Otakar Borůvka

Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions

Spisy přír. fak. MU, č. 146, 1931, 40 s.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500024`

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1931 | ČÍS. 146

SUR LES HYPERCIRCONFÉRENCES ET CERTAINES SURFACES PARABOLIQUES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN À QUATRE DIMENSIONS

PAR

OTAKAR BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

SUR LES HYPERCIRCONFÉRENCES ET CERTAINES SURFACES PARABOLIQUES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN A QUATRE DIMENSIONS.

Les courbes, plongées dans des espaces euclidiens à n dimensions, caractérisées par la propriété d'avoir toutes les courbures scalaires constantes, se trouvent considérées, en géométrie, à plusieures occasions; ainsi leur détermination, dans les cas les plus simples $n = 2, 3, 4$, au moyen des formules de Frenet, est classique. Cependant, pour $n > 3$, leurs propriétés géométriques intégrales n'ont pas été considérées plus profondément ainsi qu'on doit admettre, en effet, que les propriétés géométriques bien différentes des circonférences et des hélices ne semblaient pas à permettre des généralisations immédiates pour des espaces à nombre quelconque de dimensions. Or, j'ai remarqué qu'il parait utile à considérer, au sujet de leurs propriétés, les courbes en question séparément dans le cas des espaces à nombre pair de dimensions et dans le cas des espaces à nombre impair de dimensions. Ainsi, par exemple, les courbes en question, plongées dans l'espace euclidien à quatre dimensions, jouissent des propriétés qui généralisent, d'une manière naturelle et très simple, les propriétés banales des circonférences et on a des généralisations analogues dans les espaces euclidiens à nombre *pair* quelconque de dimensions. J'appele les courbes en question, plongées dans un espace à nombre *pair* de dimensions (≥ 4) *hypercirconférences.*

Le présent Mémoire se trouve consacré à l'étude des propriétés géométriques des hypercirconférences dans l'espace euclidien à quatre dimensions et des certaines surfaces paraboliques auxquelles on est amené à cette occasion. Les surfaces en question jouissent de la propriété locale caractéristique qu'un sommet de l'indicatrice de courbure normale, en chaque point de la surface, coïncide avec le point correspondant et le rapport k des axes de l'indicatrice est le même en chaque point de la surface. Je montre, en particulier, que les surfaces en question se divisent en deux classes différentes, suivant que $k \neq 2$ ou bien $k = 2$. Les surfaces avec $k \neq 2$ sont toujours réglées et elles se trouvent associées, dans un certain sens, aux hypercirconférences de l'espace. Les surfaces avec $k = 2$ sont réglées ou non. Dans le premier cas elles sont associées aux circonférences et jouissent des propriétés intégrales analogues aux celles des surfaces précédentes. Dans le second cas les surfaces correspondantes se trouvent associées d'une certaine manière à une classe de courbes dont la détermination analytique conduit à l'intégration d'une équation hypergéométrique avec un paramètre.

Les résultats, contenus dans ce Mémoire, au sujet des propriétés intégrales des hypercirconférences, peuvent être généralisés, souvent sans difficultés, à des espaces à nombre pair quelconque de dimensions. Cependant, la recherche de toutes les surfaces paraboliques, plongées dans tels espaces, qui jouissent, en ce qui concerne l'indicatrice de courbure normale, des propriétés locales considérées, laissent des grandes difficultés à prévoir et dans cette connexion, le cas particulier de l'espace à quatre dimensions mérite d'une considération particulière.

I. Recherches élémentaires sur les hypercirconférences dans l'espace euclidien à quatre dimensions.

1. Plongeons nous dans l'espace euclidien à quatre dimensions et imaginons une hypercirconférence Γ. A chaque point P de Γ faisons correspondre un repère mobile formé par quatre vecteurs unitaires $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ issus du P et menés, respectivement, dans la direction de la tangente et des trois normales successives au point P. Soient a_1, a_2, a_3 les trois courbures scalaires successives (constantes, non nulles) de l'hypercirconférence et soit s son arc. Posons $P' = \dfrac{dP}{ds}$, $\boldsymbol{t}' = \dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}$, etc. Avec ces notations nous avons les formules de Frenet bien connues

$$\begin{aligned}
P' &= \boldsymbol{t}, \\
\boldsymbol{t}' &= a_1 \boldsymbol{n}_1, \\
\boldsymbol{n}'_1 &= -a_1 \boldsymbol{t} + a_2 \boldsymbol{n}_2, \\
\boldsymbol{n}'_2 &= -a_2 \boldsymbol{n}_1 + a_3 \boldsymbol{n}_3, \\
\boldsymbol{n}'_3 &= -a_3 \boldsymbol{n}_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

qui définissent la courbe à un mouvement et l'orientation près. Nous pouvons supposer, c'est ce que nous ferons dans la suite que, toutes les constantes a_1, a_2, a_3 sont positives. Si, en effet, p. ex. $a_1 < 0$, on prendra, au lieu des vecteurs $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ les vecteurs du sense inverse.

Convenons d'appeler *plan tangent* (*plan normal*) au point P le plan des deux vecteurs $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}_2$ ($\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_3$).

2. Cela étant, associons au point P de Γ le point O défini par la formule

$$O = P + \frac{1}{a_1} \boldsymbol{n}_1 + \frac{a_2}{a_1 a_3} \boldsymbol{n}_3. \tag{2}$$

Les formules (1) appliqués à cette formule montrent immédiatement que, le point O ne dépend pas de s et par suite qu'il est fixe dans l'espace. Comme il est situé, évidément, dans le plan normale au point P on a le théorème suivant:

Tous les plans normaux d'une hypercirconférence aux courbures scalaires a_1, a_2, a_3, arbitrairement données, passent par un point fixe — le centre de l'hypercirconférence — qui se trouve déterminé par la formule (2).

Le rayon vecteur issu du centre O et ayant son sommet au point P de Γ est évidément

$$\boldsymbol{r} = -\left(\frac{1}{a_1}\boldsymbol{n}_1 + \frac{a_2}{a_1 a_3}\boldsymbol{n}_3\right). \tag{3}$$

Sa longuer étant* $\frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_1 a_3}$ on a le résultat suivant:

Une hypercirconférence aux courbures scalaires a_1, a_2, a_3 arbitrairement données se trouve située sur l'hypersphère dont le centre est le centre de l'hypercirconférence et dont le rayon est $\frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_1 a_3}$.

3. Pour aller plus loin nous allons définir dans chaque point P de Γ quatre directions normales les unes aux autres qui joueront un rôle important dans la suite.

Considérons, au point P de Γ un vecteur $\boldsymbol{y}$, issu du point P tel que la somme des carrés des produits scalaires de ce vecteur avec les vecteurs $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'_1$, $\boldsymbol{n}'_2$, $\boldsymbol{n}'_3$, issus du même point P, soit constante $(=\lambda^2)$. Si y, y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{y}$ suivant les axes $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, associées au point P, on a, d'après les formules (1),

$$(a_1 y - a_2 y_2)^2 + a_3^2 y_2^2 + (a_3 y_3 - a_2 y_1)^2 + a_1^2 y_1^2 = \lambda^2. \tag{4}$$

Inversement, si les coordonnées y, y_1, y_2, y_3 d'un vecteur $\boldsymbol{y}$, issu du point P, satisfont à la relation (4), le vecteur jouit de la propriété voulue. On voit ainsi que, pour chaque valeur du paramètre λ les extremités des vecteurs jouissant de la propriété en question décrivent une quadrique centrique (au centre P) bien déterminée et toutes les quadriques correspondant aux différentes valeurs du paramètre λ forment une famille intrinsèque de quadriques concentriques et homothétiques. Or, il est évident que, les quadriques en question sont des *hyperellipsoïdes*. On a donc au point P quatre directions privilegiées, normales les unes aux autres, à savoir les directions des quatre axes communes à tous les hyperellipsoïdes de la famille considérée. Nous appelerons *directions axiales* au point P les quatre directions en question et nous montrerons que, deux de ces directions sont situées dans le plan tangent (nous les appelerons *directions axiales du plan tangent*) les deux autres dans le plan normal (*directions axiales du plan normal*) au point P.

Considérons, en effet, l'équation biquadratique

$$x^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,x^2 + a_1^2 a_3^2 = 0 \tag{5}$$

---

* Dans la suite nous écrivons toujours le signe $\sqrt{}$ au lieu de $\sqrt{}$.

et désignons ses racines (nécéssairement réelles) par $p, -p, q, -q$. Des deux quantités p^2, q^2, comme il est facile de le voir, une (l'autre) est supérieure (inférieure) à a_1^2, a_3^2 et aucune n'est nulle. Nous pouvons donc choisir les notations de manière à avoir $q > a_1$, $a_3 > p > 0$.
Posons alors

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1^2 - p^2}{a_1 a_2}, \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{a_3^2 - q^2}{a_3 a_2}. \tag{6}$$

Ces formules définissent, évidément, précisément une quantité φ resp. ψ telle que $-\frac{\pi}{2} < \psi < 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ et elles entraînent

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 a_1 a_2}{a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}, \qquad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 a_3 a_2}{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}. \tag{7}$$

Cela étant, effectuons la transformation du système de référence locale consistant dans les deux déplacements

$$\begin{aligned} x &= y \cos\varphi + y_2 \sin\varphi, & x_1 &= -y_1 \cos\psi + y_3 \sin\psi, \\ x_2 &= y \sin\varphi - y_2 \cos\varphi, & x_3 &= y_1 \sin\psi + y_3 \cos\psi. \end{aligned} \tag{8}$$

L'équation (4) se trouve alors réduite à sa forme canonique

$$\begin{gathered} x^2 \left[(a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi)^2 + a_3^2 \sin^2\varphi\right] + \\ + x_2^2 \left[(a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi)^2 + a_3^2 \cos^2\varphi\right] + \\ + x_1^2 \left[(a_3 \sin\psi + a_2 \cos\psi)^2 + a_1^2 \cos^2\psi\right] + \\ + x_3^2 \left[(a_3 \cos\psi - a_2 \sin\psi)^2 + a_1^2 \sin^2\psi\right] = \lambda^2. \end{gathered} \tag{9}$$

On en voit que, deux des directions axiales, au point P, se trouvent situées dans le plan tangent et forment avec le vecteur $\boldsymbol{t}$ correspondant l'angle φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$), les angles étant comptés positivement dans le sens $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{n}_2$; les deux autres se trouvent situées dans le plan normal et forment avec le vecteur $\boldsymbol{n}_3$ correspondant l'angle ψ et $\psi + \frac{\pi}{2}$, les angles étant comptés positivement dans le sens $\boldsymbol{n}_3 \to \boldsymbol{n}_1$.

4. Soit P un point pris arbitrairement sur l'hypercirconférence et supposons à son sujet, ce que ne restreint point la généralité qu'il correspond à la valeur $s = 0$ de l'arc de la courbe. Considérons quatre vecteurs rectangulaires unitaires, issus du point P, se déduisant des vecteurs $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_3$ associés au point P par les déplacements (8) et situés, par conséquence, dans les quatre directions axiales au point P. Prenons enfin quatre vecteurs, issus du centre O de l'hypercirconférence et équipolents aux vecteurs considérés. Nous allons déduire les équations finies de l'hypercirconférence par rapport au système de référence formé par ces quatre vecteurs issus du centre O.

Il est bien connu* que, les équations d'une hypercirconférence

* V. p. ex. R. Forsyth, *Geometry of four dimensions* (Cambridge, 1930), Vol. I., p. 283.

aux courbures scalaires a_1, a_2, a_3 rapportées au système de référence formé par les quatre vecteurs $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ au point $s = 0$ de la courbe sont

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{q^2 - p^2}\left\{(q^2 - a_1^2)\frac{\sin ps}{p} - (p^2 - a_1^2)\frac{\sin qs}{q}\right\},\\
y_1 &= \frac{a_1}{q^2 - p^2}\left\{(q^2 - a_1^2 - a_2^2)\frac{1 - \cos ps}{p^2} - (p^2 - a_1^2 - a_2^2)\frac{1 - \cos qs}{q^2}\right\},\\
y_2 &= \frac{a_1 a_2}{q^2 - p^2}\left\{\frac{\sin ps}{p} - \frac{\sin qs}{q}\right\}, \qquad (10)\\
y_3 &= \frac{a_1 a_2 a_3}{q^2 - p^2}\left\{\frac{1 - \cos ps}{p^2} - \frac{1 - \cos qs}{q^2}\right\},
\end{aligned}
$$

les y étant les coordonnées suivant les axes et p, $-p$, q, $-q$ ayant la même signification comme au n° précédent.

Pour réduire les équations de la courbe à la forme voulue effectuons d'abord les déplacements (8).

On a, d'après (6)

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 a_2^2 + (a_1^2 - p^2)^2}}, & \sin\varphi &= \frac{a_1^2 - p^2}{\sqrt{a_1^2 a_2^2 + (a_1^2 - p^2)^2}};\\
\cos\psi &= \frac{a_3 a_2}{\sqrt{a_3^2 a_2^2 + (a_3^2 - q^2)^2}}, & \sin\psi &= \frac{a_3^2 - q^2}{\sqrt{a_3^2 a_2^2 + (a_3^2 - q^2)^2}}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

de sorte que les coordonnées x, x_2, x_1, x_3 par rapport au système de vecteurs considérés, issu du point P, sont

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a_1 a_2}{p\sqrt{a_1^2 a_2^2 + (a_1^2 - p^2)^2}} \sin ps,\\
x_2 &= \frac{\sqrt{a_1^2 a_2^2 + (a_1^2 - p^2)^2}}{q(q^2 - p^2)} \sin qs,\\
x_1 &= \frac{a_1 a_2 a_3}{p^2\sqrt{a_3^2 a_2^2 + (a_3^2 - q^2)^2}} (\cos qs - 1), \qquad (12)\\
x_3 &= \frac{a_1\sqrt{a_3^2 a_2^2 + (a_3^2 - q^2)^2}}{q^2(q^2 - p^2)} (\cos qs - 1).
\end{aligned}
$$

Or, une verification facile permet de voir que, parmi les coefficients numériques figurant dans les seconds membres des formules précédentes il n'y en a que deux différents tels qu'on peut poser

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1 a_2}{p\sqrt{a_1^2 a_2^2 + (a_1^2 - p^2)^2}} \qquad \frac{a_1 a_2 a_3}{p^2\sqrt{a_3^2 a_2^2 + (a_3^2 - q^2)^2}} &= y, \qquad (13)\\
\frac{\sqrt{a_1^2 a_2^2 + (a_1^2 - p^2)^2}}{q(q^2 - p^2)} \qquad \frac{a_1\sqrt{a_3^2 a_2^2 + (a_3^2 - q^2)^2}}{q^2(q^2 - p^2)} &= z, \qquad (y, z > 0)
\end{aligned}
$$

et les formules (12) prennent la forme simple

$$x = y \sin ps,\quad x_2 = z \sin qs,\quad x_1 = y(\cos ps - 1),\quad x_3 = z(\cos qs - 1). \tag{14}$$

Or, les formules (2), (8) montrent facilement que, par rapport au même système de référence, auquel sont rapportées les formules précédentes, les coordonnées du centre de l'hypercirconférence sont précisément $x = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = -y$, $x_3 = -z$ de sorte que, finalement, les équations de l'hypercirconférence, par rapport au système voulu, sont

$$X = y \sin ps,\quad X_1 = y \cos ps,\quad X_2 = z \sin qs,\quad X_3 = z \cos qs. \tag{15}$$

Il y a, naturelement, une relation entre y, z, p, q qui s'obtient facilement, en calculant le ds^2 de l'hypercirconférence à l'aide des formules (15). On trouve que, la relation en question est la suivante

$$p^2 y^2 + q^2 z^2 = 1. \tag{16}$$

5. Les formules (15) mettent en évidence le fait bien connu *qu'une hypercirconférence quelconque admet un groupe de* ∞^1 *déplacements en elle-même. Ce groupe est, évidement,*

$$\begin{aligned} X' &= \cos p\sigma X + \sin p\sigma X_1, & X_2' &= \cos q\sigma X_2 + \sin q\sigma X_3,\\ X_1' &= -\sin p\sigma X + \cos p\sigma X_1, & X_3' &= -\sin q\sigma X_2 + \cos q\sigma X_3, \end{aligned} \tag{17}$$

et il lui appartient chaque déplacement de la courbe en elle-même. Le groupe en question consiste de rotations autour deux plans orthogonaux fixes à savoir les plans $X = X_1 = 0$ *et* $X_2 = X_3 = 0$.

Convenons d'appeler *plans axiaux* de l'hypercirconférence ces deux plans fixes.

Alors, il est clair que, *étant donnée une hypercirconférence quelconque, les plans axiaux passent par son centre.* Il est clair aussi que, *les différents points d'une hypercirconférence quelconque ont la même distance de ses plans axiaux* ou bien que, *chaque hypercirconférence se projete dans ses deux plans axiaux suivant deux circonférences dont le centre commun est le centre de l'hypercirconférence.*

6. Soit P un point de l'hypercirconférence, déterminé par la valeur s de l'arc. Par un déplacement du groupe (17), déterminé par une valeur particulière σ du paramètre, le point P se transforme au point P' déterminé par la valeur $s + \sigma$ de l'arc; le plan tangent (normal) au point P se transforme dans le plan tangent (normal) au point P' et les directions axiales de la courbe au point P se transforment en celles au point P'. On en déduit facilement, en considérant en particulier le point P qui correspond à la valeur $s = 0$ de l'arc que, le plan tangent, au point P', déterminé par la valeur σ de l'arc est donné par les équations

$$\begin{aligned} \sin p\sigma X + \cos p\sigma X_1 &= y,\\ \sin q\sigma X_2 + \cos q\sigma X_3 &= z, \end{aligned} \tag{18}$$

et le plan normal au point P' est

$$\begin{aligned} \cos p\sigma X - \sin p\sigma X_1 &= 0,\\ \cos q\sigma X_2 - \sin q\sigma X_3 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Quant aux directions axiales au point P', celles du plan tangent (normal) font avec les axes des angles dont les cosinus sont $\cos p\sigma$, $-\sin p\sigma$, 0, 0; 0, 0, $\cos q\sigma$, $-\sin q\sigma$ ($\sin p\sigma$, $\cos p\sigma$, 0, 0; 0, 0, $\sin q\sigma$, $\cos q\sigma$).

Or, les formules (18) montrent immédiatement que, le plan tangent au point P' et le plan axiale $X_2 = X_3 - 0$ ($X - X_1 = 0$) sont situés dans deux hyperplans parallèles et se coupent à l'infini suivant la direction $\cos p\sigma$, $-\sin p\sigma$, 0, 0 (0, 0, $\cos q\sigma$, $-\sin q\sigma$) c'est à dire suivant une (l'autre) direction axiale du plan tangent au point P'. Les formules (19) à leur tour mettent en évidence que, le plan normal au point P' est perpendiculaire au chacun des deux plans axiaux et les deux droites d'intersection du plan en question avec les plans axiaux ont les deux directions axiales du plan normal au point P'.

On a donc le résultat suivant:

Dans un point P quelconque d'une hypercirconférence arbitraire le plan tangent coupe les deux plans axiaux de l'hypercirconférence à l'infini suivant les deux directions axiales du plan tangent au point P. Le plan normal est perpendiculaire aux plans axiaux de l'hypercirconférence et les deux droites dans lesquelles il les coupe ont les directions axiales du plan normale au point P.

7. Les directions axiales du plan normal, dans un point P quelconque de la courbe, peuvent être obtenues par une construction géométrique simple, laquelle nous allons établir.

Plaçons nous dans un point P quelconque de la courbe et supposons à son sujet, ce qu'est toujours permis, qu'il se trouve déterminé par la valeur s 0 de l'arc. Considérons alors, au point P, en particulier, les vecteurs $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_3$ et regardons les comme un système de référence du plan normal au point P. L'hypercirconférence considérée se projete dans le plan normal au point P suivant une courbe qui se trouve déterminée par la deuxième et la quatrième formule (10). On a

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a_1}{2!} s^2 - a_1 \frac{a_1^2 + a_2^2}{4!} s^4 + \dots, \\ y_3 &- \qquad\qquad \frac{a_1 a_2 a_3}{4!} s^4 + \dots, \end{aligned} \tag{20}$$

les termes non écrits étant en s du sixième degré au moins. Par suite,

$$(a_2 a_3 y_1 + \overline{a_1^2 + a_2^2}\, y_3)^2 - 6 a_1 a_2 a_3 y_3 = 0 \tag{21}$$

est la conique (hyper-) osculatrice de la courbe en question au point P. C'est, évidément, une parabole qui passe par le point P et y est tangente à la première normale de l'hypercirconférence. Le centre de l'hypercirconférence O étant $y_1 \;\; \dfrac{1}{a_1}$, $y_3 = \dfrac{a_2}{a_1 a_3}$ la droite OP coupe encore la parabole en question au point Q, aux coordonnées

$$y_1 = \frac{6a_1 a_3^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}, \quad y_3 = \frac{6a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2},$$

et dans ce point la tangente à la parabole est

$$2a_2 a_3 y_1 + (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) y_3 - \frac{6a_1 a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 0. \tag{22}$$

Cette formule montre que, ψ étant l'angle (considéré au n° 3) que fait une direction axiale du plan normale au point P avec le vecteur $\boldsymbol{n}_3$, la direction de la tangente en question est normale à la direction formant avec le vecteur $\boldsymbol{n}_3$ l'angle 2ψ. Par suite, les deux angles complementaires que fait la tangente (22) avec le vecteur $\boldsymbol{n}_1$ sont 2ψ, $\pi + 2\psi$; par conséquent, les bisectrices de ces deux angles forment avec le vecteur $\boldsymbol{n}_1$ le angles ψ, $\frac{\pi}{2} + \psi$ — c'est à dire les mêmes que les directions axiales du plan normale au point P.

Pour construire, dans un point P quelconque d'une hypercirconférence arbitraire, les deux directions axiales du plan normal on considère la conique osculatrice au point P de la projection de l'hypercirconférence dans le plan normal considéré et on détermine l'autre point d'intersection Q de cette conique avec la droite joignant le point P avec le centre de l'hypercirconférence. Les deux directions axiales du plan normal au point P sont les directions des bisectrices des deux angles complementaires formés par les tangentes de la conique osculatrice considérée aux points P et Q.

8. Considérons une hypercirconférence quelconque et sur elle deux points *distincts* P, P'. Cherchons s'il peut arriver qu'une direction axiale du plan tangent (normal) au point P est la même qu'une direction axiale du plan tangent (normal) au point P'. Soient

$$X = y \sin ps, \; X_1 = y \cos ps, \; X_2 = z \sin qs, \; X_3 = z \cos qs \tag{23}$$

les équations de l'hypercirconférence et supposons que, les points P, P' sont déterminés par les valeurs s, 0 de l'arc. Les cosinus des angles que font, avec les axes, les directions axiales du plan tangent (normal) au point P resp. P' sont, d'après (6), $\cos ps$, $-\sin ps$, 0, 0; 0, 0, $\cos qs$, $-\sin qs$ ($\sin ps$, $\cos ps$, 0, 0; 0, 0, $\sin qs$, $\cos qs$) resp. 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0 (0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1). On en voit immédiatement pourqu'une et une seule direction axiale du plan tangent (normal) au point P soit la même qu'une direction axiale du plan tangent (normal) au point P' il faut et il suffit qu'une et une seule des deux quantités $\sin ps$, $\sin qs$ s'annule. Par suite, le fait qu'une et une seule direction axiale du plan tangent au point P est la même qu'une direction axiale du plan tangent au point P' et le fait qu'une et une seule direction axiale du plan normal au point P est la même qu'une direction axiale du plan normal au point P', ont lieu simultanément. On voit encore facilement que, pourque toutes les deux directions axiales du plan tangent (normal) au point P soient les mêmes que les deux directions axiales du plan tangent (normal) au point P' il faut et il suffit que, les deux quantités $\sin ps$, $\sin qs$ s'annulent simultanément. Par suite le fait que, les deux directions axiales du plan tangent au point P sont les mêmes que les directions axiales du plan tangent au point P' et le fait que les deux directions axiales du plan normal au point P sont les mêmes que les directions axiales du plan normal au point P', ont lieu simultanément. Convenons d'appeler deux points P, P' de l'hypercirconférence *semidiametralement* (*diametralement*) *opposés* l'un à l'autre si précisément une direction axiale (toutes les deux directions axiales) du plan tangent ou bien du plan normal au point P est la même (sont les mêmes) qu'au point P'. Dans tous les autres cas convenons de dire que, les deux points P, P' sont *en position générale* l'un à l'autre. Évidément, *sur chaque hypercirconférence il y a des couples de points semidiametralement opposés et des points qui sont en position générale l'un à l'autre mais il n'y a des points diametralement opposés que si l'hypercirconférence considérée est fermée.*

9. Considérons deux points *distincts* P, P' de l'hypercirconférence et les plans *tangents* de la courbe en ces deux points. Nous supposons encore, sans restreindre la généralité, que, les deux points considérés correspondent aux valeurs s, 0 de l'arc. Les coordonnées d'un point d'intersection des deux plans en question satisfont aux équations

$$\begin{aligned} \sin ps\, X + \cos ps\, X_1 \quad y, \qquad & \sin qs\, X_2 + \cos qs\, X_3 = z, \\ X_1 - y, \qquad & X_3 = z. \end{aligned} \tag{24}$$

Ces équations montrent que, si les deux points P, P' sont en position générale l'un à l'autre, les deux plans tangents correspondant se coupent dans un seul point. Si les deux points P, P' sont semidiametralement opposés l'un à l'autre de manière que p. ex. $\sin ps = 0$ les équations (24) sont de la forme

$$\begin{aligned} (-1)^m X_1 = y, \qquad & \sin qs\, X_2 + \cos qs\, X_3 = z, \\ X_1 \quad y, \qquad & X_3 \quad z, \end{aligned} \tag{25}$$

m étant entier. On en voit que, *si m est pair*, les deux plans tangents correspondants se coupent dans une ligne droite dont la direction est la direction axiale commune du plan tangent au point P et P'; *si m est impair*, les deux plans tangents sont situés dans deux hyperplans parallèles et se coupent à l'infini encore suivant la direction axiale commune du plan tangent au point P et P'. Finalement, si les deux points P, P' sont diametralement opposés l'un à l'autre les deux plans tangents correspondants sont parallèles l'un à l'autre.

Considérons encore les plans normaux aux points P, P'. Leurs équations sont

$$\begin{aligned} \cos ps\, X - \sin ps\, X_1 &= 0, & \cos qs\, X_2 - \sin qs\, X_3 &= 0, \\ X &= 0, & X_2 &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Elles montrent que, si les deux points P, P' sont en position générale l'un à l'autre les deux plans normaux correspondants n'ont en commun que le centre de l'hypercirconférence. Si les deux points P, P' sont semidiametralement opposés l'un à l'autre de manière que $\sin ps = 0$ [$\sin qs = 0$], les équations (26) sont de la forme

$$X = X_2 = X_3 = 0 \quad [X = X_1 = X_2 = 0]. \tag{27}$$

Par suite, les deux plans normaux correspondants sont situés dans un hyperplan et se coupent dans une ligne droite dont la direction est la direction axiale commune du plan normal au point P et P' et qui passe par le centre de l'hypercirconférence. Finalement, si les deux points P, P' sont diametralement opposés l'un à l'autre, les équations (26) ont la forme $X = X_2 = 0$ de sorte que, dans ce cas, les deux plans normaux correspondants sont confondus. On a donc le résultat suivant:

Deux plans tangents (normaux) pris en deux points P, P' d'une hypercirconférence quelconque se coupent dans un seul point si les deux points en question sont en position générale l'un à l'autre. Si les points P, P' sont semidiametralement opposés l'un à l'autre les deux plans tangents correspondants se coupent dans une ligne droite dont la direction est la direction axiale commune du plan tangent au point P et P'; ou bien, ils sont situés dans deux hyperplans parallèles l'un à l'autre et se coupent à l'infini encore suivant la direction axiale commune du plan tangent au point P et P'. Les deux plans normaux correspondants sont situés dans un hyperplan et se coupent dans une ligne droite dont la direction est la direction axiale commune du plan normal au point P et P' et qui passe par le centre de l'hypercirconférence. Si les points P, P' sont diametralement opposés l'un à l'autre les deux plans tangents correspondants sont parallèles l'un à l'autre et les deux plans normaux sont confondus.

10. Un calcul élémentaire montre que, la projection orthogonale Π du point P sur le plan tangent un point $\frac{s}{2}$ de la courbe se trouve donnée par les formules

$$\begin{aligned} X &= y \sin p \frac{s}{2} \left(1 + \cos p \frac{s}{2}\right), & X_1 &= y \left(\cos p \frac{s}{2} - \sin^2 p \frac{s}{2}\right), \\ X_2 &= z \sin q \frac{s}{2} \left(1 + \cos q \frac{s}{2}\right), & X_3 &= z \left(\cos q \frac{s}{2} - \sin^2 q \frac{s}{2}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

et celle Π' du point P' par les formules

$$\begin{aligned} X &= y \sin p \frac{s}{2} \left(1 - \cos p \frac{s}{2}\right), & X_1 &= y \left(\cos p \frac{s}{2} + \sin^2 p \frac{s}{2}\right), \\ X_2 &= z \sin q \frac{s}{2} \left(1 - \cos q \frac{s}{2}\right), & X_3 &= z \left(\cos q \frac{s}{2} + \sin^2 q \frac{s}{2}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

On en déduit immédiatement que, la distance $\overline{P\Pi}$ est égale à la distance $\overline{P'\Pi'}$.

Par suite,

étant donnés, sur une hypercirconférence arbitraire deux points P, P' quelconques, ils se trouvent situés à la même distance du plan tangent de la courbe pris au milieu de l'arc $\widehat{PP'}$.

11. Le plan normal à la courbe au point $\frac{s}{2}$ est, évidément,

$$\cos p\frac{s}{2}X - \sin p\frac{s}{2}X_1 = 0,\ \cos q\frac{s}{2}X_2 - \sin q\frac{s}{2}X_3 = 0. \qquad (30)$$

Il contient, en tout cas, le centre de la sécante $\overline{PP'}$, à savoir le point

$$X = \frac{y}{2}\sin ps,\ X_1 \quad y\cos^2 p\frac{s}{2},\ X_2 = \frac{z}{2}\sin qs,\ X_3 = z\cos^2 q\frac{s}{2}. \qquad (31)$$

Si les deux points P, P' sont en position générale l'un à l'autre, le point d'intersection des deux plans tangents correspondants est, d'après (24),

$$X = y\,tg p\frac{s}{2},\ X_1 = y,\ X_2 = z\,tg q\frac{s}{2},\ X_3 = z. \qquad (32)$$

Par suite,

étant donnés, sur une hypercirconférence, quelconque, deux points P, P' en position générale l'un à l'autre, le plan normal de la courbe, pris au milieu de l'arc $\widehat{PP'}$, contient le centre de la secante $\overline{PP'}$ ainsi que le point d'intersection des deux plans tangents en P et P'.

Si les points P, P' sont semidiametralement opposés l'un à l'autre, les deux plans tangents correspondants se coupent suivant une ligne droite ou bien ils sont situés dans deux hyperplans parallèles l'un à l'autre (n° 9). S'ils se coupent suivant une ligne droite de manière que p. ex. $\sin p\frac{s}{2} - 0$, $\cos p\frac{s}{2} \neq 0$, la droite d'intersection se trouve coupée, évidément, par le plan normal au point $\frac{s}{2}$, dans un point bien déterminé. Si les deux plans tangents en P et P' sont situés dans deux hyperplans parallèles l'un à l'autre, de manière que p. ex. $\sin p\frac{s}{2} \neq 0$, $\cos p\frac{s}{2} = 0$, le plan normal au point $\frac{s}{2}$ se trouve situé dans l'hyperplan $X_1 = 0$ qui est parallèle, évidément, aux deux hyperplans en question et les trois plans en question se coupent deux à deux à l'infini suivant la même direction — à savoir la direction axiale commune du plan tangent au point P et P'.

Si les points P, P' sont diametralement opposés l'un à l'autre, les deux plans tangents correspondants sont parallèles l'un à l'autre. On a, dans ce cas $ps = m\pi$, $qs = n\pi$; m, n étant entiers. Comme les points P, P' sont distincts, au moins un des entiers m, n est impair. Si tous les deux sont impairs on a $\cos p\frac{s}{2} = 0$, $\cos q\frac{s}{2} = 0$ de sorte que, dans ce cas, le plan normal au point $\frac{s}{2}$ est $X_1 - X_3 = 0$ et par suite il est parallèle aux deux plans tangents au point P et P' et il passe du reste par le centre de l'hypercirconférence. Si précisément m (n) est impair on a $\cos p\frac{s}{2} = 0$, $\cos q\frac{s}{2} \neq 0$ ($\cos p\frac{s}{2} \neq 0$, $\cos q\frac{s}{2} = 0$) de sorte que, dans ce cas, le plan normal au point $\frac{s}{2}$ est $X_1 = X_2 = 0$ ($X = X_3 = 0$); par suite, le plan tangent au point soit P soit P' et le plan normal au point $\frac{s}{2}$ sont situés dans deux hyperplans parallèles l'un à l'autre et se coupent à l'infini suivant une direction axiale au point P et P'.

12. Considérons la sécante déterminée par les points P, P'. Si X, X_1, X_2, X_3 sont les coordonnées d'un point de la sécante on a

$$\begin{gathered} X = \varrho y \sin ps, \quad X_1 = y\left(1 - 2\varrho \sin^2 p\frac{s}{2}\right), \quad X_2 = \varrho z \sin qs, \\ X_3 = z\left(1 - 2\varrho \sin^2 q\frac{s}{2}\right). \qquad (0 < \varrho < 1) \end{gathered} \tag{33}$$

On en déduit par un calcul élémentaire que, la trace de la perpendiculaire menée du centre de l'hypercirconférence à la droite, sur laquelle se trouve située la sécante considérée, est

$$X = \frac{y}{2}\sin ps, \quad X_1 = y\cos^2 p\frac{s}{2}, \quad X_2 = \frac{z}{2}\sin qs, \quad X_3 = z\cos^2 q\frac{s}{2},$$

c'est à dire le centre de la sécante. Par suite,

la distance d'une sécante quelconque au centre de l'hypercirconférence est égale à la distance du centre de la sécante au centre de l'hypercirconférence.

13. Supposons maintenant que les points P, P' sont déterminés par les valeurs s, σ de l'arc. Considérons le plan tangent à la courbe au point P,

$$\sin ps X + \cos ps X_1 = y, \quad \sin qs X_2 + \cos qs X_3 = z.$$

Le plan qui projète orthogonalement le point P' sur le plan tangent considéré est parallèle au plan normal au point P et se trouve déterminé par les équations

$$\begin{aligned} \cos ps X - \sin ps X_1 &= y \sin p(\sigma - s), \\ \cos qs X_2 - \sin qs X_3 &= z \sin q(\sigma - s). \end{aligned} \tag{34}$$

Par suite, la projection Π' du point P' sur le plan tangent considéré est

$$\begin{aligned}
X &= y\,[\sin ps + \cos ps \sin p\,(\sigma - s)],\\
X_2 &= z\,[\sin qs + \cos qs \sin q\,(\sigma - s)],\\
X_1 &\quad y\,[\cos ps - \sin ps \sin p\,(\sigma - s)],\\
X_3 &\quad z\,[\cos qs - \sin qs \sin q\,(\sigma - s)].
\end{aligned} \tag{35}$$

La longeur de la projection $P\Pi'$ de la sécante PP' est donc

$$\delta = \sqrt{y^2 \sin^2 p\,(\sigma - s) + z^2 \sin^2 q\,(\sigma - s)}. \tag{36}$$

D'autre part, la longuer de la sécante PP' elle même est

$$\mathrm{d} = 2\sqrt{y^2 \sin^2 p\,\frac{\sigma - s}{2} + z^2 \sin^2 q\,\frac{\sigma - s}{2}}. \tag{37}$$

Soit Θ_s l'angle que fait la sécante PP' avec le plan tangent au point P. Cet angle est égal au celui que fait la sécante PP' avec sa projection $\overline{P\Pi'}$. On a donc

$$\cos \Theta_s = \frac{\delta}{\mathrm{d}}. \tag{38}$$

Soit Θ_σ l'angle que fait la sécante PP' avec le plan tangent au point P'. On aura, évidément, $\cos \Theta_\sigma$ en échangeant, dans le second membre de la formule (38) s et σ. Comme le second membre en question est symétrique par rapport au s et σ on a $\Theta_s = \Theta_\sigma$. Par conséquent, *les deux angles que fait une sécante arbitraire d'une hypercirconférence quelconque avec les plans tangents à ses extrémités sont égaux.*

14. Supposons maintenant les deux points P, P' en position générale l'un à l'autre et déterminés encore par les valeurs s, σ de l'arc. Le point d'intersection des deux plans tangents aux points P, P' est

$$\begin{aligned}
X - y\,\frac{\sin p\,\frac{s+\sigma}{2}}{\cos p\,\frac{s-\sigma}{2}}, &\quad X_1 = y\,\frac{\cos p\,\frac{s+\sigma}{2}}{\cos p\,\frac{s-\sigma}{2}},\\
X_3 = z\,\frac{\sin q\,\frac{s+\sigma}{2}}{\cos q\,\frac{s-\sigma}{2}}, &\quad X_3 = z\,\frac{\cos q\,\frac{s+\sigma}{2}}{\cos q\,\frac{s-\sigma}{2}}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Ces formules montrent que, si l'on varie les deux points P, P' sur la courbe de manière que la différence $s - \sigma$ soit constante, le point d'intersection des deux plans tangents correspondants décrit encore une hypercirconférence qui a en commun, avec l'hypercirconférence primitive les plans axiaux. On a donc le résultat suivant:

Étant donnée une hypercirconférence quelconque, les points d'intersection des couples de ses plans tangents pris aux points en position *générale et ayant sur la courbe la même distance l'un à l'autre, sont situés encore sur une hypercirconférence qui a en commun, avec l'hypercirconférence primitive, les plans axiaux.*

II. Hypersurfaces et surfaces associées aux hypercirconférences.

1. Étant donnée une hypercirconférence arbitraire Γ appelons *hypersurface associée à Γ* l'hypersurface qui se trouve engendrée par les plans normaux aux différents points de Γ.

Considérons une hypercirconférence quelconque Γ. Prenons ses équations sous la forme

$$X = y \sin ps, \quad X_1 = y \cos ps, \quad X_2 = z \sin qs, \quad X_3 = z \cos qs \qquad (y,\ z;\ p,\ q = \mathrm{C^{tes}}) \tag{40}$$

Alors, les équations de l'hypersurface associée à Γ sont, évidément, les mêmes à condition qu'on regarde y, z, s comme variables indépendantes.

On en voit, en particulier que, *l'hypersurface associée à une hypercirconférence arbitraire contient les deux plans axiaux de celle-ci.*

Soit P un point particulier quelconque de l'hypersurface associée à Γ, non situé dans un plan axial de Γ. La trajectoire du groupe de déplacements de Γ en elle même, qui passe par P, est manifestement, une hypercirconférence Γ'. Celle-ci ne rencontre, évidément, aucun des plans axiaux de Γ; l'hypersurface qui lui est associée se confond avec l'hypersurface associée à Γ; par suite, en particulier, Γ' se trouve située sur l'hypersurface associée à Γ.

Soit maintenant P un point quelconque de l'hypersurface associée à Γ, situé dans un plan axial de Γ. On voit immédiatement que, la trajectoire du groupe de déplacements de Γ en elle-même qui passe par P, est une circonférence dont le centre se trouve au centre de Γ et qui est située dans le même plan axial et par suite sur l'hypersurface associée à Γ (le rayon de cette circonférence est égal à zéro si P est le centre de Γ).

On a donc le résultat suivant:

Étant donnée une hypercirconférence arbitraire Γ le groupe de déplacements de Γ en elle-même conserve l'hypersurface associée à Γ. Le trajectoires de ce groupe sur l'hypersurface en question sont soit des hypercirconférences situées hors des plans axiaux de Γ et telles que leurs hypersurfaces associées se confondent toutes avec l'hypersurface associée à Γ, soit des circonférences concentriques situées dans les plans axiaux de Γ dont le centre se trouve au centre de Γ.

2. Considérons dans l'espace deux plans fixes orthogonaux l'un à l'autre et choisissons le système de référence de manière que $X = X_1$ 0 et $X_2 = X_3 = 0$ sont leurs équations. Considérons alors le groupe à deux

paramètres φ, ψ, consistant en rotations autour les deux plans considérés,

$$\begin{aligned} X' &= \cos\varphi X + \sin\varphi X_1, & X_2' &= \cos\psi X_2 + \sin\psi X_3, \\ X_1' &= -\sin\varphi X + \cos\varphi X_1, & X_3' &= -\sin\psi X_2 + \cos\psi X_3. \end{aligned} \tag{41}$$

Soit G son sousgroupe à un paramètre défini par une relation linéaire entre φ et ψ aux coefficients constants non nuls. Une telle relation peut être supposée, évidément, sous la forme

$$\varphi = ps, \qquad \psi = qs,$$

$p > 0$, $q > 0$ étant des constantes et s étant arbitraire. On en voit que, G consiste en transformations du groupe (41) telles que, les angles de leurs rotations autour d'un plan fixe considéré sont en rapport constant aux angles des rotations autour de l'autre. Nous dirons, pour abréger, que G est un sousgroupe *linéaire* du groupe (41) et nous l'appelerons *spécial* dans le cas $p = q$.

Cela étant, imaginons un plan particulier quelconque, perpendiculaire aux deux plans fixes considérés. Ses équations peuvent être prises, évidément, sous la forme $X = X_2 = 0$. Par une transformation arbitraire du groupe G, déterminée par une valeur particulière s du paramètre, le plan considéré se trouve déplacé dans le plan

$$X = y\sin ps, \quad X_1 = y\cos ps, \quad X_2 = z\sin qs, \quad X_3 = z\cos qs,$$

ou y, z, sont variables indépendantes. Par suite, si le groupe G n'est pas spécial, le lieu du plan en question est l'hypersurface associée à une circonférence. Inversement, il est clair que, chaque hypersurface associée à une hypercirconférence peut être engendrée de cette manière.

On a donc le résultat suivant:

Les hypersurfaces associées aux hypercirconférences sont toutes et seules les variétés engendrées par des plans perpendiculaires à deux plans orthogonaux fixes, tous déplacés les uns des autres par des transformations toujours d'un sousgroupe linéaire non spécial du groupe de rotations autour les deux plans orthogonaux.

3. Étant donnée une hypercirconférence arbitraire Γ convenons d'appeler *surface associée à* Γ la surface réglée, qui se trouve engendrée par les droites passant par les différents points de Γ de manière que, la direction de la droite passant par un point P de Γ est la direction axiale du plan normal de Γ en P, toujours parallèle à un des deux plans axiaux fixé une fois pour toutes.

Il y a donc deux surfaces associées à chaque hypercirconférence, répondant à ses deux plans axiaux. Comme la droite passant par un point P de l'hypercirconférence dans une direction axiale du plan normal en P se trouve située dans le plan normal issu de ce point on voit que, *les deux surfaces associées à une hypercirconférence arbitraire* Γ *se trouvent situées sur l'hypersurface associée à* Γ. On a donc sur l'hypersurfaces associée à Γ deux familles simples de surfaces privilégiées à savoir les deux familles de surfaces associées aux trajectoires du groupe de déplacements de Γ en elle-même (la surface associée à une circonférence, trajectoire du groupe en question dans un plan axial de Γ, étant *par définition* le plan axial même).

4. Soit Γ une hypercirconférence et soient (40) ses équations. Il est clair que, par rapport au même système de référence, les équations d'une et l'autre surface associée à Γ ont exactement la même forme; on a seulement à regarder, dans les formules (40) une fois y, s l'autre fois z, s comme variables indépendantes.

Soient alors

$$X = y \sin ps, \quad X_1 = y \cos ps, \quad X_2 = z \sin qs, \quad X_3 = z \cos qs \quad (0 < z = \mathrm{C^{te}}) \tag{42}$$

les équations d'une surface associée à Γ. On voit que, tous se points se trouvent à la même distance z du plan axial $X_2 - X_3 = 0$. La surface en question est donc située sur la variété d'intersection de l'hypersurface associée à Γ avec l'hypersurface cylindrique dont l'axe est le plan axial en question et dont le rayon est z et il est clair qu'elle recouvre toute la variété. Cette remarque avec le résultat du nº II, 2 permet de donner une définition des surfaces considérées sans fair entrer dans la définition la notion de l'hypercirconférence:

Chaque surface associée à une hypercirconférence est la variété d'intersection de l'hypersurface, lieu des plans perpendiculaires à deux plans orthogonaux fixes, tous déplacés les uns des autres par des transformations, d'un sousgroupe linéaire non spécial du groupe de rotations autour les deux plans et d'une hypersurface cylindrique dont l'axe est formée par un de ces deux plans.

Tous les points de l'hypercirconférence Γ, ayant la même distance du plan axial $X_1 = X_2 = 0$, Γ se trouve située sur la variété d'intersection de la surface (42) avec l'hypersurface cylindrique dont l'axe est le plan axial en question et dont le rayon est $|y|$ et il est clair qu'elle recouvre toute la variété.

Par suite,

chaque hypercirconférence est la courbe d'intersection de l'hypersurface, lieu des plans perpendiculaires à deux plans orthogonaux fixes, tous déplacés les uns des autres par des transformations d'un sousgroupe linéaire non spécial du groupe de rotations autour les deux plans et d'une surface cylindro-cylindrique dont les axes sont les deux plans en question.

5. Étant donnée une surface associée à une hypercirconférence Γ nous appelerons *l'axe* de la surface le plan axial de Γ duquel tous les points de la surface ont la même distance. Les deux plans axiaux de Γ sont alors, évidément, les axes des deux surfaces associées à Γ.

Étant donnée une surface associée à une hypercirconférence quelconque Γ, elle coupe précisément un des deux plans axiaux de Γ suivant une circonférence concentrique avec Γ. Dans un point P quelconque de cette *circonférence* convenons d'appeler *directions axiales du plan normal* la direction de la normale à la circonférence au point P et la direction de la génératrice de la surface qui passe par P; *directions axiales du plan tangent,* la direction de la tangente à la circonférence au point P et la direction normale à celle-ci et aux deux directions axiales du plan normal au point P; *plan normal* (*tangent*), le plan passant par P et contenant les deux directions du plan normal (tangent) au point P. Convenons enfin de comprendre sous les *plans axiaux* de la circonférence en question, les plans axiaux de Γ; sous *les surfaces associées* à la circonférence la surface considérée, associée à Γ, et le plan de la circonférence; sous les *axes* de ces deux surfaces, les plans axiaux de Γ.

6. Cela étant, on obtient, par des raisonnements facile à faire, au sujet des surfaces associées aux hypercirconférences, les résultats suivants que nous nous contentons à énoncer sans procéder à leur démontration.

Étant donnée une surface associée à une hypercirconférence Γ quelconque, le groupe de déplacements de Γ en elle même conserve la surface. Les trajectoires de ce groupe sur la surface sont formées soit par une famille simple de hypercirconférences soit par une circonférence qui est la courbe d'intersection de la surface avec l'axe de l'autre surface associée à Γ. Les plans axiaux de chaque trajectoire en question se confondent avec ceux de Γ de sorte que, les trajectoires considérées se trouvent découpees, sur la surface par une famille d'hypersurfaces cylindriques dont l'axe commune est l'axe de l'autre surface associée à Γ et les deux surfaces associées à une trajectoire quelconque ont les mêmes axes que celles à Γ. Dans la correspondance ponctuelle, engendrée entre les différentes trajectoires sur la surface par les génératrices de la surface, deux points correspondants quelconques de deux trajectoires fixes, arbitrairement choisies, ont la même distance. Aux points correspondants, les différentes trajectoires ont les mêmes directions axiales du plan tangent et du plan normal ainsi que le même plan normal; leurs plans tangents sont situés dans le même espace à trois dimensions et sont parallèles les uns aux autres. Une des deux surfaces associées à une trajectoire quelconque se confond toujours avec la surface considérée, associée à Γ.

7. Nous allons procéder par établir d'autres propriétés des surfaces associées aux hypercirconférences. Considérons une telle surface et prenons ses équations sous la forme (42). Le dS^2 de la surface étant

$$dS^2 = dy^2 + (p^2 y^2 + q^2 z^2)\, ds^2, \tag{43}$$

on voit facilement que, *la surface considérée est applicable sur le cathénoïde*

$$X = r \sin \Theta, \quad Y = r \cos \Theta, \quad Z = \frac{qz}{p} \operatorname{Ar\,Cos} \frac{p}{qz} r, \tag{44}$$

les formules des d'application étant

$$p y \quad \sqrt{p^2 r^2 - q^2 z^2}, \quad p s = \Theta. \tag{45}$$

8. Pour aller plus loin il nous ne paraît pas inutile de faire une breve explication concernant la notion de courbure normale des courbes sur une surface plongée dans l'espace à quatre dimensions.

Imaginons une surface (M) quelconque plongée dans l'espace considéré et soit M un point arbitraire sur (M). Considérons alors, sur la surface, une courbe arbitraire, non droite, qui passe par M. On a en M, en particulier, le vecteur de première courbure de la courbe au point M. La projection de ce vecteur dans le plan normal de la surface au point M est un vecteur qu'on appele *vecteur de courbure normale* de la courbe considérée au point M; il ne dépend que de la direction de la courbe. Les sommets des vecteurs des courbures normales, au point M, associés aux différentes directions des courbes sur la surface passant par M se trouvent situés sur une éllipse qu'on appele *indicatrice de courbure normale* de la surface au point M. Il y a donc sur la surface, au point M, en général, précisément quatre directions privilégiées à savoir celles, auxquelles sont associés les quatre vecteurs de courbure normale dont les sommets déterminent les quatre sommets de l'indicatrice. Nous appelerons *courbe de courbure normale* une courbe sur la surface dont la direction, en chaque point, est une de ces directions privilégiées. Il y a donc, en général, sur une surface précisément quatre familles simples de courbes de courbure normale. Un point M de la surface s'appele *parabolique* si l'indicatrice de courbure normale, en M, passe par lui. La surface (M) s'appele *parabolique* si tous ses points sont paraboliques.

9. Nous allons examiner les surfaces considérées au sujet de leurs indicatrices de courbure normale.

Dans ce but, revenons à la définition primitive de ces surfaces et imaginons une surface, associée à une hypercirconférence Γ, laquelle se trouve déterminée, à son tour par les formules de Frenet (1). Soit alors M un point variable sur la surface. On peut évidément prendre

$$M \quad P + y(\sin\Psi \boldsymbol{n}_1 + \cos\Psi \boldsymbol{n}_3), \tag{46}$$

y étant variable et $-\frac{\pi}{2} < \Psi < \frac{\pi}{2}$ étant l'anglé ψ déterminé par la formule (6_2) ou bien $\psi + \frac{\pi}{2}$ pour l'une ou l'autre surface associée à Γ. Les formules (1) donnent

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} = ds\left\{\overline{1 - y a_1 \sin\Psi}\, \boldsymbol{t} + y\, \overline{a_2 \sin\Psi - a_3 \cos\Psi}\, \boldsymbol{n}_2\right\} + \\ + dy\left\{\sin\Psi \boldsymbol{n}_1 + \cos\Psi \boldsymbol{n}_3\right\}, \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} d^2\boldsymbol{M} = ds^2\left\{\overline{a_1 - y(a_1^2 + a_2^2 \sin\Psi - a_2 a_3 \cos\Psi)}\, \boldsymbol{n}_1 + y a_3\, \overline{a_2 \sin\Psi - a_3 \cos\Psi}\, \boldsymbol{n}_3\right\} \\ + 2\, dy\, ds\left\{ a_1 \sin\Psi \boldsymbol{t} + \overline{a_2 \sin\Psi - a_3 \cos\Psi}\, \boldsymbol{n}_2 \right\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Faisons correspondre à chaque point M de la surface un repère, formé par quatre vecteurs unitaires rectangulaires $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ définis par les formules

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{(1-ya_1\sin\Psi)\boldsymbol{t}+y(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)\boldsymbol{n}_2}{\sqrt{(1-ya_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}};\\
\boldsymbol{e}_2 &= \sin\Psi\,\boldsymbol{n}_1+\cos\Psi\,\boldsymbol{n}_3;\\
\boldsymbol{e}^3 &= \cos\Psi\boldsymbol{n}_1-\sin\Psi\boldsymbol{n}_3;\\
\boldsymbol{e}_4 &= \frac{-y(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)\boldsymbol{t}+(1-ya_1\sin\Psi)\boldsymbol{n}_2}{\sqrt{(1-ya_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}},
\end{aligned}\right\}\quad(49)$$

de sorte que, en particulier, les directions des vecteurs $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ sont les directions axiales du plan normal au point P, la direction du vecteur $\boldsymbol{e}_2$ étant la direction de la génératrice de la surface qui passe par P; par suite, les vecteurs $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ déterminent, au point M, les directions axiales du plan normal de la trajectoire du groupe de déplacements de Γ en elle même passant par M et le vecteur $\boldsymbol{e}_2$, en particulier, détermine la direction de la génératrice de la surface au point M. En tenant compte de la formule (47) on voit que, les deux vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ en chaque point M, sont tangents à la surface et par conséquent, les vecteurs $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ sont dans son plan normal.

On trouve facilement la formule

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{M} = \ldots\ldots + \\
&+ds^2\left\{a_1\cos\Psi-y\left(a_2a_3\sin^2\Psi+\overline{a_1^2+a_2^2-a_3^2}\sin\Psi\cos\Psi-a_2a_3\cos^2\Psi\right)\right\}\boldsymbol{e}_3\\
&\qquad+2\,dy\,ds\frac{a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi}{\sqrt{(1-ya_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}}\boldsymbol{e}_4,
\end{aligned}\quad(50)$$

les termes non écrits, dans le second membre, ne donnant que la projection du vecteur $\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{M}$ dans le plan tangent de la surface. En tenant compte de la formule (7_2) la formule précédente peut être écrite sous la forme plus simple

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{M} = \ldots\ldots + ds^2.\,a_1\cos\Psi\,\boldsymbol{e}_3+\\
&\qquad+2\,ds\,dy\frac{a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi}{\sqrt{(1-ya_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}}\boldsymbol{e}_4.
\end{aligned}\quad(51)$$

Cela étant, considérons, sur la surface, un point particulier quelconque M et une courbe passant par lui. La courbe en question peut être définie par la condition initiale et par les formules de la forme

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{(1-ya_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}\,ds &= dS\cos\Theta,\\
dy &= dS\sin\Theta,
\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

où S désigne l'arc de la courbe et S, Θ sont des fonctions d'une variable. Or, l'expression $\dfrac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{M}}{dS^2}$ calculée au point considéré M désigne précisément le vecteur de première courbure de la courbe en question au point M.

Par suite, le plan normal de la surface au point M étant rapporté aux axes $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, on voit que le sommet du vecteur de courbure normale est le point aux coordonnées

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a_1\cos\Psi}{(1-y\,a_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}(1+\cos 2\Theta),\\
x_4 &= \frac{a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi}{(1-y\,a_1\sin\Psi)^2+y^2(a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi)^2}\sin 2\Theta.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

L'indicatrice de courbure normale de la surface au point M, à son tour se trouve définie, évidément, par les mêmes formules à condition qu'on y regarde Θ comme variable. C'est donc une éllipse qui passe par le point M et y a un sommet. On voit de plus que la direction de l'axe de cette éllipse, dont une extrémité est au point M, est celle du vecteur $\boldsymbol{e}_3$ et par suite, l'autre direction axiale du plan normal au point M; enfin, on voit immédiatement que, le rapport des longuers des axes de l'indicatrice ne dépend pas de la position particulière du point M sur la surface.

10. La notion du rapport des longuers des axes de l'indicatrice, dont nous venons de parler, n'est pas définie, évidément, sans ambiguïté. Pour s'en débarasser remarquons que, l'indicatrice, associée à un point M quelconque de la surface, ayant en M son sommet, il y a précisément une axe bien déterminée de l'indicatrice dont aucune extrémité ne se trouve au point M. Nous pouvons donc convenir de comprendre sous la notion du *rapport des axes de l'indicatrice* au point M le rapport obtenu par division de la longeur de l'axe dont aucune extrémité ne se trouve au point M par la longeur de l'autre.

11. Cela étant nous allons établir la relation qui existe entre les rapports des axes des indicatrices des deux surfaces qui sont associées à la même hypercirconférence Γ.

Il est clair que ces rapports, que nous désignérons par k^* et k sont les valeurs absolues de la fonction

$$2\,\frac{a_2\sin\Psi-a_3\cos\Psi}{a_1\cos\Psi}$$

pour $\Psi=\psi$ et $\Psi=\psi+\frac{\pi}{2}$, ψ étant déterminé par la formule (6_2). On a donc

$$
\begin{aligned}
k^* &= 2\,\frac{a_2\sin\psi-a_3\cos\psi}{a_1\cos\psi}=2\,\frac{q}{p};\\
k &= 2\,\frac{a_2\cos\psi+a_3\sin\psi}{a_1\sin\psi}=2\,\frac{p}{q},
\end{aligned}
\tag{54}
$$

et par suite

$$k^*k=4. \tag{55}$$

Remarquons encore que, d'après les formules précédentes, le rapport en question est toujours différent de 2.

12. Sur chaque des deux surfaces associées à Γ il y a, entre les quatre familles de lignes de courbure normale deux famille remarquables à savoir la famille de courbes dont le vecteur de courbure normale, en chaque point est nul et la famille de courbes dont le vecteur de courbure normale, en chaque point, coïncide en longeur et direction avec une axe de l'indicatrice. Les équations différentielles de ces deux familles étant, manifestement, $ds=0$ et $dy=0$ on voit que les deux familles en question sont formées par la famille de génératrices de la surface et la famille de trajectoires du groupe de déplacements de la surface en elle-même.

13. Les résultats que nous avons obtenus aux nos 9—12 peuvent se résumer de la façon suivante:

Chaque surface associée à une hypercirconférence est une surface parabolique spéciale telle que, l'indicatrice de courbure normale, en chaque point M de la surface a en M un sommet et le rapport des longuers de ses axes est le même pour toute la surface et différent de 2. Le produit de tels rapports pour deux surfaces associées à la même hypercirconférence est toujours égal à 4. Les génératrices de la surface et les trajectoires du groupe des déplacements de la surface en elle même constituent deux familles de lignes de courbure normale. Dans chaque point M de la surface le vecteur de courbure normale qui est nul correspond à la génératrice de la surface; la direction du vecteur de courbure normale de la trajectoire en question est la direction axiale du plan normal de cette trajectoire, normale à la direction de la génératrice.

Nous voici amenés, par les résultats précédents à nous poser la question suivante:

Les surfaces associées aux hypercirconférences sont elles *caractérisées* par les propriétés locales suivantes: En chaque point M de la surface, l'indicatrice de courbure normale a en M un sommet et le rapport des longuers de ses axes est le même pour toute la surface et différent de *2?*

Nous allons donner la réponse à cette question dans le Chapitre suivant. Nous verrons qu'elle est affirmative.

III. Recherche de certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions.

1. Nous allons nous occuper, plus généralement, de la recherche des surfaces, plongées dans l'espace euclidien à quatre dimensions, qui jouissent de la propriété que, dans chaque point M de la surface, l'indicatrice de courbure normale a en M un sommet et le rapport des longuers de ses axes est le même pour toute la surface.

2. Dans ce but imaginons une surface (M) jouissant des propriétés voulues. Faisons correspondre à chaque point M de la surface (M) un

repère formé par quatre vecteurs rectangulaires unitaires e_1, e_2, e_3, e_4 ayant pour l'origine le point M et prenons les deux vecteurs e_1, e_2 dans le plan tangent à la surface; les vecteurs e_3, e_4 déterminent alors le plan normal à la surface, au point M, et on a les formules

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\ de_i &= \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3 + \omega_{i4} e_4, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{56}$$

les ω étant des formes linéaires en différentielles des paramètres dont dépend le repère et elles satisfont, à cause des suppositions faites au sujet du repère, aux relations suivantes

$$\begin{aligned} \omega_{ij} + \omega_{ji} &= 0, \\ \omega_3 = \omega_4 &= 0. \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{57}$$

On a en outre les formules de structure de l'espace ambiant*

$$\begin{aligned} \omega'_i &= [\omega_1 \omega_{1i}] + [\omega_2 \omega_{2i}] + [\omega_3 \omega_{3i}] + [\omega_4 \omega_{4i}], \\ \omega'_{ij} &= [\omega_{i1} \omega_{1j}] + [\omega_{i2} \omega_{2j}] + [\omega_{i3} \omega_{3j}] + [\omega_{i4} \omega_{4j}]. \end{aligned} \tag{58}$$

Ces formules appliquées aux relations (57) donnent

$$\begin{aligned} [\omega_1 \omega_{13}] + [\omega_2 \omega_{23}] &= 0, \\ [\omega_1 \omega_{14}] + [\omega_2 \omega_{24}] &= 0, \end{aligned} \tag{59}$$

de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, & \omega_{14} &= a'\omega_1 + b'\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2, & \omega_{24} &= b'\omega_1 + c'\omega_2, \end{aligned} \tag{60}$$

les $a, b, \ldots c'$ étant des fonctions des paramètres dont dépend le système attaché à la surface. Remarquons que, l'élément linéaire de la surface est $dS^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

3. On vérifie facilement que, dans un point M quelconque de la surface, le vecteur de courbure normale d'une courbe située sur la surface et passant par M est le vecteur, dont les composantes suivant les axes e_3, e_4 sont

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\Theta + b\sin 2\Theta, \\ x_4 &= \frac{a'+c'}{2} + \frac{a'-c'}{2}\cos 2\Theta + b'\sin 2\Theta, \end{aligned} \tag{61}$$

Θ étant l'angle que fait la courbe considérée, au point M avec le vecteur e_1. L'indicatrice de courbure normale au point M se trouve donnée par les mêmes formules, quand on y regarde Θ comme variable.

4. Exprimons d'abord la propriété de la surface que, en chaque son point M, l'indicatrice de courbure normale correspondante à en M un sommet.

---

* V. p. ex. E. Cartan, *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions* (Bull. de la Soc. math. de France, t. XLIV; 1916; p. 67).

Cela revient, évidément, à poser. p. ex.,

$$a = 2m, \; b = c = 0; \qquad a' = c' = 0, \; b' = m' \tag{62}$$

et on peut supposer $m > 0$, $m' > 0$. Avec ces formules, le vecteur e_3, issu du point M se trouve choisi de manière que, sa direction et le sens sont ceux du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, M' désignant le sommet de l'indicatrice opposé à M; $2m$ est alors la longuer de l'axe $\overline{MM'}$. Quant au vecteur e_4, à son tour, il est tangent à l'indicatrice au point M et $2m'$ est la longeur de l'autre axe de l'indicatrice. Le vecteur e_1 (e_2) est tangent à la ligne de courbure normale, passant par M, dont la courbure normale y est $2m$ (0).

D'après (57) et (60) on a les formules

$$\begin{aligned} &\omega_3 = \omega_4 = 0, && \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ &\omega_{13} = 2m\omega_1, && \omega_{14} = m'\omega_2, \\ &\omega_{23} = 0, && \omega_{24} = m'\omega_1, \end{aligned} \tag{63}$$

qui entraînent les relations quadratiques suivantes

$$\begin{aligned} 2[\omega_1 dm] + [\omega_2(2m\omega_{12} - m'\omega_{34})] &= 0, \\ [\omega_1(2m\omega_{12} - m'\omega_{34})] &= 0, \\ [\omega_2 dm'] - 2[\omega_1(m'\omega_{12} - m\omega_{34})] &= 0, \\ [\omega_1 dm'] + 2m'[\omega_2\omega_{12}] &= 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Celles-ci montrent que le système (63) est en involution et que sa solution générale dépend de quatre fonctions d'une variable. Nous trouvons ainsi le résultat suivant:

Dans l'espace euclidien à quatre dimensions les surfaces paraboliques, caractérisées par la proprieté de l'indicatrice d'avoir toujours un sommet au point correspondant de la surface, dépendent de quatre fonctions d'une variable.

5. Les surfaces qui nous intéressent, sont caractérisées, parmi les surfaces de la famille dont nous venons de parler, par la propriété d'avoir le même rapport des longeurs des axes de l'indicatrice en chaque point de la surface. Nous posons donc

$$\frac{m'}{m} = k, \tag{65}$$

k étant une constante positive. Avec cette notation, le système (63) devient

$$\begin{aligned} &\omega_3 = \omega_4 = 0, && \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ &\omega_{13} = 2m\omega_1, && \omega_{14} = km\omega_2, \\ &\omega_{23} = 0, && \omega_{24} = km\omega_1, \end{aligned} \tag{66}$$

et les relations (64) sont

$$\begin{aligned} 2\left[\omega_1 \frac{dm}{m}\right] + [\omega_2(2\omega_{12} - k\omega_{34})] &= 0, \\ [\omega_1(2\omega_{12} - k\omega_{34})] &= 0, \end{aligned} \tag{67}$$

$$
\begin{aligned}
\left[\omega_2 \frac{dm}{m}\right] - 2\left[\omega_1\left(\omega_{12} - \frac{1}{k}\,\omega_{34}\right)\right] = 0,\\
\left[\omega_1 \frac{dm}{m}\right] + 2\left[\omega_2\,\omega_{12}\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Ces relations montrent que le système (66) n'est pas en involution. Supposons pour le moment $k^2 \neq 2$. Sous cette hypothèse le système en question peut être prolongé par les équations suivantes

$$
\begin{aligned}
\frac{dm}{m} &= 2\,u\omega_1 + 4\,n\omega_2,\\
\omega_{12} &= 2\,n\,\omega_1 + \frac{k^2}{2 - k^2}\,u\,\omega_2,\\
\omega_{34} &= -\frac{4n}{k}\,\omega_1 + \frac{2k}{2 - k^2}\,u\omega_2,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

u, n étant variables nouvelles. Ces équations entraînent les conditions d'intégrabilité suivantes

$$
\begin{aligned}
\left[du\,\omega_1\right] + 2\left[dn\,\omega_2\right] + \frac{4\,un}{2 - k^2}\left[\omega_1\omega_2\right] = 0,\\
2\left[dn\,\omega_1\right] + \left(4\,n^2 - k^2m^2\right)\left[\omega_1\omega_2\right] = 0,\\
\left[du\,\omega_2\right] + \frac{k^2}{2 - k^2}\,u^2\left[\omega_1\omega_2\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Le système prolongé (66), (68) n'est pas en involution. Cependant la forme des formules (69) montre déjà que, *sur chaque surface jouissant des propriétés voulues, la courbure normale* $2\,m$ *des lignes de courbure normale* $\omega_2 = 0$ *le long de chaque courbe de la famille* $\omega_1 = 0$ *est nécéssairement variable.* En effet, dans le cas contraire, n est nécéssairement nul et par suite $m = 0$ contre la supposition $m > 0$.

Posons d'après (69)

$$
\begin{aligned}
2\,dn &= v\omega_1 + \left(4\,n^2 - k^2m^2\right)\omega_2,\\
du &= -\frac{k^2}{2 - k^2}\,u^2\omega_1 + \left(v + \frac{4\,un}{2 - k^2}\right)\omega_2,
\end{aligned}
\tag{70}
$$

v étant une variable nouvelle.

Ces équations conduisent aux deux relations quadratiques

$$
\begin{aligned}
\left[dv\omega_1\right] + \left(6\,nv + \frac{k^2}{2 - k^2}\,u\,\overline{4\,n^2 + 3\,k^2m^2 - 8\,m^2}\right)\left[\omega_1\,\omega_2\right] = 0,\\
\left[dv\omega_2\right] + \frac{u}{2 - k^2}\left(\overline{3\,k^2 + 2}\,v + \frac{2\,k^2\left(2 + k^2\right)}{2 - k^2}\,un\right)\left[\omega_1\,\omega_2\right] = 0,
\end{aligned}
\tag{71}
$$

qui donnent à leur tour

$$
\begin{aligned}
dv = -\frac{u}{2 - k^2}\left(\overline{3\,k^2 + 2}\,v + \frac{2\,k^2\left(2 + k^2\right)}{2 - k^2}\,un\right)\omega_1 + \\
+\left(6\,nv + \frac{k^2}{2 - k^2}\,u\,\overline{4\,n^2 + 3\,k^2m^2 - 8\,m^2}\right)\omega_2.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Or, le système de Pfaff (66), (68), (70), (72) n'est pas encore en involution. On trouve effet, en calculant la condition d'intégrabilité de l'équation (72) la relation suivante

$$2\left(v + \frac{2k^2}{2-k^2}\,un\right)^2 - \frac{k^2}{2-k^2}(k^2-4)(k^2-5)\,u^2m^2 = 0. \tag{73}$$

Cette relation entraîne deux relations nouvelles que l'on obtient en annulant les coefficients de ω_1, ω_2 dans le résultat de différentiation (73) et de substitution des différentielles dv, du, ... par les combinaisons en ω_1, ω_2 correspondantes. On trouve, en particulier, en égalant à zéro le coefficient de ω_1

$$u\left\{\left(v + \frac{2k^2}{2-k^2}\,un\right)^2 - k^2\,\frac{(k^2-4)(k^2-5)(3k^2-4)}{4(2-k^2)(k^2+1)}\,u^2m^2\right\} = 0. \tag{74}$$

On a donc aussi, d'après (73)

$$u(k^2-4)(k^2-5)(k^2-6) \quad 0, \tag{75}$$

de sorte qu'on se trouve amené à considérer *a priori* quatre cas, suivant le facteur-zéro dans le premier membre de cette relation.

Or, nous allons d'abord montrer qu'on a nécéssairement

$$u(k^2-4) = 0. \tag{76}$$

En effet, autrement on aurait $u \neq 0$ et $k^2 - 5 = 0$ ou bien $k^2 - 6 = 0$. Or, cette dernière eventualité s'exclût d'abord immédiatement pour le champ réel, car, avec $u \neq 0$, $k^2 = 6$ la relation (74) s'écrit

$$2(v - 3un)^2 = -3m^2u^2$$

et par suite elle est absurde; on vérifie par différentiation, en tenant compte des formules (68), (70), (72) que, la relation en question est absurde même dans le champ complexe. Dans l'autre cas $u \neq 0$, $k^2 - 5 = 0$ on a d'abord

$$v - \frac{10}{3}\,un = 0;$$

en différentiant cette relation on trouve encore facilement qu'elle est absurde

En définitive on a à considérer les deux cas suivants: $u = 0$ ou bien $u \neq 0$, $k = 2$.

6. *Cas* $u = 0$. Dans ce cas la seconde équation (70) donne immédiatement

$$v = 0,$$

et on arrive au système complètement intégrable suivant

$$\begin{aligned} &\omega_3 = \omega_4 \quad 0; && \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \\ &\omega_{13} = 2m\omega_1, && \omega_{14} = km\omega_2, \\ &\omega_{23} = 0, && \omega_{24} = km\omega_1; \end{aligned} \tag{77}$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_{12} = 2n\omega_1, \\
&\omega_{34} - -\frac{4n}{k}\,\omega_1, \\
&\frac{dm}{m} = 4n\omega_2, \\
&2\,dn = (4n^2 - k^2 m^2)\,\omega_2.
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Ce système definit une famille de surfaces cherchées. D'après une hypothèse faite plus haut on y aurait à supposer $k \neq \sqrt{2}$. Cependant, on trouve facilement, en partant du système (66) que, toutes les surfaces jouissant des propriétés voulues, pour lesquelles $k - \sqrt{2}$, se trouvent définies précisément par le système (77) lui même quand on y avait substitué $k = \sqrt{2}$.

k étant donné, les surfaces de la famille considérée dependent d'une constante arbitraire. Nous verrons dans la suite (n^{os} 7, 19) que, *parmi toutes les surfaces jouissant des propriétés voulues les surfaces de la famille en question sont caractérisées par la propriété que, les lignes de courbure normale, dont la courbure normale en chaque point est nulle, sont formées par des droites.*

7. Nous allons déduire les équations finies des surfaces en question. Dans ce but remarquons d'abord que, les formules (77) montrent que la forme ω_2 est une différentielle exacte. On peut donc poser

$$\omega_2 = dy. \tag{78}$$

En suite, les deux dernières équations (77) donnent

$$km = \frac{z}{y^2 + z^2}; \quad n = -\frac{y}{y^2 + z^2}, \tag{79}$$

z étant une constante positive et on voit facilement qu'on peut prendre

$$\omega_1 = \sqrt{y^2 + z^2}\,dx. \tag{80}$$

Les variables indépendantes étant ainsi choisies, changeons encore le sens du vecteur $\boldsymbol{e}_3$; alors le système (56) dans lequel les formes ω_{ij} satisfont aux équations (77) peut être remplacé par le système suivant

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{M} = dy\,\boldsymbol{e}_2 + y\,dx\,\frac{y\boldsymbol{e}_1 + z\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{y^2+z^2}} \qquad + z\,dx\,\frac{z\boldsymbol{e}_1 - y\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{y^2+z^2}}; \\
&d\boldsymbol{e}_2 \qquad dx\,\frac{y\boldsymbol{e}_1 + z\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{y^2+z^2}}; \\
&d\,\frac{y\boldsymbol{e}_1 + z\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{y^2+z^2}} \qquad - dx\,\boldsymbol{e}_2; \\
&d\boldsymbol{e}_3 = \qquad \frac{2}{k}\,dx\,\frac{z\boldsymbol{e}_1 - y\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{y^2+z^2}}; \\
&d\,\frac{z\boldsymbol{e}_1 - y\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{y^2+z^2}} = \qquad -\frac{2}{k}\,dx\,\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
\tag{81}
$$

et il est clair qu'on peut le intégrer sans aucune espèce de difficulté. On trouve les formules

$$\begin{array}{ll}
M = c' + cy\sin x + c_1 y\cos x + c_2 \frac{zk}{2}\sin\frac{2}{k}x + c_3\frac{zk}{2}\cos\frac{2}{k}x; & \\
e_2 = \quad c\sin x \; + c_1\cos x; & \\
\frac{ye_1 + ze_4}{\sqrt{y^2+z^2}} = \quad c\cos x \; - c_1\sin x; & (82)\\
e_3 = \qquad\qquad c_2\sin\frac{2}{k}x \; + c_3\cos\frac{2}{k}x; & \\
\frac{ze_1 - ye_4}{\sqrt{y^2+z^2}} = \qquad\qquad c_2\cos\frac{2}{k}x \; - c_3\sin\frac{2}{k}x, &
\end{array}$$

les c étant des constantes d'intégration. Ces formules montrent que, en posant $k = 2\frac{p}{q}$; p, $q = C^{tes}$ et en introduisant une nouvelle variable s suivant la formule $x = ps$, les équations finies des surfaces considérées, par rapport à un système de référence fixe, sont

$$X = y\sin ps,\; X_1 = y\cos ps,\; X_2 = z\sin qs,\; X_3 = z\cos qs. \qquad (83)$$

Par suite, pour $k \neq 2$ les surfaces en question sont les surfaces associées aux hypercirconférences et on a le résultat suivant:

Dans l'espace euclidien à quatre dimensions les surfaces associées aux hypercirconférences sont toutes et seules les surfaces paraboliques telles que, l'indicatrice de courbure normale a toujours au point correspondant un sommet et le rapport des longuers des axes de l'indicatrice est le même pour toute la surface et différent de 2.

Remarque. Un calcul facile montre que, les courbures scalaires a_1, a_2, a_3 d'une trajectoire du groupe de déplacements de la surface en elle-même quelconque, déterminée, sur la surface, par la valeur particulière $y = y_0$, s'expriment au moyen des quantitès k, m, n correspondantes suivant les formules

$$a_1 = 2\sqrt{n^2 + m^2};\; a_1 a_2 = 2\frac{k^2 - 4}{k} mn;\; a_1 a_3 = \frac{2}{k}(k^2 m^2 + 4n^2). \qquad (84)$$

8. Avant d'aller plus loin nous allons mentionner expressèment un cas particulier des surfaces associées aux hypercirconférences qui nous ne paraît pas être sans interêt. C'est le cas $k = 1$, dans lequel, évidément, les surfaces correspondantes jouissent de la propriété caractéristique d'avoir pour l'indicatrice de courbure normale, en chaque point M, une *circonférence* passant par M. Les équations de telles surfaces sont, d'après (83)

$$X = y\sin x,\; X_1 = y\cos x,\; X_2 = z\sin 2x,\; X_3 = z\cos 2x \qquad (85)$$

x, y étant les variables indépendantes et $z = C^{te}$. Considérons, parmi ces surfaces une surface particulière quelconque. Les formules (85) montrent immédiatement que, projectivement, la surface se trouve engendrée par des droites qui, étant établie une correspondance projective entre les points d'une conique et les points d'une droite de l'espace, joignent les couples de points correspondants. Il en résulte que, la surface considérée est une surface rationnele normale reglée du troisième ordre. On a donc le résultat suivant:

Dans l'espace euclidien à quatre dimensions toutes les surfaces paraboliques pour lesquelles l'indicatrice de courbure normale est toujours une circonférence qui passe par le point correspondant de la surface sont les surfaces rationneles normales reglées du troisième ordre.

On voit facilement, d'après les formules

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p^2 + q^2; \quad a_1^2 a_3^2 = p^2 q^2; \quad k^2 = 4\,\frac{p^2}{q^2}$$

que, les courbures scalaires a_1, a_2, a_3 d'une trajectoire arbitraire du groupe de déplacements d'une telle surface en elle-même, située sur la surface, sont liées par la relation

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{5}{2}\, a_1 a_3. \tag{86}$$

Remarque. On peut démontrer, par un calcul que j'ometts que, *dans l'espace* ***non****-euclidien à quatre dimensions il n'y a pas des surfaces paraboliques pour lesquelles l'indicatrice de courbure normale en chaque point est une circonférence.*

9. Nous allons maintenant examiner les surfaces de la famille considérée pour lesquelles $k = 2$; elles peuvent être définies, évidément par les formules

$$X = y \sin x, \quad X_1 = y \cos x, \quad X_2 = z \sin x, \quad X_3 = z \cos x, \tag{87}$$

x, y étant les variables indépendantes et z une constante arbitraire.

La forme de ces formules laisse prévoir que, les surfaces en question jouissent des propriétés analogues aux celles des surfaces associées aux hypercirconférences. Pour les établir nous allons faire d'abord quelques considérations préliminaires.

10. Considérons dans l'espace deux plans orthogonaux l'un à l'autre et cherchons les circonférences telles que, le groupe de déplacements de chacune en elle même est un sousgroupe du groupe de rotations autour les deux plans considérés. Soit Γ une circonférence jouissant de la propriété voulue. Un déplacement $\mathfrak{C}$ quelconque de Γ en elle même étant, d'après l'hypothèse, une rotation autour les deux plans, il ne conserve que le point d'intersection de ces deux plans. Comme, d'autre part, $\mathfrak{C}$ conserve le centre O de la circonférence, ce centre coïncide avec le point d'intersection en question. Par suite, en particulier, le plan de Γ passe par ce point. Comme ce plan reste invariant par $\mathfrak{C}$ on voit que,

Γ se trouve située dans un plan qui passe par le point commun des deux plans considérés et qui reste invariant par un sousgroupe du groupe de rotations autour ces deux plans.

Cela étant remarqué il est facile à voir que, si l'on avait choisi un système rectangulaire de référence de manière que $X = X_1 = 0$, $X_2 \quad X_3 = 0$ sont les deux plans orthogonaux considérés les équations du plan de la circonférence Γ peuvent être supposées sous la forme

$$X = aX_2 + bX_3, \quad X_1 - a'X_2 + b'X_3 \tag{88}$$

$a, \ldots b'$ étant des constantes convenables. Soit alors

$$\begin{aligned} X' &= \cos\varphi X + \sin\varphi X_1, & X_2' &= \cos\psi X_2 + \sin\psi X_3, \\ X_1' & \quad - \sin\varphi X + \cos\varphi X_1, & X_3' &= -\sin\psi X_2 + \cos\psi X_3, \end{aligned} \tag{89}$$

le groupe de rotations autour les deux plans considérés. En exprimant qu'une rotation φ, ψ du groupe laisse le plan (88) invariant on obtient les conditions

$$\begin{aligned} a(\cos\varphi - \cos\psi) + a'\sin\varphi + b\sin\psi &= 0, \\ -a\sin\varphi + a'(\cos\varphi - \cos\psi) + b'\sin\psi &= 0, \\ -a\sin\psi + b(\cos\varphi - \cos\psi) + b'\sin\varphi &= 0, \\ -a'\sin\psi - b\sin\varphi + b'(\cos\varphi - \cos\psi) &= 0, \end{aligned} \tag{90}$$

d'où résulte par l'élimination la relation

$$\cos\varphi - \cos\psi.$$

On a donc, d'après les formules (90), $a' = -b$, $b' = a$ ou bien $a' = b$, $b' = -a$ et on voit facilement qu'en effectuant, au besoin, dans le plan (X_3, X_4) une rotation convenable des axes on peut prendre $b' = a$, $a' - b - 0$. On voit ainsi qu'on peut supposer les équations du plan de la circonférence Γ sous la forme

$$X = aX_2, \quad X_1 = aX_3 \qquad (a > 0) \tag{91}$$

et le sousgroupe du groupe (89), qui conserve Γ, sous la forme

$$\begin{aligned} X' &- \cos\varphi X + \sin\varphi X_1, & X_2' &- \cos\varphi X_2 + \sin\varphi X_3, \\ X_1' &- -\sin\varphi X + \cos\varphi X_1, & X_3' &= -\sin\varphi X_2 + \cos\varphi X_3. \end{aligned} \tag{92}$$

Quant aux équations de Γ elle même il est clair qu'elles sont alors de la forme

$$X = y\sin x, \quad X_1 = y\cos x, \quad X_2 = z\sin x, \quad X_3 = z\cos x, \tag{93}$$

x étant la variable indépendante et y, z étant des constantes convenables. Inversement, on voit immédiatement que, quelques soient les valeurs des constantes y, z dans les formules (93), les circonférences correspondantes jouissent toujours de la propriété voulue. Les formules (93) représentent donc, pour les différentes valeurs de constantes y, z, toutes les circonférences cherchées. On voit qu'elles dépendent de deux constantes arbitraires de manière que, tous les points de chacune d'elles ont la même distance des deux plans orthogonaux considérés.

11. Étant données deux plans dans l'espace appelons les *paratactiques* s'ils n'ont qu'un seul point O en commun et si leurs deux angles sont égaux. Il existe alors une simple infinité de plans passant par le point O tels que, chacun d'eux est perpendiculaire aux deux plans en question.

Étant donné un plan dans l'espace il passe, par son point quelconque des plans qui lui sont paratactiques. Un calcul élémentaire montre que, si l'on avait choisi un système rectangulaire de référence de manière que $X = X_1 - 0$ sont les équations du plan donné, chaque plan passant par l'origine du système et paratactique au plan en question peut être écrit précisément sous la forme (91), a étant une constante convenable. Inversement, tous les plans (91) déterminés par les différentes valeurs de a sont paratactiques au plan en question. La famille de plans qui sont perpendiculaires en même temps au plan $X \quad X_1 = 0$ et à un plan paratactique (91) quelconque est donné par les formules

$$\cos x\, X - \sin x\, X_1 = 0, \qquad \cos x\, X_2 - \sin x\, X_3 = 0, \tag{94}$$

x étant arbitraire. D'après les formules (91) et (94) chaque plan paratactique au plan $X \quad X_1 = 0$ est en même temps paratactique au plan orthogonal $X_2 - X_3 \quad 0$ et chaque plan de la famille (94) lui est perpendiculaire.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Étant donnés deux plans orthogonaux, pourqu'une circonférence dans l'espace jouisse de la propriété que le groupe de déplacements en elle même soit un sousgroupe du groupe de rotations autour les deux plans, il faut et il suffit que son centre coïncide avec le point commun des deux plans en question et le plan de la circonférence leur soit paratactique. Toutes les circonférences jouissant de la propriété en question dépendent de deux constantes arbitraires de manière que tous les points de chacune d'elles ont la même distance des deux plans donnés. Par chaque point d'une telle circonférence il passe précisément un plan perpendiculaire aux deux plans considérés est au plan de la circonférence et il coupe le plan de la circonférence suivant la normale correspondante de la circonférence.

12. Pour aller plus loin il parait utile d'introduire quelques notions. Considérons, dans l'espace, deux plans orthogonaux et une circonférence Γ qui, par rapport à ces deux plans, jouit de la propriété dont il est la question dans le théorème précédent. Appelons *plans axiaux* de la circonférence Γ les deux plans considérés. Dans un point P quelconque de la circonférence appelons: *plan normal* de la circonférence le plan passant par P et perpendiculaire aux deux plans considérés et au plan de la circonférence; *plan tangent* le plan orthogonal au plan normal au point P; *directions axiales du plan normal* les directions des deux droites

d'intersection du plan normal au point P avec les plans axiaux de la circonférence; *directions axiales du plan tangent* les directions des deux droites d'intersection du plan tangent au point P avec les plans axiaux de la circonférence.

Convenons d'appeler *surface associée à Γ* la surface réglée qui se trouve engendrée par les droites passant par les différents points de Γ de manière que, la direction de la droite passant par un point P de Γ est la direction axiale du plan normal de Γ en P, toujours parallèle à un des deux plans axiaux fixé une fois pour toutes.

D'après cette définition il y a précisément deux surfaces associées à Γ.

13. Nous allons d'abord démontrer que, *les surfaces* (87) *sont toutes et seules les surfaces associées aux circonférences.*

Prenons en effet, dans l'espace un système rectangulaire de référence de manière que $X = X_1 = 0$ et $X_2 = X_3 = 0$ sont les plans axiaux d'une circonférence Γ. D'après les résultats du nº 10, les équations de Γ peuvent être supposées sous la forme (93). Soit alors P un point particulier quelconque de la circonférence, déterminé par la valeur x de la variable. Le plan normal de la circonférence au point P est donné par les formules telles que (94) et par suite les cosinus des angles que font, avec les axes, les directions axiales du plan normal au point P sont $\sin x$, $\cos x$, 0, 0; 0, 0, $\sin x$, $\cos x$. Il en résulte immédiatement que les deux surfaces associées à la circonférence Γ sont données précisément par les formules (93) à condition qu'on y regarde une fois y, x l'autre fois z, x comme variables indépendantes et cela démontre la proposition.

14. D'après les formules du II, nº 2 on voit que, *chaque surface associée à une circonférence est la variété d'intersection de l'hypersurface, lieu de plans perpendiculaires à deux plans orthogonaux fixes (plans axiaux de la surface) tous déplacés les uns des autres par des transformations du sousgroupe linéaire spécial du groupe de rotations autour les deux plans et d'une hypersurface cylindrique dont l'axe est formée par un de ces deux plans.*

15. Introduisons des définitions nouvelles de manière à remplacer, dans le texte du nº II, 5 partout le mot *hypercirconférence* par *circonférence.*

Cela étant, il est facile à démontrer au sujet des surfaces considérées les résultats suivants qui sont bien analogues à ceux qui ont été indiqués au nº II, 6 au sujet des surfaces associées aux hypercirconférences.

Étant donnée une surface associée à une circonférence Γ quelconque, le groupe de déplacements de Γ en elle même conserve la surface. Les trajectoires de ce groupe sur la surface sont formées par une famille simple de circonférences dont une est la courbe d'intersection de la surface *avec l'axe de l'autre surface associée à Γ. Toutes ces trajectoires sont concentriques avec Γ et le plan de chaque trajectoire, différente de la courbe d'intersection en question, est paratactique aux plans axiaux de Γ de sorte que les trajectoires se trouvent découpées, sur la surface, par une famille d'hypersurfaces cylindriques dont l'axe commune est l'axe de l'autre surface associées à Γ. Dans la correspondance ponctuelle, engendrée entre les différentes trajectoires sur la surface par les génératrices de la surface, deux points correspondants quelconques de deux trajectoires fixes, arbitrairement choisies, ont la même distance. Aux points correspondants, les différents trajectoires ont les mêmes directions axiales du plan tangent et du plan normal ainsi que le même plan normal; leurs plans tangents sont situés dans le même espace à trois dimensions et sont parallèles les uns aux autres. Une des deux surfaces associées à une trajectoire quelconque, dont les axes se confondent avec celles de Γ, se confond toujours avec la surface considérée, associée à Γ.*

Ajoutons que, *les deux surfaces associées à une circonférence Γ sont identiques à un déplacement près.*

16. *Cas* $u \neq 0$. Dans ce cas le rapport k des axes de l'indicatrice, sur les surfaces correspondantes, s'il en existe, est égal à 2 et on a, d'après (74),

$$v = 4un. \tag{95}$$

Or, cette relation étant compatible avec les équations (70), (72) on voit *qu'il existe des surfaces correspondantes et elles dépendent d'une constante arbitraire; elles se trouvent définies par le système complètement intégrable suivant*

$$\begin{aligned}
&\omega_3 = \omega_4 = 0; \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \\
&\omega_{13} = m\,\omega_1, \qquad \omega_{14} = m\,\omega_2, \\
&\omega_{23} = 0, \qquad \omega_{24} = m\,\omega_1; \\
&\omega_{12} = n\,\omega_1 - u\,\omega_2, \\
&\omega_{34} = -n\,\omega_1 - u\,\omega_2, \\
&\frac{du}{u} = u\,\omega_1 + n\,\omega_2, \\
&\frac{dm}{m} = u\,\omega_1 + 2n\,\omega_2, \\
&dn = un\,\omega_1 + (n^2 - m^2)\,\omega_2.
\end{aligned} \tag{96}$$

Nous avons changé légérement les notations en écrivant partout ω_1, ω_2 au lieu de $2\,\omega_1$, $2\,\omega_2$. Avec ces notations, nous écrivons, dans le système (56) auquel conduisent les formules (96), $\frac{1}{2}M$ au lieu de M.

17. Nous allons nous occuper de la discussion de ce système afin d'arriver à une génération géométrique des surfaces correspondantes.

Nous commençons par faire deux remarques qui nous seront utiles dans la suite.

D'abord, les formules de structure de l'espace entraînent que la fonction u est un facteur intégrant des deux formes ω_1, ω_2. On en déduit que, sur chaque surface de la famille considérée on peut choisir les variables indépendantes x, y de manière à avoir les formules

$$\begin{gathered}\omega_1 = \frac{e^x}{\sin y}\,dx; \qquad \omega_2 = \frac{1}{z}\,\frac{e^x}{\sin^2 y}\,dy;\\ u = -\,e^{-x}\sin y, \quad m = z\,e^{-x}\sin^2 y, \quad n = z\,e^{-x}\sin y \cos y,\end{gathered} \tag{97}$$

z étant une constante positive. Les formules (97) entraînent, en particulier, la relation suivante

$$n^2 + m^2 - z^2 u^2 = 0. \tag{98}$$

Remarquons, au second lieu, et cette remarque jouera un rôle essentiel dans la suite que, les équations (96) entrainent que, quelque soit la surface (M) dans la famille, le point

$$O = M + \frac{u\,\boldsymbol{e}_1 + n\,\boldsymbol{e}_2 + m\,\boldsymbol{e}_3}{u^2 + n^2 + m^2} \tag{99}$$

est fixe dans l'espace.

18. Cela étant remarqué, nous allons considérer une surface particulière quelconque de la famille étudiée et, sur cette surface les familles de lignes de courbure normale $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = 0$.

Pour les lignes de la première famille, considérons une ligne particulière quelconque, déterminée, avec le choix (97) des variables indépendantes par la valeur y_0 de la variable y. Le système (96), avec $\omega_2 = 0$, conduit alors aux formules suivantes

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{M}}{ds} &= \boldsymbol{e}_1\\ \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} &= z u\,\frac{n\,\boldsymbol{e}_2 + m\,\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{n^2 + m^2}},\\ \frac{d}{ds}\,\frac{n\,\boldsymbol{e}_2 + m\,\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{n^2 + m^2}} &= -\,z\,u\,\boldsymbol{e}_1,\end{aligned} \tag{100}$$

$ds = \omega_1$ étant l'élément de l'arc sur la courbe considérée. Ces formules montrent immédiatement que, la ligne considérée est plane et son plan passe par le point O. Pour la déterminer complètement remarquons que, en choisissant convenablement la valeur initiale de l'arc s on a $u = -\dfrac{1}{s}$, de sorte que, la courbure scalaire zu de la courbe dans un point s quelconque est proportionnelle à la valeur inverse de s; de plus, d'après la formule (99) on voit que, pour $s \to 0$ on a $M \to O$. Il en résulte que, la courbe en question est une spirale logarithmique dont le pôle est le point fixe O. Soit χ l'angle que fait, dans un point M quelconque de la courbe, le rayon vecteur, issu du point O, avec la tangente $\boldsymbol{e}_1$ de la courbe au point M. On voit facilement, d'après la formule (99), qu'on a

$$\operatorname{tg} \chi = z, \tag{101}$$

de sorte que, l'angle en question ne dépend pas de la valeur particulière y_0.

Par suite, z étant donné, pour avoir sur la surface correspondante, imaginée comme rapportée à un système de référence fixe, une ligne particulière de la famille considérée, il suffit de connaître le point O correspondant, le plan et un point particulier de la ligne.

19. Cela étant occupons nous des lignes de courbure normale $\omega_1 = 0$. Envisageons, sur la surface considérée une ligne particulière de la famille en question. Posons, dans le système (56) auquel conduisent les équations (96) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = ds$, ds étant l'élément de l'arc sur la courbe considérée et remarquons, qu'on a, avec un choix convenable de la valeur initiale de l'arc, d'après les formules (97)

$$u = -\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}, \quad m = \frac{h}{s^2+h^2}, \tag{102}$$

h étant une constante positive. Cela étant, la ligne envisagée se trouve déterminée par les formules (de Frenet) suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{ds} &= e_2,\\
\frac{de_2}{ds} &= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}\,e_1,\\
\frac{de_1}{ds} &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}\,e_2 + \frac{h}{s^2+h^2}\,e_4,\\
\frac{de_4}{ds} &= -\frac{h}{s^2+h^2}\,e_1 - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}\,e_3,\\
\frac{de_3}{ds} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}\,e_4,
\end{aligned} \tag{103}$$

h ayant une valeur particulière. Ces formules mettent en évidence que, dans chaque point M de la surface, les vecteurs e_2, e_1, e_4, e_3 sont respectivement la tangente et les trois normales successives de la ligne de courbure de la famille $\omega_1 = 0$ qui passe par M; elles montrent de plus que, les trois courbures scalaires successives a_1, a_2, a_3 de la courbe sont

$$a_1 = a_3 = u = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}; \quad a_2 = m = \frac{h}{s^2+h^2}. \tag{104}$$

Or, en tenant compte des résultats mentionnés au sujet de lignes de la famille $\omega_2 = 0$, le résultat particulier que, dans un point M quelconque de la surface, le vecteur e_1 est la première normale de la ligne de courbure de la famille $\omega_1 = 0$, qui passe par M, entraîne déjà que, z étant donné, pour avoir la surface (M) correspondante, imaginée comme rapportée à un système de référence fixe, il suffit de connaître le point fixe O correspondant et une ligne particulière quelconque de la famille $\omega_1 = 0$. Supposons en effet que, z étant donné, nous connaissions le point O et une courbe particulière $\omega_1 = 0$ de la surface correspondante. Dans un point M quelconque de cette courbe la première normale étant le vecteur $\boldsymbol{e}_1$ correspondant, cette normale est la tangente de la ligne de courbure de la famille $\omega_2 = 0$ qui passe par M; par suite, elle détermine, avec le point O, le plan de cette ligne. On connait donc, au sujet de la ligne $\omega_2 = 0$, qui passe par M, le point O, le plan et un point particulier M de la ligne; on connait donc toute cette ligne et ainsi, en faisant varier le point M sur la courbe $\omega_1 = 0$ donnée, on connait toute la surface (M).

20. On voit ainsi que le problème de la génération géométrique des surfaces étudiées se ramène finalement au problème beaucoup plus simple suivant: Caractériser les courbes (M), définies par le système d'équations (103) par leurs propriétés géométriques est par leurs relations par rapport au point fixe O, considéré comme connu.

Pour traiter ce problème, imaginons, parmi les courbes en question une courbe particulière quelconque appartenant à des valeurs particulières des paramètres z et h. Désignons par $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur issu du point O mené à un point M quelconque de la courbe. On a, d'après (99),

$$\boldsymbol{r} = -\frac{u\boldsymbol{e}_1 + n\boldsymbol{e}_2 + m\boldsymbol{e}_3}{u^2 + n^2 + m^2}. \tag{105}$$

Au sujet de la courbe considérée nous savons déjà que, dans chaque point M de la courbe, la première normale $\boldsymbol{e}_1$ fait avec $\boldsymbol{r}$ un angle constant, non nul, qui se trouve déterminé par la formule (101); nous savons de plus que, dans chaque point M de la courbe, la première et la troisième courbure scalaire sont égales. La formule (105), à son tour, met en évidence une troisième propriété intrinsèque de la courbe à savoir que, dans chaque point M de la courbe la deuxième normale $\boldsymbol{e}_4$ est normale au rayon vecteur $\boldsymbol{r}$.

21. Nous allons maintenant démontrer qu'en ajoutant que la courbe en question appartient à l'espace considéré et qu'elle n'est pas une hypercirconférence, les trois propriétés que nous venons d'indiquer caractérisent la courbe aux valeurs particulières des constantes z et h près*). D'une manière précise, nous allons démontrer la proposition suivante:

Étant donné, dans l'espace, un point fixe O, chaque courbe, non hypercirconférence, appartenant à cet espace qui jouit, dans chaque son point des trois propriétés suivantes 1° la première normale de la courbe fait avec le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$, issu du point O, un angle constant, non

* La constante h détermine la distance d du point O au plan osculateur, dans un point quelconque de la courbe. On a, en effet,

$$d - \frac{m}{u^2 + n^2 + m^2} = C^{te} = \frac{hz^2}{z^2+1} = h\sin^2\gamma.$$

nul 2° la deuxième normale à la courbe est normale au $\boldsymbol{r}$ 3° la première et la troisième courbure scalaire de la courbe sont égales; peut être définie par un système d'équations de Frenet de la forme (103), avec un choix convenable des valeurs des constantes z, h.

Soit, en effet, O un point fixe dans l'espace et a_1, a_2, a_3 les trois courbures scalaires successives d'une courbe (P) non hypercirconférence, qui appartient à l'espace considéré et jouit des trois propriétés en question. La courbe peut être définie par les équations de Frenet de la forme (1). Le point O à son tour, peut être exprimé par une formule telle que

$$O = P + x\boldsymbol{t} + x_1\boldsymbol{n}_1 + x_2\boldsymbol{n}_2 + x_3\boldsymbol{n}_3, \tag{106}$$

les coordonnées x verifiant les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} + 1 - a_1x_1 \quad &= 0, \\ \frac{dx_1}{ds} + a_1x - a_2x_2 &= 0, \\ \frac{dx_2}{ds} + a_2x_1 - a_3x_3 &= 0, \\ \frac{dx_3}{ds} + a_3x_2 \qquad &= 0, \end{aligned}\right. \tag{107}$$

qui expriment que le point O est fixe dans l'espace; on a évidément

$$\boldsymbol{r} = -(x\boldsymbol{t} + x_1\boldsymbol{n}_1 + x_2\boldsymbol{n}_2 + x_3\boldsymbol{n}_3). \tag{108}$$

Cela étant, il est clair que, les trois propriétés de la courbe s'expriment par les formules suivantes

$$1° \ \frac{-x_1}{\sqrt{x^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}; \quad 2° \ x_2 = 0; \quad 3° \ a_3 = a_1, \tag{109}$$

z étant une constante que l'on peut supposer > 0. Pour simplifier l'écriture posons $\frac{dx_i}{ds} = x_i'$. Or, la dernière des formules (107) montre d'abord que, x_3, en conséquence de 2°, est une constante, nécéssairement différente de zéro, car autrement, la courbe serait plane, contrairement à l'hypothèse; nous désignons cette constante par $\frac{hz^2}{z^2+1}$. Les deux premières équations (107) donnent

$$\left.\begin{aligned} x' - a_1x_1 + 1 &= 0, \\ x_1' + a_1x \qquad &= 0, \end{aligned}\right. \tag{110}$$

et elles entraînent la relation

$$xx' + x_1x_1' + x = 0.$$

D'autre part, la relation 1° donne par dérivation

$$x_1x_1' = \frac{1}{z^2}xx',$$

de sorte qu'on a

$$x\left(x' + \frac{z^2}{z^2+1}\right) = 0.$$

On, x n'est pas identiquement nul, car autrement, la courbe serait une hypercirconférence, ce qui se trouve exclu par l'hypothèse. On a donc, en choisissant convenablement la valeur initiale de l'arc

$$\begin{aligned} x &= -\frac{z^2}{z^2+1}\, s, \\ x_1 &= -\frac{z}{z^2+1}\sqrt{s^2+h^2}, \end{aligned} \tag{111}$$

de sorte qu'on a

$$a_1 = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

De plus, d'après l'hypothèse 3° on a d'abord

$$a_3 = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}$$

et en conséquence de la troisième équation (107)

$$a_2 = \frac{h}{s^2+h^2}.$$

On voit ainsi que la courbe considérée satisfait à un système d'équations différentielles de la forme (103) c'est ce qu'il fallait démontrer.

On a donc finalement, le résultat suivant:

Chaque surface (M) de la famille considérée peut être engendrée de la manière suivante: On prend dans l'espace considéré un point fixe O et une courbe, non hypercirconférence, appartenant à l'espace en question et jouissant, en chaque point, des trois propriétés suivantes 1° *la première normale de la courbe fait avec le rayon vecteur* $\boldsymbol{r}$, *issu du point O, un angle constant non nul* 2° *la deuxième normale de la courbe est normale au* $\boldsymbol{r}$ 3° *la première et la troisième courbure scalaire de la courbe sont égales; dans un point M quelconque de la courbe on considère la première normale et le plan passant par cette normale et le point fixe O; dans ce plan on construit la spirale logarithmique qui a son pôle au point O, passe par M et y est tangent à la normale considérée; la surface (M) est le lieu de spirales logarithmiques ainsi associées aux différents points de la courbe en question.*

Remarque. *Le problème de l'intégration analytique du système* (103), dont on sait a priori, d'après un théorème général, qu'il se ramène essentiellement à l'intégration de deux équations de Riccati, *se réduit* en réalité *à l'intégration d'une équation hypergéométrique.*

Si l'on pose, en effet

$$X = \boldsymbol{e}_2 + i\,\boldsymbol{e}_3, \quad Y = \boldsymbol{e}_1 - i\,\boldsymbol{e}_4 \quad (i = \sqrt{-1})$$

on voit, en tenant compte des équations (103) que les fonctions X, Y satisfont au système suivant

$$
\begin{aligned}
X' &= -\frac{1}{z\sqrt{s^2+h^2}}\,Y,\\
Y' &= \frac{1}{z\sqrt{s^2+h^2}}\,X + \frac{ih}{s^2+h^2}\,Y,
\end{aligned}
\tag{112}
$$

de sorte que, en particulier, la fonction X par exemple, satisfait à l'équation hypergéométrique

$$
X'' + \frac{1}{s+ih}\,X' + \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{s^2+h^2}\,X = 0. \tag{113}
$$

On a une autre équation telle que (113) qui s'en déduit par le remplacement de i par $-i$. On voit donc que, l'équation (113) une fois intégrée, il suffit des quadratures pour avoir l'intégrale générale du système (103).