\omega_{34} \mp i\omega_{45}$ est nul identiquement. Nous allons nous occuper de ces surfaces; à cause de la symétrie du système (42) nous pouvons nous borner au cas où $\omega_{34} - i\omega_{45}$ est nul identiquement.

Les surfaces en question sont donc caractérisées par l'équation

$$\omega_{34} - i\omega_{45} = 0. \tag{55}$$

La condition d'intégrabilité de cette équation est verifiée en vertu des équations du système (14). Par suite

les surfaces considérées dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument.

7. Écrivons le système d'équations différentielles auquel conduisent les équations (14), (55); on a

$$\begin{aligned}
dM &= \Omega_1 E_1 + \Omega_2 E_5,\\
dE_1 &= -2c\Omega_2 M - i\omega_{12}E_1 + 2R\Omega_1 E_2,\\
dE_2 &= -2R\Omega_2 E_1 - i\omega_{35}E_2,\\
dE_3 &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{34}+i\omega_{45})E_2,\\
dE_4 &= (\omega_{34}+i\omega_{45})E_3 + i\omega_{35}E_4 - 2R\Omega_1 E_5,\\
dE_5 &= -2c\Omega_1 M + 2R\Omega_2 E_4 + i\omega_{12}E_5.
\end{aligned} \tag{56}$$

Un premier coup d'oeil montre que chaque surface de cette espèce est douée d'un réseau, formé par les deux familles de courbes $\Omega_1\Omega_2 = 0$, ce réseau étant terminé dans les deux sens. Pour procéder d'une manière precise remarquons d'abord que les deux points E_2, E_3 décrivent des courbes dont le paramètre est une intégrale première de l'équation $\Omega_2 = 0$. Or, si l'on se déplace sur la surface (M) suivant une courbe différente d'une caractéristique de la famille $\Omega_2 = 0$, on voit que une relation de la forme

$$M = \varpi E_2 + \varpi_1 dE_2 + \varpi_2 d^2 E_2$$

a lieu, les ω étant composés des ω et leurs différentielles. Cela montre que, en chaque position, le point M est situé dans le plan osculateur au point E_2 à la courbe qui est le lieu de ce point. D'autre part, on voit que, si l'on se déplace sur une caractéristique quelconque de la famille Ω_2 0, le plan $[M, E_1, E_2]$ reste fixe en position. Par suite, les caractéristiques de la famille $\Omega_2 = 0$, sur la surface (M), sont des courbes planes, les plans de ces courbes étant des plans osculateurs à la courbe qui est le lieu du point E_2. Par suite, d'après un théorème bien connu de M. Bompiani*, la suite de transformations laplaciennes se termine, dans le sens des courbes $\Omega_2 = 0$, après la deuxième transformation, selon le cas de Goursat. Remarquons encore que le cas de Goursat en question est général; le cas mixte de la fermeture ne peut pas avoir lieu.

D'autre part, on voit immédiatement que, si l'on se déplace sur la surface (M) suivant une courbe quelconque de la famille $\Omega_1 = 0$ une relation de la forme

$$E_3 = \omega M + \omega_1 dM + \varpi_2 d^2 M + \varpi_3 d^3 M$$

a lieu, les ω étant composés des ϖ et leurs différentielles. Cela montre que, en chaque position du point M sur la surface, les S_3-osculateurs aux points d'une courbe quelconque de la famille $\Omega_1 = 0$ passent par le point E_3. Comme ce point ne dépend que de l'intégrale première de l'équation $\Omega_2 = 0$, il en résulte que les S_3-osculateurs des courbes caractéristiques de la famille $\Omega_1 = 0$ aux points d'une courbe caracté-ristique quelconque de l'autre famille passent par un point fixe. Par

---

* *E. Bompiani, Sull'equazione di Laplace* (Rend. Circ. mat. di Palermo, t. XXXIV, 1912.

suite*, la suite de transformations laplaciennes du réseau considéré sur la surface (M) se termine, dans le sens des courbes $\Omega_1 = 0$, après la troisième transformation, selon le cas de Laplace.

On trouve ainsi le résultat suivant:

Pourque une surface minima générale se réduit à une surface du type considéré, il faut et il suffit que, dans un sens, la deuxième transformée laplacienne du réseau, formé par les deux familles des courbes minima, se réduit à une courbe. Le réseau qui est formé, sur les surfaces du type considéré, par les deux familles de courbes minima, se termine, dans un sens, après la deuxième transformation, selon le cas de Goursat et dans l'autre sens, après la troisième, transformation, selon le cas de Laplace.

Nous nous bornons à indiquer ces propriétés géométriques sans nous occuper de la recherche d'intégrale générale du système correspondant. Dans la suite nous aurons de l'occasion à considérer un cas particulier intéressant de surfaces en question, dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument; c'est le cas dont nous nous occuperons plus profondément.

V. Surfaces plongées dans un espace non-euclidien ayant, à chaque point, le même rayon de l'indicatrice.

1. Nous allons étudier la question, s'il existe, dans un espace non euclidien à cinq dimensions, des surfaces jouissant des propriétés considérées et telles, que le rayon de l'indicatrice soit constant.

Supposons, pour le moment, qu'il existe de telles surfaces. On a ensuite, en vertu des relations (16)

$$2\,\omega_{12} - \omega_{35} = 0. \tag{57}$$

Cette équation entraîne, d'après les formules de structure

$$[\omega_{34}\,\omega_{45}] - 2\,(3R^2 - c)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0,$$

de sorte que, si l'on pose, d'après (16),

$$\omega_{34} - i\,\omega_{45} = \alpha\,(\omega_1 - i\,\omega_2),\quad \omega_{34} + i\,\omega_{45} = \beta\,(\omega_1 + i\,\omega_2), \tag{58}$$

les fonctions α, β satisfont à l'équation quadratique

$$\alpha\beta - 2\,(3R^2 - c) = 0. \tag{59}$$

Les équations (58) entraînent

$$[(\omega_1 - i\omega_2)\,(d\alpha + 3i\alpha\omega_{12})] = 0,\quad [(\omega_1 + i\omega_2)\,(d\beta - 3i\beta\omega_{12})] = 0. \tag{60}$$

Cela étant, deux cas et deux seulement sont à considérer: $\alpha\beta \neq 0$ ou bien $\alpha\beta = 0$. Nous nous occuperons d'abord du premier cas, qui fournit, évidement, des surfaces *générales*.

---

* E. Bompiani, loc. cit.

2. Dans le cas $\alpha\beta \neq 0$ les relations (60) peuvent s'écrire

$$
\begin{aligned}
&[(\omega_1 - i\,\omega_2)\,(\frac{d\alpha}{\alpha} + 3\,i\,\omega_{12})] = 0,\\
&[(\omega_1 + i\,\omega_2)\,(\frac{d\beta}{\beta} - 3\,i\,\omega_{12})] = 0.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

et comme on a, en vertu de la relation (59),

$$\frac{d\,\alpha}{\alpha} + \frac{d\,\beta}{\beta} \quad 0,$$

les relations précédentes entraînent

$$\frac{d\,\alpha}{\alpha} + 3\,i\,\omega_{12} = 0. \tag{62}$$

En appliquant les formules de structure, on en déduit

$$c = 2\,R^2;$$

on a donc

$$\alpha\,\beta = 2\,R^2$$

et on peut supposer $\alpha = 1$. On arrive ainsi à un système complètement intégrable et on voit qu'il existe une surface générale et une seule, ayant, à chaque point, le même rayon de l'indicatrice.

Le système correspondant est le suivant

$$
\begin{aligned}
d\,M &= \Omega_1\,E_1 + \Omega_2\,E_5,\\
d\,E_1 &= -4\,R^2\,\Omega_2\,M + 2\,R\,\Omega_1\,E_2,\\
d\,E_2 &= -2\,R\,\Omega_2\,E_1 + 2\,\Omega_1\,E_3,\\
d\,E_3 &= -2\,R^2\,\Omega_2\,E_2 - \Omega_1\,E_4,\\
d\,E_4 &= 4\,R^2\,\Omega_2\,E_3 - 2\,R\,\Omega_1\,E_5,\\
d\,E_5 &= -4\,R^2\,\Omega_1\,M + 2\,R\,\Omega_2\,E_4.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

On en voit presque immédiatement que le réseau formé sur la surface (M) par les deux familles de courbes minima est à invariant *constant*. Si l'on pose $\Omega_1 = dv$, $\Omega_2 = du$ on a le système aux coefficients constants

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\,M}{\partial\,u} = E_5, && \frac{\partial\,M}{\partial\,v} = E_1,\\
&\frac{\partial E_1}{\partial\,u} = -4\,R^2\,M, && \frac{\partial E_1}{\partial\,v} = 2\,R\,E_2,\\
&\frac{\partial E_2}{\partial\,u} = -2\,R\,E_1, && \frac{\partial E_2}{\partial\,v} = 2\,E_3,\\
&\frac{\partial E_3}{\partial\,u} = -2\,R^2\,E_2, && \frac{\partial E_3}{\partial\,v} = -E_4,\\
&\frac{\partial E_4}{\partial\,u} = 4\,R^2\,E_3, && \frac{\partial E_4}{\partial\,v} = -2\,R\,E_5,\\
&\frac{\partial E_5}{\partial\,u} = 2\,R\,E_4; && \frac{\partial E_5}{\partial\,v} = -4\,R^2\,M.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

On en déduit, sans aucune espèce de difficultés que, en choisissant convenablement les variables indépendantes, les coordonnées du point M ont la forme

$$M = k_1 e^{\varepsilon u - \varepsilon^{-1} v} + k_2 e^{\varepsilon^2 u - \varepsilon^{-2} v} + k_3 e^{\varepsilon^3 u - \varepsilon^{-3} v} + \\ + k_4 e^{\varepsilon^4 u - \varepsilon^{-4} v} + k_5 e^{\varepsilon^5 u - \varepsilon^{-5} v} + k_6 e^{\varepsilon^6 u - \varepsilon^{-6} v},$$

les k étant des constantes arbitraires et ε une racine primitive de l'équation $x^6 - 1 = 0$. On voit ainsi que les équations paramétriques de la surface considérée, par rapport à un système de référence convenable, peuvent s'écrire

$$X_1 = e^{\varepsilon u - \varepsilon^{-1} v}, \quad X_2 = e^{\varepsilon^2 u - \varepsilon^{-2} v}, \quad X_3 = e^{\varepsilon^3 u - \varepsilon^{-3} v}, \quad X_4 = e^{\varepsilon^4 u - \varepsilon^{-4} v}, \\ X_5 = e^{\varepsilon^5 u - \varepsilon^{-5} v}, \quad X_6 = e^{\varepsilon^6 u - \varepsilon^{-6} v}. \tag{65}$$

Avec ce système de référence, l'équation de la quadrique absolue est

$$X_1 X_4 + X_2 X_5 + X_3 X_6 = 0. \tag{66}$$

Remarquons encore que la surface en question est une surface algébrique, ses équations étant

$$X_1 X_4 - X_2 X_5 = 0; \; X_1 X_4 - X_3 X_6 = 0; \; X_1 X_3 X_5 - X_2 X_4 X_6 = 0. \tag{67}$$

3. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Pourque une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimen sions, puisse être défini comme une surface minima générale d'un espace non-euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence de rayon constant, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau périodique à période six, autopolaire et à invariant constant.

Nous avons remarqué dans le N° précédent que, sur la surface ci-dessus, le réseau formé par les deux familles de courbes minima jouit des propriétés indiquées. Donc, il ne reste que établir la réciproque.

Or, nous savons que, chaque surface plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, douée d'un réseau périodique à période six et autopolaire, peut être défini par le système d'équations différentielles (42) avec $\omega_{34} \pm i\omega_{45} \neq 0$. Or, si l'on pose, dans ce système, $\Omega_1 = e^q dv$, $\Omega_2 = e^p du$, $M_{uv} = hM$, h étant l'invariant du réseau $\Omega_1 \Omega_2 = 0$, on déduit du système considéré, par un calcul facile que j'ometts

$$h = -2ce^{p+q}, \quad (p+q)_{uv} = 2(2R^2 - c)e^{p+q}.$$

On en voit bien, pourque h soit constant, il faut et il suffit que $p+q$ le soit et par suite, que l'on ait $c = 2R^2$ et cela démontre la proposition.

4. Nous allons maintenant considérer l'autre cas possible, où l'on a $\alpha\beta - 0$.

D'après une remarque, que nous avons fait dans le N° 2, chap. III, nous pouvons laisser à côté les surfaces pour lesquelles $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ces surfaces étant contenues dans un espace à moins de cinq dimensions; à cause de le symétrie du système correspondant nous pouvons nous borner au cas $\alpha = 0$.

La deuxième des relations (60) montre qu'on peut supposer $\beta = 1$. Cela étant, on a

$$\omega_{34} = i\omega_{45}, \qquad \omega_{34} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2), \qquad c = 3R^2;$$
$$[(\omega_1 + i\omega_2)\omega_{12}] = 0.$$

On en voit *qu'il existe des surfaces du type considéré et qu'elles dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

5. Nous allons chercher les équations finies des surfaces en question. Pour cela, considérons le système d'équations différentielles qui les définit:

$$\begin{aligned}
dM &= \Omega_1 E_1 + \Omega_2 E_5,\\
dE_1 &= -2c\Omega_2 M - i\omega_{12}E_1 + 2R\Omega_1 E_2,\\
dE_2 &= -2R\Omega_2 E_1 - 2i\omega_{12}E_2,\\
dE_3 &= -\Omega_2 E_3,\\
dE_4 &= 2\Omega_2 E_3 + 2i\omega_{12}E_4 - 2R\Omega_1 E_5,\\
dE_5 &= -2c\Omega_1 M + 2R\Omega_2 E_4 + i\omega_{12}E_5.
\end{aligned} \tag{68}$$

En posant $\Omega_1 = e^q dv$, $\Omega_2 = du$, on en déduit sans aucune espèce de difficultés que les coordonnées du point M satisfont à un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned}
M_{uv} &= -2c e^q M,\\
M_{vv} - q_v M_v &= e^{2q}F'(u),\\
M_{uuu} - 3q_u M_{uu} + \overline{2q_u^2 - q_{uu}}\,M_u + 2F(u) &= 0,
\end{aligned} \tag{69}$$

$F(u)$ étant une fonction de la variable u, que nous introduissons pour la commodité du raissonnement, $F'(u)$ étant sa dérivée et q étant déterminé par une équation de Lionville $q_{uv} + 2R^2 e^q = 0$. On a donc

$$e^q = -\frac{1}{R^2}\cdot\frac{U'V'}{(U+V)^2},$$

U et V étant des fonctions de u et v respectivement. Or, rien n'empêche de prendre les fonctions $U(=x)$ et $V(=y)$ pour de variables indépendantes nouvelles. Avec ces variables, en posant pour la commodité de l'écriture $U'^3F_x' = 24R^4X$, le système (69) s'écrit

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \frac{6}{(x+y)^2}M,\\
M_{yy} + \frac{2}{x+y}M_y &= \frac{24X}{(x+y)^4},\\
M_{xxx} + \frac{6}{x+y}M_{xx} + \frac{6}{(x+y)^2}M_x + \frac{2F}{U'^3} &= 0.
\end{aligned} \tag{70}$$

En dérivant la deuxième de ces équations par rapport à x et en tenant compte de la première, on vérifie facilement que l'on a

$$M_y = \frac{6X'}{(x+y)^2} - \frac{24X}{(x+y)^3}, \tag{71}$$

X' étant la dérivée de la fonction X. En dérivant cette formule par rapport à x on en déduit immédiatement

$$M = X'' - \frac{6X'}{x+y} + \frac{12X}{(x+y)^2}. \tag{72}$$

Pourque cette formule soit compatible avec la troisième du système (70) il faut et il suffit que l'on ait

$$12R^4XX^{(V)} + FF_x' = 0. \tag{73}$$

Cela montre que si l'on prend la fonction X arbitrairement, on obtient la fonction F par une quadrature.

On trouve ainsi que les coordonnées des sommets du repère mobile, associé a la surface étudiée ont la forme suivante:

$$\begin{aligned}
M &= X'' - \frac{6X'}{x+y} + \frac{12X}{(x+y)^2}, \\
E_1 &= -\frac{6R^2}{U'}\left(X' - \frac{4X}{x+y}\right), \\
E_2 &= \frac{12R^3}{U'^2}X, \\
E_3 &= \frac{U'^3}{4R}X^{(V)}, \\
E_4 &= \frac{U'^2}{2R}\left(X^{IV} - 4\frac{X'''}{x+y} + 12\frac{X''}{(x+y)^2} - 24\frac{X'}{(x+y)^3} + 24\frac{X}{(x+y)^4}\right), \\
E_5 &= U'\left(X''' - 6\frac{X''}{x+y} + 18\frac{X'}{(x+y)^2} - 24\frac{X}{(x+y)^3}\right).
\end{aligned} \tag{74}$$

Les six fonctions X dont dépend le système mobile ne peuvent pas être arbitraires, car on sait que les points E_1, E_2, E_4, E_5 sont situés sur la quadrique absolue. Avec le même système de référence fixe auquel sont rapportés les sommets du repère mobile, on peut prendre, évidement, l'équation de la quadrique en question sous la forme

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + \frac{1}{c}X^2 = 0. \tag{75}$$

Si l'on désigne le premier membre de cette équation par SX^2 les six fonctions qui se sont introduits ci-dessus doivent donc satisfaire aux relations suivantes

$$SX^2 = 0;\ SX'^2 = 0;\ SX''^2 = \frac{1}{c};\ SX'''^2 = 0;\ SX^{(IV\,2} = 0. \tag{76}$$

En général, on en ne peut pas avoir d'autres, distinctes de celles-ci car, on sait que l'intégrale générale du système considéré dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

En définitive, on voit que les équations paramétriques des surfaces considérées peuvent s'écrire

$$M_i = X''_i - 6\frac{X'_i}{x+y} + 12\frac{X_i}{(x+y)^2}, \tag{77}$$

les fonctions X_i étant assujeties à remplir les seules équations (76).

Remarquons encore qu'on voit immédiatement de ce résultat que, si l'on se déplace sur une courbe minima quelconque de la famille $x = const$ le point M décrit une conique. Donc, la famille de courbes minima, qui sont planes, se compose des coniques.

6. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Pourque, dans un espace non-euclidien à cinq dimensions, une surface minima non générale, dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, jouisse de la propriété d'avoir le même rayon de l'indicatrice à chaque point de la surface il faut et il suffit que la famille de courbes minima, qui sont planes, soit composée des coniques.

Nous venons de remarquer que, dans un espace non euclidien, chaque surface minima non générale dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence de rayon constant, jouit de la propriété ci-dessus. Donc, il ne reste que établir la réciproque.

Pour cela, considérons le système d'équations différentielles qui définit, dans un espace non-euclidien a cinq dimensions, les surfaces minima non générales dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence, les plus générales. Le système en question est (56), l'équation de la famille de courbes minima, qui sont planes, étant $\Omega_2 = 0$. On a, en se déplaçant sur une courbe quelconque de cette famille

$$\begin{aligned} dE_1 &= -i\omega_{12}E_1 + 2R\Omega_1 E_2, \\ dE_2 &= \qquad\qquad\quad -i\omega_{35}E_2, \end{aligned} \tag{78}$$

les formules, qui montrent que le point E_2 ainsi que la droite $[E_1 E_2]$ restent fixes. Considérons le faisceau de droites $[ME_2]$ dont le centre est le point fixe E_2. En tenant compte des formules (56) on trouve, en regardant qu'on suppose toujours $\Omega_2 = 0$

$$\begin{aligned} d[M, E_2] &= -i\omega_{35}[ME_2] \quad + \Omega_1 [E_1 E_2], \\ d[E_1 E_2] &= \qquad\qquad\quad -i(\omega_{12} + \omega_{35})[E_1 E_2]. \end{aligned} \tag{79}$$

Or, la tangente à la courbe, qui est le lieu du point M passant par le point E_1, on a une correspondance entre le faisceau considéré et les points sur la droite $[E_1 E_2]$ dans laquelle la droite $[ME_2]$ et le point E_1 se correspondent. *Pourque la courbe que décrit le point M soit une conique, il faut et il suffit que cette correspondance soit une correspondance projective.*

Pour exprimer cette condition, multiplions le point E_2 par $\frac{1}{2R}$. Nous aurons

$$
\begin{aligned}
dE_1 &= i\omega_{12} E_1 + \Omega_1 E_2, \\
dE_2 &= \left(\frac{dR}{R} - i\omega_{35}\right) E_2.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

On voit donc, en comparant ces formules avec (79) pourque la correspondance en question soit une correspondance projective, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dR}{R} + i(2\,\omega_{12} - \omega_{35}) = 0.$$

Or, cette équation supposée remplite, les relations (16) montrent qu'elle est encore satisfaite si l'on se déplace sur une caractéristique quelconque de la famille $\Omega_1 = 0$. Par suite, elle est satisfaite sur la surface identiquement.

La condition d'intégrabilité qui dérive de cette équation donne

$$3\,R^2 = c.$$

Par suite, la fonction R est une constante et cela démontre la proposition.