Otakar Borůvka

Sur les surfaces projectivement déformables qui admettent un groupe de ∞^1 transformations projectives en elles-mêmes

C. R. Acad. Sci. Paris t. 189, 1929, 964-966

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500016

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les surfaces projectivement déformables qui admettent un groupe de ∞^1 transformations projectives en elles-mêmes.* Note [1] de M. O. Borůvka.

1. On peut se proposer la question de la recherche des surfaces non réglées qui admettent un groupe de ∞^1 déformations projectives en elles-mêmes et sont en même temps projectivement déformables sur d'autres surfaces. Cette question ne paraît pas difficile à résoudre dans le cas où les déformations projectives de la surface en elle-même sont des déformations projectives proprement dites; en effet, comme on connaît explicitement les invariants projectifs de toutes les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives (proprement dites) en elles-mêmes, on n'a qu'à exprimer, dans chaque cas, la condition de déformabilité. Le cas où les déformations projectives de la surface en elle-même se réduisent aux transformations projectives mérite une considération particulière. Je me suis occupé de cette question et je me permets de la traiter dans cette Note. J'y utilise les notations du Mémoire de M. Cartan (*Annales de l'École Normale*, 1920).

2. Soit (S) une surface non réglée admettant un groupe de ∞^1 transformations projectives en elle-même. Il résulte de la théorie générale de M. Cartan que : 1° on peut choisir sur (S) les variables indépendantes x, y de manière que, avec le choix du repère mobile considéré dans le Mémoire cité, les formes ω_1, ω_2 aient la forme

$$\omega_1 = \frac{dx}{F(x+y)}, \qquad \omega_2 = \frac{dy}{\Phi(x+y)},$$

les fonctions F, Φ ne dépendant que de $x+y$; 2° avec ces variables, les invariants fondamentaux α, β, α_1, α_2, λ, ρ ne dépendent que de $x+y$. Supposons (S) projectivement déformable. Il existe alors deux fonctions u, v non toutes nulles telles que $\sqrt{u}\,\omega_1$, $\sqrt{v}\,\omega_2$ et même si $uv \neq 0$, $\sqrt{\frac{v}{u}}\,\omega_1 + \sqrt{\frac{u}{v}}\,\omega_2$ sont des différentielles exactes et il est facile de voir que le

[1] Séance du 25 novembre 1929.

rapport de u, v ne dépend que de $x+y$. $\sqrt{u}\omega_1$ et $\sqrt{v}\omega_2$ étant des différentielles exactes, on a $\sqrt{u}=\sqrt{X}F$, $\sqrt{v}=\sqrt{Y}\Phi$, X et Y étant des fonctions de x et y respectivement et de plus, comme le rapport de u à v ne dépend que de $x+y$, deux cas seulement sont possibles :

1° $\sqrt{X}=ae^{mx}$, $\sqrt{Y}=be^{-my}$ (a, b, m constantes, $ab\neq 0$);

2° Une (et une seule) des fonctions X, Y s'annule identiquement.

Pour la commodité du raisonnement suivant, il paraît utile d'introduire les deux quantités $\bar\beta=\frac{\Phi}{F^2}$, $\bar\gamma=\frac{F}{\Phi^2}$.

Premier cas. — Dans ce cas là, $\sqrt{\frac{v}{u}}\omega_1+\sqrt{\frac{u}{v}}\omega_2$ étant une différentielle exacte, $\bar\beta$ et $\bar\gamma$ sont de la forme $\bar\beta=\frac{a}{b}e^{m(x+y)}(H-c)$; $\bar\gamma=\frac{b}{a}e^{-m(x+y)}(H+c)$, H étant fonction de $x+y$ et c une constante. Les invariants α, β, α_1, α_2 étant déterminés par $\bar\beta$, $\bar\gamma$, les conditions d'intégrabilité du système d'équations différentielles qui définit les surfaces correspondantes, déterminent les deux autres invariants λ et ρ, chacun à une constante arbitraire près, et donnent encore précisément une relation pour la fonction H.

Si $m\neq 0$, il est commode d'introduire une fonction $\bar H$ par l'équation $H'=\bar H^2$. Ensuite la relation en question est une relation différentielle du quatrième ordre pour la fonction $\bar H$. *Les surfaces correspondantes existent et dépendent de constantes arbitraires.*

Si $m=0$, deux cas sont à distinguer : $a^2\neq b^2$ ou bien $a^2=b^2$.

a. Si l'on a $a^2\neq b^2$, la relation qui détermine la fonction H est de la forme $H'^2=H^4+pH^2+qH+r$, p, q, r étant des constantes arbitraires; donc *les surfaces en question existent et dépendent encore de constantes arbitraires.*

b. Si l'on a $a^2=b^2$, la relation pour la fonction H est vérifiée identiquement, au moins si les deux constantes arbitraires que font intervenir les invariants λ, ρ sont égales (si elles sont distinctes on a $H'=0$). Alors *les surfaces correspondantes dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument. Si* $c=0$, *on a soit les surfaces générales de révolution, soit les surfaces* $Z=Y^2+F(X)$. *Si* $c\neq 0$, *on a les surfaces*

$$Z=\log Y+F(X);\qquad Z=Y^\alpha F\left(\frac{X}{Z}\right);\qquad Z=e^Y F\left(\frac{X}{Z}\right),$$

X, Y, Z étant des coordonnées cartésiennes, α ($\neq 0$) une constante arbitraire.

Deuxième cas. — Dans ce cas-là, les surfaces correspondantes sont R_0. Si par exemple $Y=0$, on peut supposer $\bar\gamma=1$. Les conditions d'intégrabilité correspondantes déterminent les invariants fondamentaux des surfaces considérées et donnent encore précisément une relation pour la fonction $\overline{\beta}$, cette relation étant de la forme $\overline{\beta}'^2 = 2\overline{\beta}^3 + p\overline{\beta}^2 + q\overline{\beta} + r$, p, q, r étant des constantes. *Les surfaces correspondantes dépendent des constantes arbitraires.*

3. Toutes les surfaces considérées au n° 2 (*b*) font partie d'une famille plus étendue de surfaces, déterminée par M. Cartan [1] jouissant de la propriété que la deuxième surface focale de la congruence de tangentes à l'une des familles du réseau conjugué de déformation projective se réduit à une courbe (nécessairement une droite). Quant aux surfaces de révolution, elles jouissent, au point de vue projectif, encore d'une autre propriété intéressante : Sur chaque surface de révolution le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Darboux-Segré, et inversement chaque surface sur laquelle le réseau conjugué est formé par les lignes de Darboux-Segré est soit une surface de révolution, soit une surface projectivement applicable sur une surface de révolution [2].

---

(1) Dans son cours à la Sorbonne en 1927-1928.

(2) Voir à ce sujet mon article *Sur les surfaces dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segré-Darboux* (*Bull. Sc. math.*, 53, 1929, p. 307).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 189, p. 964, séance du 2 décembre 1929.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
88182-29 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.