Otakar Borůvka
K teorii některých transcendent počtu integrálního

Spisy přír. fak. MU, č. 37, 1924, 14 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500026

S P I S Y
VYDAVANÉ
PŘIRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKY

ROK 1924 Čís. 37

K TEORII NĚKTERÝCH TRANSCENDENT POČTU INTEGRÁLNÍHO

(CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES DU CALCUL INTÉGRAL.)

NAPSAL

O. BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDAVA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MA | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

K THEORII NĚKTERÝCH TRANSCENDENT POČTU INTEGRÁLNÍHO.

(AVEC UN RESUMÉ EN FRANÇAIS.)

I.

O funkci $R(x, s)$ definované při *reál. č.* $s > 1$ řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s}$$

jest známo*, že rozdíl $R(x, s) - \frac{1}{s-1}$ jest celistvou funkcí transcendentní proměnné s a že lze jej tedy rozvinouti v řadu stále konvergentní

$$R(x, s) = \frac{1}{s-1} - \psi(x) + f_1(x)(s-1) + f_2(x)(s-1)^2 + \ldots.^{**} \qquad (1)$$

O funkci $f_1(x)$ a dalsích koeficientech při jednotlivých mocnostech $(s-1)$ není posud známo nic bližšího. Vycházeje od trigonometrických aggregátů $\sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$, $\sum_{\rho=1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$, závislých na kladných pravých racionálních zlomcích $\frac{u}{v}$, ukáži v tomto odstavci, že za předpokladu $0 < x < 1$ platí trigonometrický rozvoj

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = -(\log 2\pi + E)\,\pi \operatorname{cotg} x\pi - \frac{\log x}{x} + \\ + \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)\,x\pi \log \frac{n}{n+1}.$$

* * *

Buďtež u, v celistvá kladná nesoudělná čísla $(0 < u < v)$ a hledejme vyjádření aggregátu

$$A = \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$$

* Lerch, Další studie v oboru Malmsténovských řad; Rozpravy II. tř. Č. Akademie roč. III., str. 12. Podle Lerchova citátu Rychle konvergentní vyjádření některých limit, p. 7, Rozpravy České Akademie, roč. VIII.) pochází tento výsledek od H. Kinkelina Programm der Gewerbeschule, Basel 1861 1862 .

** Značím dusledně $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x)$ a Eulerovu konstantu písmenem E.

tím způsobem, že nahradíme $\log \Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)$ dle Kummerova vzorce*

$$\begin{aligned}\log \Gamma(x) &= \text{konst} - (\log 2\pi + E)\,x - \tfrac{1}{2}\log\sin x\pi + \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\log\nu}{\nu}\sin 2\nu x\pi \quad (0 < x < 1)\end{aligned} \tag{2}$$

příslušným výrazem.

Vzhledem k relacím

$$\begin{aligned}&\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho = 0\\ &\sum_{\varrho=1}^{v-1}\varrho\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho = -\frac{v}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi\end{aligned} \tag{3}$$

obdržíme nejprve, píšeme-li $(\log 2\pi + E) = k$

$$\begin{aligned}A = \frac{k}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi - \tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\sin\frac{\varrho}{v}\pi + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\log\nu}{\nu}\sin 2\nu\frac{\varrho}{v}\pi\end{aligned}$$

a pak, jelikož

$$\begin{aligned}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\sin\frac{\varrho}{v}\pi &= \sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}(v-\varrho)\log\sin\frac{v-\varrho}{v}\pi = \\ &= -\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\sin\frac{\varrho}{v}\pi = 0.\end{aligned}$$

$$A = \frac{k}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\log\nu}{\nu}\sin 2\nu\frac{\varrho}{v}\pi\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho. \tag{4}$$

Poznačíme-li aggregát trigonometrických řad na pravé straně písmenem X a užijeme-li vzorce

$$\sin 2\pi\frac{\nu}{v}\varrho\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho = \tfrac{1}{2}\left[\cos 2\pi\frac{\nu-u}{v}\varrho - \cos 2\pi\frac{\nu+u}{v}\varrho\right],$$

můžeme psáti

$$X = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\log\nu}{\nu}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\left[\cos 2\pi\frac{\nu-u}{v}\varrho - \cos 2\pi\frac{\nu+u}{v}\varrho\right].$$

V této řadě transformujme sumační index ν substitucí $\nu = vn + \varkappa$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; \varkappa = 1, 2, \ldots v)$; obdržíme

$$X = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=1}^{v}\frac{\log(vn+\varkappa)}{vn+\varkappa}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\left[\cos 2\pi\frac{\varkappa-u}{v}\varrho - \cos 2\pi\frac{\varkappa+u}{v}\varrho\right],$$

* Kummer, Crelleuv j. sv. XXXV., p. 1.

což lze značně zjednodusiti, neboť pro $x \mp u$ a $x \mp v \quad u$ jest

$$\sum_{\rho\ 1}^{1}\left[\cos 2\pi \frac{x \quad u}{v}\varrho - \cos 2\pi\frac{x+u}{v}\varrho\right] \quad 0,$$

kdežto obecně pro $x \quad u$, resp. $x - v - u$ jest týž výraz roven v, resp. $-v$.

Platí tedy jednoduse

$$X \quad \frac{v}{2}\sum_{n-0}^{\infty}\left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u} - \frac{\log[v\ n+1)-u]}{v(n+1 \quad u}\right]$$

anebo

$$X \quad \frac{v}{2}\sum_{n\ 0}^{\infty}\left[\frac{\log(vn+u}{vn+u} - \frac{\log[v(n+1)+u]}{v(n+1)+u}\right] +$$
$$\frac{v}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log(vn \quad u)}{vn+u} \quad \frac{\log(vn-u)}{vn \quad u}\right];$$

soucet prvni r dy na pravé straně jest patrně roven $\frac{\log u}{u}$, druhou lze vzhledem ke vzorci

$$\sum_{n\ 1}^{\infty}\left[\frac{1}{n \quad \frac{u}{v}} - \frac{1}{n - \frac{u}{v}}\right] \quad \pi \operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi - \frac{v}{u}$$

upraviti na

$$\frac{\log v}{v}\left[\pi\operatorname{cotg}\ _v\ \pi \quad \frac{v}{u}\right] \quad \frac{1}{v}\sum_{n\ 1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} \quad \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right],$$

takže vychází

$$X \quad \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi.\log v \quad \tfrac{1}{2}\frac{v}{u}\log\frac{u}{v} + \tfrac{1}{2}\sum_{n-1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} - \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n \quad \frac{u}{v}}\right]$$

a pak

$$A \quad \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi\log v \quad \frac{k}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi + \frac{1}{2\pi}\frac{v}{u}\log\frac{u}{v} +$$
$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\ 1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n\ .\ \frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} - \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n \quad \frac{u}{v}}\right]. \qquad \text{I)}$$

Násobme nyní aggregát

$$B \quad \sum_{\rho\ 1}^{v\ 1}\cos 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)$$

velicinou $\cos\frac{t}{v}\pi$; obdržíme nejprve, píseme-li

$$\cos\frac{u}{v}\pi\cos 2\frac{u}{v}\pi\varrho = \tfrac{1}{2}\left[\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)+\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho-1)\right],$$

$$B\cos\frac{u}{v}\pi = \tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)+$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=0}^{v-2}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)$$

a pak pomocí vztahu $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$

$$B\cos\frac{u}{v}\pi = -\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right) + \tfrac{1}{2}\cos\frac{u}{v}\pi\log v. \qquad \text{(II)}$$

Vychází tudíž z rovnic (I) a (II)

$$-\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)-$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)+\frac{k}{2}\cos\frac{u}{v}\pi+$$

$$+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{2\pi}\cdot\frac{v}{u}\log\frac{u}{v}+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right]$$

a po úpravě

$$\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)}\quad k\cos\frac{u}{v}\pi+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{\pi}\cdot\frac{v}{u}\cdot\log\frac{u}{v}+$$

$$+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right]. \qquad \text{(III)}$$

Poznačíme-li levou stranu této rovnice Y a vyjádříme-li v ní funkce $\log\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)$, $\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)$ dle Weierstrassova vzorce

$$\log\Gamma(x)\quad -Ex-\log x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right], \qquad (5)$$

obdržíme s ohledem na vztah $\sum_{\varrho=1}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\quad 0$ nejprve

$$Y\quad\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\left[-\log\frac{\varrho+1}{\varrho}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{vn}-\log\frac{vn+\varrho+1}{vn+\varrho}\right)\right]$$

a pak

$$Y = \sum_{\rho=1}^{v} \cos\pi\frac{u}{v}(2\rho+1)\log\frac{\rho}{\rho+1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\rho=1}^{v} \cos\pi\frac{u}{v}(2\rho+1)\left[\frac{1}{vn} - \log\frac{vn+\rho+1}{vn+\rho}\right].$$

Druhou řadu na pravé straně lze patrně psáti ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\rho=1}^{v} \cos\pi\frac{u}{v}\,[2(vn+\rho)+1]\log\frac{vn+\rho}{vn+\rho+1}$$

a tedy také, zavedeme-li sumační index $vn+\rho = n'$

$$\sum_{n'=v+1}^{\infty} \cos\pi\frac{u}{v}(2n'+1)\log\frac{n'}{n'+1}.$$

Nacházíme tedy

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\pi\frac{u}{v}(2n+1)\log\frac{n}{n+1}$$

a pomocí rovnice (III)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} - \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right] = k\pi\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi - \frac{v}{u}\log\frac{u}{v} +$$

$$+ \frac{\pi}{\sin\frac{u}{v}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\pi\frac{u}{v}(2n+1)\log\frac{n}{n+1}. \qquad \text{(IV)}$$

Jak z obecných vět o trigonometrických radách ihned vyplývá, jest rada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n+1)x\pi\log\frac{n+1}{n}$$

v kazdém intervalu mezi $(0\ldots1)$ stejnoměrně konvergentní a representuje tam tudíz spojitou funkci.

Totéz platí o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log(n-x)}{n-x} - \frac{\log(n+x)}{n+x}\right];$$

neboť pro vsechna $0 < x < 1$ a $n > 4$ jest

$$\frac{\log(n-x)}{n-x} - \frac{\log(n+x)}{n+x} < \frac{\log(n-1)}{n-1} - \frac{\log(n+1)}{n+1} = u_n$$

řada $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ konverguje.

Ke kazdému reálnému číslu x v intervalu $0 < x < 1$ konverguje posloupnost racionálních čísel $\frac{u_h}{v_h}$ obsažených v tomto intervalu.

Jest tedy pro libovolné x tohoto intervalu

$$\sum_{n\ \ 1}^{\infty}\left[\frac{\log\ n \quad x)}{n \quad x} \quad \frac{\log(n+x}{n+x}\right] \quad \lim\sum_{n\ \ 1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n \quad \frac{u_h}{v_h}\right)}{n \quad \frac{u_h}{v_h}} \quad \frac{\log\left(n \quad \frac{u_h}{v}\right)}{n+\frac{u_h}{v_\iota}}\right]$$

$$k\pi\operatorname{cotg} x\pi + \frac{\log x}{x} \quad \frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{n\ \ 1}^{\infty}\cos(2n+1)\,x\pi\log\frac{n+1}{n}$$

$$\lim\left[k\pi\operatorname{cotg}\frac{u_h}{v_h}\pi \quad \frac{v_h}{u}\log\frac{u_h}{v_j} \quad \frac{\pi}{\sin\frac{u_h}{v_h}\pi}\sum_{\iota\ \ 1}^{\infty}\cos\pi\frac{u_h}{v_h}(2n \quad 1)\log\frac{n+1}{n}\right].$$

Posloupno ti za znaménkem limitním na pravých stranách techto rovnic jsou však dle (IV) identické a konvergují tudíž k téze limitc; platí tedy obecně pro $0 < x \quad 1$

$$\sum_{n\ \ 1}^{\infty}\left[\frac{\log\ n \quad x)}{n-x} \quad \frac{\log\ n \quad x)}{n \quad x}\right] \qquad\qquad (\mathrm{IV}^*$$
$$k\pi\operatorname{cotg} x\pi \quad \frac{\log x}{x} \quad \frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{n\ \ 1}^{\infty}\cos(2n \quad 1)\,x\pi\log\frac{n \quad 1}{n}.$$

Predpokládej ne pro jednoduchost i nadá e jak budeme potřeb v ti $0 < x < 1$; snadno dokázeme, ze řada

$$\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-x)} \quad \frac{1}{n+x)^s}\right]$$

konverguje stejnoměrně v každém konečném oboru (s), v jehoz vsech bodech jest *real. č.* $s > 0$.*

Neboť jest, píseme li $s \quad \sigma \quad i\tau$

$$\frac{1}{(n-} \;-\; \frac{1}{(\imath \quad x)} \quad s\int_{-x}^{x}\frac{dy}{n+y)^{1+s}}$$

a tedy

$$\frac{1}{n \quad x^s} \quad \frac{1}{(n \quad x)} \;-\; s\int_{x}^{x}\frac{dy}{(n+y^{1 \quad \sigma}} = \frac{2x \quad s}{n+\eta^{1 \quad \sigma}} \qquad x < \eta < x\,. \qquad 6$$

Representuje tudız ıada $\sum_{1}^{\sigma}\left[\frac{1}{n \quad x)} \quad \frac{1}{(n \quad x}\right]$ v každém tako-

---

* Obvod oboru mu eme p čitati k jeho vnitrku.

vém konecném oboru (s) analytickou funkci a sice funkci $R(1 \quad x, s$ $R(1+x, s)$; neboť tato jest jí pri *reál. č.* $s > 1$ definována.

Mužeme tedy pro $0 < x < 1$, $\sigma > 0$ psáti dle (1)

$$\sum_{\nu \; 1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n \quad x^{s}} \quad \frac{1}{(n+x)^{s}}\right]$$

$$\psi \; 1 \quad x) \quad \psi \; 1-x) \quad s \quad 1)\,[f_1(1 \quad x) \quad f_1(1+x)] \quad \ldots\,;$$

rozvineme-li radu na levé straně podle stoupajících mocností faktoru ($s-1$), obdržíme snadno pro koeficient pri první mocnosti

$$2\pi i \; f_1 \; 1 \quad x) - f_1 \; 1 \quad x \quad \int_L \frac{(s}{(s \quad 1)^2} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-x)^s} \quad \frac{1}{n \quad x)^s}\right]$$

$$\sum_{n \; 1}^{\infty} \int_L \left[\frac{1}{n-x} \quad \frac{1}{(n+x)}\right] \frac{ds}{(s \quad 1)^2},$$

integrujıce v kladném sm ru dle jednoduse uzavrené křivky L, obepínající bod s 1 a neprotínající pomyslné osy.

Residuum funkce $\left[\frac{1}{n \quad x)} - \frac{1}{(n+x)}\right]\frac{1}{(s \quad 1)^2}$ v bodě s 1 jest

$$\left[\frac{\log(n \quad x)}{n-x} \quad \frac{\log \; n \quad x)}{n \quad x}\right]$$

tedy

$$f_1(1 \qquad f_1 \; 1 \quad x) \quad - \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{\log \; n-x)}{n-x} \quad \frac{\log \; n+x)}{n+x}\right].$$

Z tohoto výsledku vychází porovnánim se vzorcem (IV* , že je-li v rozvoji

$$R(1 \quad x \; s - R \; 1+x, s \quad \psi \; 1 \quad x - \psi(1-x) +$$
$$s \quad 1) \; f_1(1 \quad x) - f_1(1 \quad x)] + \ldots$$

$0 < \quad < 1$, má koeficient $f_1 \; 1 - \qquad f_1(1-x)$ hodnotu

$$f_1 \; 1-x) \quad f_1(1 \quad x \quad - \log 2\pi + E \; \pi \operatorname{cotg} x\pi - \frac{\log x}{x}$$
$$\frac{\pi}{\sin \; \pi} \sum_{n \; 1} \cos \; 2n \quad 1 \; x\pi \log \frac{n}{n+1}. \tag{V}$$

Pod tkněme jeste, ze ze vzorce IV*) jest mozno odvoditi některé zajímavé výsledky; uzijeme-li Ler^hova pravidla o derivování konvergeı tních tri^ono netrických r d typu $\sum_{n \; 1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \cos 2nx\pi$*, dle něhož derivace jejich souctu jest $\frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n \; 0}^{\infty} (c - \quad _1) \cos \; (2n \quad 1)\, x\pi \; (c_0 \quad 0$, jakmile

* Lerch V stník České Akademie roč. V.

řada tato konverguje stejnoměrně, shledáme, ze integrálem funkce $\frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{1}^{\infty}\cos(2n+1)x\pi\log\frac{n+1}{n}$ jest řada $-\sum_{n\ 1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos 2n\,x\pi$, jez pro $x\ \ \frac{1}{2}$ nabývá hodnoty $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}$; součet této řady jest $E\log 2+\frac{1}{2}\log^2 2$*.

Nalezneme tedy snadno integrací vzorce IV*) v mezích $(\frac{1}{2}, x)$ vztah

$$\sum_{n\ 1}^{\infty}[\log^2(n+\tfrac{1}{2})+\log^2(n-\tfrac{1}{2})-\log^2(n+x\ \ -\log^2(n\quad x)]$$
$$\log^2 x+2[(\log 2\pi+E)\log\sin x\pi+(E\quad\log 2)\log 2]-\qquad\text{(VI)}$$
$$-2\sum_{n\ 1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos 2n\,x\pi,$$

z něhož na př. pro $x\ \ \frac{1}{4}$ vychází

$$\sum_{n\ 1}^{\infty}[\log^2(n+\tfrac{1}{2})+\log^2(n-\tfrac{1}{2})\quad\log^2(n+\tfrac{1}{4})-\log^2(n-\tfrac{1}{4}\,]$$
$$\tfrac{5}{2}\log^2 2-\log\pi.\log 2,$$

kdežto pro $x\ \ \frac{3}{4}$ (VI*)

$$\sum_{n\ 1}^{\infty}[\log^2(n+\tfrac{1}{2})+\log^2(n-\tfrac{1}{2})\quad\log^2(n+\tfrac{3}{4})\quad\log^2(n\quad\tfrac{3}{4})]$$
$$\log^2\tfrac{3}{4}\quad\left(\log\pi+\frac{3\log 2}{2}\right)\log 2.$$

II.

V rozpravě „Dalsí studie v oboru Malmsténovských řad“ odvodil Lerch vzorec**

$$\sum_{n\ 0}^{\infty}\frac{e^{\ 2x\pi i\ \ v+n)}}{v+n}\quad\frac{\pi i}{2}\quad\log 2x\pi\quad E\quad\psi(v)\quad\sum_{k\ \ \infty}^{\infty}{}'\,e^{2kv\pi i}\log\frac{x+k}{k}$$
$$(0<v<1,\ 0<x<1)\qquad(7)$$

a o funkci $\sum_{n\ 0}^{\infty}\frac{e^{2nx\pi i}}{v+n}$ dokázal pozdeji***, že se dá pro racionální v vyjádriti v zakončeném tvaru; táž vlastnost jest známa o funkci ψ $(v$ a byla po prve dokázána Gaussem.† Vychází tudíž z horejšího vzorce téměř bezprostředně, že funkce

$$\sum_{n\ 1}^{\infty}\sin 2nx\pi\log\frac{n+a}{n\quad a},\ \sum_{n\ 1}^{\infty}\cos 2nx\pi\log\frac{n\quad a)\ n+a)}{n^2}$$
$$(0<x<1,\ 0<a<1)$$

* de la Vallée-Poussin, Recherches Analytiques sur la th. des nombres premiers Ann. Soc. scient., Brux., t. XX. p. 65 .

** Cit. str. 1; p. 53.

*** Lerch Ruzné výsledky v theorii funkce gamma; Rozpr. Č. Akademie, II. tr.' roč. V, str. 20.

† Gauss, Sebrané spisy III. sv., str. 157.

representuje v racionálních bodech x konečný aggregát elementárních transcendent. Užívaje podobné metody jako dříve, odvodím v dalším tento výsledek přímo.

* * *

Poznačme pro stručnost

$$f\ x) \quad \sum_{n\quad 1}^{\infty} \sin 2n x\pi \log \frac{n+a}{n-a}$$

a klaďme za x racionální kladný zlomek $\frac{u}{v}$ $(u<v)$; píšeme-li radu $f(x)$

tak, že spojíme vždy v členu v jeden (což odpovídá transformaci indexu $n \quad vn' + \varrho$; $n' \quad 0, 1, 2, \ldots$; $\varrho \quad 1, 2, \ldots v$), obdržíme

$$f\left(\frac{u}{v}\right) \quad \sum_{n\quad 0}^{\infty} \sum_{\varrho\quad 1}^{v} \sin 2\pi \frac{u}{v}\varrho \log \frac{vn+\varrho+a}{vn+\varrho \quad a}$$

anebo také vzhledem ke vzorci (3)

$$f\left(\frac{u}{v}\right) \quad \sum_{\varrho\quad 1}^{v} \sin 2\pi \frac{u}{v}\varrho \left\{\frac{2Ea}{v} + \log\frac{\varrho+a}{\varrho \quad a} \quad \sum_{n\quad 1}^{\infty}\left[\frac{2a}{vn} - \log\frac{1+\frac{\varrho+a}{vn}}{1+\frac{\varrho \quad a}{vn}}\right]\right\};$$

z toho vychází snadno dle (5)

$$f\left(\frac{u}{v}\right) \quad \sum_{\varrho\quad 1}^{v\quad 1} \sin 2\pi \frac{u}{v}\varrho \log \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+a}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho \quad a}{v}\right)}$$

a pak, zavedeme li v aggregátu $\sum_{\varrho\quad 1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v}\varrho \log \Gamma\left(\frac{\varrho \quad a}{v}\right)$ index $\varrho \quad v \quad \varrho'$, hledaný výraz

$$f\left(\frac{u}{v}\right) \quad \sum_{\varrho\quad 1}^{v\quad 1} \sin 2\pi \frac{u}{v}\varrho \log \sin \frac{\varrho+a}{v}\pi$$

nebo

$$f\left(\frac{u}{v}\right) \quad \tfrac{1}{2}\sum_{\varrho\quad 1}^{v\quad 1} \sin 2\pi \frac{u}{v}\varrho \log \frac{\sin\frac{\varrho \quad a}{v}\pi}{\sin\frac{\varrho \quad a}{v}\pi}. \tag{8}$$

Analogicky nalezneme pro funkci

$$g(x) \quad \sum_{n\quad 1}^{\infty} \cos 2n x\pi \log \frac{(n-a)(n \quad a)}{n^2} \qquad 0<x<1,\ 0<a<1)$$

v racionálních bodech x vyjádření

$$g\left(\frac{u}{v}\right) \quad \log\frac{\sin\frac{a}{v}\pi}{\frac{a}{v}\pi} \quad \sum_{\varrho\quad 1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v}\varrho \log \frac{\sin\frac{\varrho-a}{v}\pi}{\sin\frac{\varrho}{v}\pi}. \tag{9}$$

Podotkněme ještě, že vycházejíce z Gaussova vzorce*

$$\psi\left(\frac{u}{v}\right) + E \qquad \log 2v \quad \frac{\pi}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{u}{v}\,\pi + \sum_{k\ \ 1}^{v\ \ 1} \cos\frac{2ku\pi}{v}\,\log\sin\frac{k\pi}{v}$$

můžeme týmiz metodami ale postupem opačným odvoditi Lerchovy trigonometrické rozvoje pro funkci $\psi(x$ **.

---

* Cit. str. 10 (†).

** Cit. str. 10 ***) p. 29.

(ONTRIBUTION À LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES DU CALCUL INTÉGRAL.

PAR

O. BORUVKA.

(RÉSUMÉ.

La fonction $R(x,\ \sigma + i\tau)$ étant donnée pour $\sigma > 1$ par la série $\sum_{n\ 0}^{\infty} \frac{1}{(x\quad n)^{\sigma+i\tau}}$ elle admet le développement

$$R(x, s) \quad \frac{1}{s\quad 1} - \psi(x) + f_1\ x)(s-1) + f_2(x\ \ (s-1)^2 \ldots . \qquad (1)$$

où $\psi(x)$ désigne la derivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$. Les propriétés des fonctions $f_n(x)$ étant inconnues, j'ai déduit une série trigonométrique pour la fonction

$$f_1\ 1\quad x) - f(1+x) + (\log 2\pi \quad \Gamma'\ 1\ )\ \pi \operatorname{cotg} x\pi + \frac{\log x}{x}, \text{ en supposant}$$
$$0 < x < 1.$$

u, v étant des entiers positifs ($u < v$), on trouve en appliquant les formules (3) et la série de Kummer (2) et en posant

$$A \quad \sum_{\rho\ 1}^{v-1} \sin 2\pi\ \frac{u}{v}\ \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$$

l'expression suivante:

$$A \quad \frac{(\log 2\pi - \Gamma'\ 1\ )}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{v}\pi + \frac{v}{2\pi} \sum_{n\ 0}^{\infty} \left[\frac{\log\ vn+u)}{vn+u} \quad \frac{\log[v(n\quad 1)\quad u]}{v\ \ n+1) - u}\right]$$

(voir p. 5) d'où résulte la formule (I). En multipliant l'expression $B \quad \sum_{\rho\ 1}^{v\ 1} \cos 2\pi\ \frac{u}{v}\ \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$ par $\cos \frac{u}{v}\pi$ on déduit facilement la formule (II) et à l'aide de celle-ci et I la formule (III). Si l'on exprime dans cette formule la fonction $\log \Gamma(x)$ par la série de Weierstrass (5) on obtient le résultat (IV) et on voit, que ce résultat est valable pour $0 < x < 1$ form. IV* . En supposant $0 < x < 1$ l'inégalité (6) met en évidence que la série $\sum_{n\ 1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n\quad x)^s} \quad \frac{1}{(n\quad x)^s}\right]$ est uniformément convergente dans tout domaine fini à droit de l'axe imaginaire du plan (s) et qu'elle représente la fonction $R\ (1-x,\ s) \quad R\ \ 1+x,\ s)$; en développant cette fonctio1 suivant les puissances croissantes de $(s-1)$ on trouve facilement le coefficient de $(s - 1$ c'est-à-dire $f_1(1\quad x) - f_1\ \ 1+x)$

(voir p. 9 . Puis on déduit à l'aide de la formule (IV*) le résultat que le coefficient de (s 1) dans le développement de la fonction $R(1-x, s)$ $R(1+x, s)$ est, en supposant $0 < x < 1$,

$$f_1(1 \quad x) \quad f_1(1+x \quad -(\log 2\pi - \Gamma'(1\,)\,\pi \operatorname{cotg} x\pi \quad \frac{\log x}{x} + \\ + \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n-1}^{\infty} \cos\ 2n+1)\, x\pi \log \frac{n}{n+1}.$$

L'intégrale de la fonction $\frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n\ 1}^{\infty} \cos(2n+1)\, x\pi \log \frac{n+1}{n}$ est $\sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \cos\ 2n x\pi$; en intégrant la formule (IV*) on déduit la relation (VI) d'où résultent pour $x - \frac{1}{4}$ et $x \quad \frac{3}{4}$ les formules bien intéressantes (VI* .

* * *

Lerch a établi la formule (7) et il a montré plus tard que, v étant rationnel, on peut exprimer la fonction $\sum_{n\ 0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{n+v}$ par des fonctions élémentaires en nombre fini; donc il résulte de la formule (7) presque immédiatement que, x étant rationnel, les fonctions $\sum_{n\ 1}^{\infty} \sin 2nx\pi \log \frac{n+a}{n-a}$, $\sum_{n\ 1}^{\infty} \cos 2nx\pi \log \frac{(n-a\ (n+a)}{n^2}$ $(0 < x < 1,\ 0 < a < 1)$ sont représentées par des fonctions élémentaires en nombre fini. Je démontre ce théorème en posant $x \quad \frac{u}{v}$, $n \quad vn' + \varrho$ ($n' \quad 0, 1, 2, \ldots$; $\varrho \quad 1, 2, 3, \ldots v$) et en appliquant la formule (3 ainsi que la série de Weierstrass (5). On obtient les formules (8) et (9).

Brno, le 24 novembre 1923.