Otakar Borůvka

Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. I

Spisy přír. fak. MU, č. 165, 1932, 22 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500030

21

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1932 ČÍS. 165

RECHERCHES SUR LA COURBURE DES SURFACES DANS DES ESPACES À *n* DIMENSIONS À COURBURE CONSTANTE I.

PAR

O. BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

RECHERCHES SUR LA COURBURE DES SURFACES DANS DES ESPACES À n DIMENSIONS À COURBURE CONSTANTE I.

On sait que, dans la théorie des variétés riemanniennes plongées dans un espace euclidien à n dimensions et, en particulier, dans les questions d'applicabilité d'espèce m (≥ 1) de variétés, un rôle important jouent les formes différentielles φ_{2k} ($k \geq 1$) dont la définition est la suivante: 1° φ_2 est identique au ds^2 de la variété 2° pour $k \geq 2$, M étant le point variable sur la variété, la forme φ_{2k} est le carré scalaire du vecteur, projection orthogonale de $d^k M$, dans l'espace orthogonal à l'espace osculateur d'ordre $k-1$ de la variété. Rappelons, au sujet des formes en question, les faits suivants: Pour une variété quelconque *a*) la forme φ_{2k} ($k > 1$) est du premier ordre et du degré $2k$ de sorte que sa valeur ne dépend que du point correspondant sur la variété et des directions sur la variété issues de ce point; *b*) pour $k \geq 2$ les formes φ_{2k} sont exceptionnelles c'est à dire leurs coefficients verifient certaines relations *.

Or, au lieu de considérer les variétés dans l'espace euclidien on peut développer leur théorie, plus généralement, dans le cas où l'espace ambiant est à courbure constante. Cette théorie ayant à la disposition les notions d'origine euclidien conduira naturellement à des formes différentielles φ_{2k} analogues à celles dont il est la question ci-dessus. Il y a l'intérêt de considérer ce cas plus général; en effet, certaines propriétés géométriques des variétés, liées étroitement aux formes différentielles en question exigent, et nous en verrons un exemple intéressant **, que l'espace ambiant soit non-euclidien.

Le présent Mémoire est pensé comme la première partie d'un article plus étendu consacré, au fond, á l'étude des *surfaces* plongées dans un espace à courbure constante à n dimensions qui sont caractérisées par les propriétés locales suivantes: Dans un point quelconque de la surface, pour $k = 1, 2, \ldots m < \frac{n}{2}$, 1° l'espace osculateur d'ordre k a précisément $2k$ dimensions 2° l'expression $\varphi_{2k} : ds^{2k}$ ne dépend que du point correspondant sur la surface. Le fait que, parmi les surfaces ainsi caractérisées

* V. E. Bortolotti, *Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizzato del Vitali, e applicazione alle geometrie riemanniane di specie superiore* (Rendiconti del seminario matematico della R. Università di Padova, *1931—IX°*, p. *49*. et suiv.).

** V. p. 22.

se trouvent les surfaces représentées par les fonctions sphériques de Laplace ($n = 2r$, $m = r$, $\varphi_{2k}: ds^{2k} = C^{tes}$)* et les résultats intéressants que l'on connait au sujet des surfaces jouissant des propriétés ci-dessus dans les cas particuliers $n = 4, 5$** justifient l'intérêt pour la question.

Ce Mémoire se devise en deux Chapitres. Dans le premier je démontre pour une surface quelconque plongée dans un espace à courbure constante à n (> 3) dimensions, un théorème géométriquement intuitif, qui exprime le fait que, les formes φ_{2k} correspondantes sont du premier ordre. Dans le deuxième Chapitre j'établie, en applicant les formules développées dans le premier Chapitre, l'existence et le degré de généralité des surfaces jouissant des deux propriétés 1° 2° ci-dessus.

I. Les indicatrices de courbure normale et un théorème général à leur sujet.

1. Plongeons nous dans un espace à n (> 3) dimensions à courbure constante et imaginons une surface (M) appartenant à cet espace. Considérons alors, sur la surface, un point particulier quelconque M. On a dans ce point les espaces osculateurs de la surface des différents ordres, un tel espace d'ordre k (> 1) étant par définition, on le sait, le plus petit espace linéaire contenant tous les espaces osculateurs d'ordre k, au point M, des différentes courbes sur la surface passant par M.

Si s_k est le nombre de dimensions de l'espace osculateur de la surface d'ordre k au point M on a $s_k < \frac{k(k+3)}{2}$; en effet, chaque point d'un tel espace est une combinaison linéaire du point M et de ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes de la surface, jusqu'à l'ordre k et ces dérivées sont précisément en nombre $\frac{k(k+3)}{2}$. D'une manière plus précise, s_k est le rang de la matrice formée par les dérivées partielles en question. Il est donc clair qu'en chaque point de la surface, suffisament voisin au point M, l'espace osculateur de la surface d'ordre k est au moins à s_k dimensions; nous supposons qu'il est à s_k dimensions en chaque point de la surface. Remarquons que, dans chaque point de (M) l'espace osculateur de la surface d'ordre $k+1$ passe par celui d'ordre k. La surface étant supposée d'appartenir à l'espace considéré il existe un entier N tel qu'on a $s_1 < s_2 < \ldots < s_N$ n, les espaces oscu-

---

* V. ma Note: *Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce* (C. R. de l'Académie des Sciences, Paris, t. *191*, 1930 p. *1336*).

** V. p. ex. mes Notes: *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante* (Ibid. t. *187*, 1928, p. *334*).

Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante (Ibid. t. *187*, 1928 p. *1271*).

lateurs de la surface d'ordre $> N$ étant tous à n dimensions. Nous disons que N est le nombre d'espaces osculateurs de la surface (M).

Cela étant adoptons la définition suivante:

Dans un point particulier quelconque M de la surface le $k^{\text{ième}}$ *espace principal* de la surface, $1 < k < N - 1$, est l'espace linéaire passant par M, totalement orthogonal à l'espace osculateur de la surface d'ordre k et situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre $k + 1$ au point M.

D'après cette définition on a, en chaque point de (M) précisément $N - 1$ espaces principaux de la surface et le $k^{\text{ième}}$ espace principal est a $s_{k+1} - s_k\, (\geq 1)$ dimensions.

Pour aller plus loin considérons sur la surface une courbe appartenant à un espace à m $(< n)$ dimensions et passant par un point particulier quelconque M. On a, au point M, un certain nombre $m' \leq m - 1$ de vecteurs des différentes courbures de la courbe considéré. Le vecteur de la $(1 <)\, k\, (< m')^{\text{ième}}$ courbure a la direction de la $k^{\text{ième}}$ normale de la courbe* au point M, et par suite il se trouve situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre $k + 1$ au point M; sa longueur $a_k\, (> 0)$ est la $k^{\text{ième}}$ courbure scalaire de la courbe au point M.

Faisons alors les définitions suivantes:

Dans un point particulier quelconque M de la courbe considérée, nous désignons par $\mathbf{v}_k$, $1 \leq k < m'$ le vecteur dont la direction est celle de la $k^{\text{ième}}$ normale de la courbe au point M et sa longueur est $a_1 \,.\, a_2 \ldots a_k$.

Dans un point particulier quelconque M de la courbe considérée, *le vecteur de la* $k^{\text{ième}}$ $(1 < k < m',\ N - 1)$ *courbure normale* de la courbe est le vecteur, projection orthogonale du vecteur $\mathbf{v}_k$, dans le $k^{\text{ième}}$ espace principal de la surface au point M.

D'après cette définition il peut arriver que, dans certains points des courbes particulières sur la surface il n'y a pas de vecteurs de courbure normale correspondants. On n'a que songer p. ex. au cas $m = 1$. D'autre part il est clair que, quelque soit la courbe sur la surface et M un point sur elle, il existe au point M au plus $N - 1$ vecteurs de différentes courbures normales. Or, un raisonnement facile à faire permet de voir que, M étant un point particulier quelconque sur la surface il passe par M, même *dans chaque direction du plan tangent au point* M, des courbes situées sur la surface pour lesquelles le vecteur de la première, deuxième, etc., $N - 1^{\text{ième}}$ courbure au point M existe, donc pour lesquelles les vecteurs des différentes courbures normales existent au nombre maximum $N - 1$.

Il y a donc lieu la définition suivante:

Dans un point particulieur quelconque M de la surface, *l'indicatrice*

* Nous entendons par une normale et (plus tard) par la tangente d'une courbe un vecteur unitaire.

de courbure normale d'ordre k, $1 < k < N - 1$, est le lieu des sommets des vecteurs de la $k^{\text{ième}}$ courbure normale des différentes courbes sur la surface passant par M, dans ce point.

Cela étant, nous allons démontrer le théorème fondamental suivant:

Toutes les indicatrices de courbure normale des différents ordres sont des courbes rationelles fermées.

2. Pour démontrer le théorème et en vue des considérations ultérieures nous allons faire d'abord quelques remarques préliminaires

Désignons par c (C^{te}) la courbure de l'espace d'opération.

Dans le cas $c \neq 0$ nous avons un espace non-euclidien qui se trouve déterminé par une quadrique (absolue) non-dégénérée; nous la prennons sous la forme

$$(F \quad) \frac{1}{c} X^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 = 0.$$

Un *point* de l'espace est un ensemble ordonné de $n + 1$ nombres réels — coordonnées — $X, X_1, \ldots X_n$ qui rendent la forme F égale à $\frac{1}{c}$; c'est donc un point analytique de l'espace projectif aux coordonnées réelles normées. Étant donnés deux points analytiques P, P' de l'espace projectif nous désignons par le symbole $P \mid P'$ la forme polaire de F correspondant aux coordonnées de ces deux points. En particulier, pour un point analytique P quelconque de l'espace projectif, nous appelerons *carré scalaire*, du point P l'expression $P \mid P$.

Un *vecteur* issu d'un point M de l'espace est tout point analytique de l'espace projectif situé dans le plan polaire de M par rapport à l'absolu. Le carré de sa longueur est donné par le carré scalaire du point analytique en question. En particulier, M étant un point mobile dans l'espace, dM est un vecteur issu de M et le carré ds^2 de la longueur de l'élément d'arc décrit par M est le carré scalaire du vecteur dM. Le *sommet* d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ issu d'un point M de l'espace est le point analytique $M + \boldsymbol{v}$. Deux vecteurs issus d'un point M de l'espace sont *rectangulaires* si les deux points analytiques correspondants, situés dans le plan polaire de M, sont conjugués par rapport à l'absolu.

Cela étant, considérons dans l'espace, un point mobile M et associons lui n vecteurs rectangulaires deux à deux et unitaires $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n$ issus de M. L'ensemble du point M et des vecteurs en question forme un système de reférence mobile et nous avons, en particulier, les formules

$$\begin{aligned} dM &= \omega_{00} M + \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \omega_n \boldsymbol{e}_n; && (1) \\ d\boldsymbol{e}_i &- \omega_{10} M + \omega_{i1} \boldsymbol{e}_1 + \omega_{i2} \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \omega_{in} \boldsymbol{e}_n, && (i = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

les ω étant des formes linéaires aux différentielles des paramètres dont dépend le système mobile. Il y a. naturellement, en conséquence des relations supposées entre M et les $\boldsymbol{e}$, des relations entre les ω. On les obtient facilement en différentiant les relations supposées:

$$MM = \frac{1}{c}\,;\ e_i\, e_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ pour } \begin{matrix} i \neq j \\ i = j \end{matrix};\ M\,|\,e_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

et en tenant compte d'elles-mêmes et des formules (1). On trouve ainsi

$$\omega_{00} = 0;\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0;\ \omega_{i0} + c\,\omega_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

et il en résulte en particulier

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2. \tag{3}$$

De plus, comme les premiers membre dans les formules (1) sont des différentielles exactes il en est de même des seconds ce que s'exprime, il est facile de le voir, par les formules

$$\begin{aligned} \omega'_i &= [\omega_1\,\omega_{1i}] + [\omega_2\,\omega_{2i}] + \ldots + [\omega_n\,\omega_{ni}]; && (4)\\ \omega'_{ij} &= [\omega_{i1}\,\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\,\omega_{2j}] + \ldots + [\omega_{in}\,\omega_{nj}] - c\,[\omega_i\,\omega_j], && (i, j = 1, 2, \ldots n). \end{aligned}$$

Dans le cas $c = 0$ nous avons l'espace euclidien et nous le regardons encore comme subordonné à l'espace projectif et déterminé par la quadrique (absolue) dégénérée

$$(F_-)\ X = 0,\ X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = 0.$$

Un *point* de l'espace est un ensemble ordonné de $n+1$ coordonnées $X = 1$; X_1, $X_2, \ldots X_n$ dont la première est égale à l'unité. Un *vecteur* issu d'un point M de l'espace est tout point analytique de l'espace projectif situé dans l'hyperplan $X = 0$. Les notions du carré scalaire d'un vecteur, d'un vecteur unitaire, du sommet d'un vecteur, de deux vecteurs rectangulaires sont élémentaires.

Cela étant, considérons, dans l'espace, un point mobile M et associons lui n vecteurs rectangulaires deux à deux et unitaires $e_1, e_2, \ldots e_n$ issus de M. L'ensemble du point M et des vecteurs e forme un système de référence mobile pour l'espace. Une considération analogue à celle qui a été faite dans le cas d'espace non-euclidien montre que, dans le cas actuel, les formules (2), (3), (4) subsistent à condition d'y poser $c = 0$.

Dans la suite, nous traiterons les deux cas $c \neq 0$ et $c = 0$ en même temps les considérations que nous avons en vue ne différant pas formellement dans ces deux cas.

3. Pour commencer la démonstration du théorème soit toujours c la courbure de l'espace d'opération, s_k le nombre de dimensions de l'espace osculateur d'ordre k (> 1) de la surface (M) et N le nombre de ses espaces osculateurs. On a $s_1 = 2$, $N > 2$. Posons alors pour $k = 1, 2, \ldots N-1$: $r_k = s_{k+1} - s_k$ de sorte que le $k^{\text{ième}}$ espace principal de la surface, en chaque point, a précisément r_k dimensions. On a évidemment l'inégalité $1 < r_k < k+2$.

Cela étant, faisons correspondre à chaque point M de (M) n vecteurs unitaires rectangulaires deux à deux $e_1, e_2, \ldots e_n$, issus du point M. Nous avons alors les formules telles que (1), les ω étant liés par les relations (2) et vérifiant les relations quadratiques (4); on a encore la formule (3). Particularisons alors le choix des vecteurs $\boldsymbol{e}$ de manière à prendre, dans chaque point M, les vecteurs

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_{s_1} & \text{dans le plan tangent;} & \\ \boldsymbol{e}_{s_1+1}, \ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{e}_{s_2} & \text{dans le premier espace principal;} & \\ \boldsymbol{e}_{s_2+1}, \ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{e}_{s_3} & \text{dans le deuxiène espace principal;} & 5) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ \boldsymbol{e}_{s_{N-1}+1}, \ldots\ldots, \boldsymbol{e}_{s_N} & \text{dans le } N \quad 1^{\text{ieme}} \text{ espace principal.} & \end{array}$$

Une telle particularisation étant faite nous disons que, l'ensemble du point M et des vecteurs $\boldsymbol{e}$ correspondants constitue, pour chaque point M de la surface, un système de référence *normal.* L'espace osculateur d ordre k (>1) de la surface, en chaque point M, se trouve alors déterminé par les vecteurs correspondants $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_{s_k}$.

Les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, en particulier, en chaque point M de la surface, étant dans le plan tangent correspondant, on a

$$\omega_\alpha \quad 0, \qquad \alpha > s_1 + 1. \tag{6}$$

Pour aller plus loin appliquons d'abord, aux équations (6) les formules (4). Nous avons

$$[\omega_1 \omega_{1\alpha}] + [\omega_2 \omega_{2\alpha}] \quad 0, \qquad \alpha > s_1 \quad 1.$$

Ces formules entraînent les relations

$$1^\circ \qquad \begin{array}{ll} \omega_{1\alpha} & p_{2\alpha 0}\, \omega_1 + p_{1\alpha 1}\, \omega_2, \\ \omega_{2\alpha} & p_{1\alpha 1}\, \omega_1 + p_{0\alpha 2}\, \omega_2, \end{array} \qquad \alpha > s_1 \quad 1 \tag{7}$$

les p étant des fonctions des paramètres dont dépend le système mobile. Par suite, en posant

$$\varphi_\alpha{}^{1)} \quad \omega_1\, \omega_{1\alpha} + \omega_2\, \omega_{2\alpha}, \qquad \alpha > s_1 + 1 \tag{8}$$

nous avons

$$\varphi_\alpha{}^{1} \quad p_{2\alpha 0}\, \omega_1{}^2 + 2 p_{1\alpha 1}\, \omega_1\, \omega_2 + p_{0\alpha 2}\, \omega_2{}^2, \quad \alpha > s_1 + 1 \tag{9}$$

Considérons alors sur la surface un point particulier M quelconque et une courbe passant par M et telle qu'il y a de vecteur de la première courbure de la courbe au point M. Il y a de telles courbes, même dans chaque direction du plan tangent au point M. La courbe peut être définie par les formules de Frenet, et on a, en particulier,

$$\begin{array}{l} M' = \boldsymbol{t}, \\ \boldsymbol{t}' \qquad cM + a_1\, \boldsymbol{n}_1, \end{array} \tag{10}$$

$\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{n}_1$) étant la tangente (la première normale) de la courbe au point M; a_1 (>0) signifie la première courbure scalaire de la courbe au point

M et l'accent signifie la dérivation par rapport à l'arc s de la courbe. Les formules (10) entraînent

$$d^2 M = (-cM + a_1 \boldsymbol{n}_1)\, ds^2. \tag{11}$$

D'autre part, on tire des formules (1), (6), (8)

$$d^2 M = -c(\omega_1^2 + \omega_2^2) M + (d\omega_1 - \omega_2 \omega_{12}) \boldsymbol{e}_1 + (d\omega_2 + \omega_1 \omega_{12}) \boldsymbol{e}_2 + \\ + \sum_{\alpha > s_1 + 1}^{n} \varphi_\alpha^{(1)} \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{12}$$

En comparant (11) et (12) on voit que

$$\frac{1}{ds^2} \varphi_\alpha^{1}, \qquad \alpha > s_1 + 1$$

sont les composantes du vecteur $\boldsymbol{v}_1 = a_1 \boldsymbol{n}_1$, associé à la courbe considérée au point M, suivant les vecteurs $\boldsymbol{e}_\alpha$, $\alpha > s_1 + 1$. Si l'on pose

$$\omega_1 = ds \cos\Theta, \quad \omega_2 = ds \sin\Theta, \tag{13}$$

Θ étant l'angle que fait la tangente de la courbe considérée avec le vecteur $\boldsymbol{e}_1$ et que l'on applique la formule (9) ces composantes s'écrivent

$$\frac{1}{ds^2} \varphi_\alpha^{1} = p_{2\alpha 0} \cos^2\Theta + 2 p_{1\alpha 1} \cos\Theta \sin\Theta + p_{0\alpha 2} \sin^2\Theta, \quad \alpha > s_1 + 1. \tag{14}$$

Or, le vecteur $\boldsymbol{v}_1$ se trouve situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre 2 au point M et cet espace se trouve déterminé, d'après l'hypothèse, par les vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \ldots \boldsymbol{e}_{s_2}$ correspondants; on a donc, dans le cas $N > 2$,

$$\varphi_\alpha^{1} = 0, \quad \alpha > s_2 + 1. \tag{15}$$

De plus, comme les vecteurs $\boldsymbol{e}_{s_1+1}, \ldots \boldsymbol{e}_{s_2}$ en question déterminent le premier espace principal de la surface au point M, dans le cas $N > 2$,

2° les quantités

$$X_\alpha = p_{2\alpha 0} \cos^2\Theta + 2 p_{1\alpha 1} \cos\Theta \sin\Theta + p_{0\alpha 2} \sin^2\Theta, \quad s_1 + 1 < \alpha \leq s_2 \tag{16}$$

prises au point M sont les composantes du vecteur de la première courbure normale de la courbe au point M suivant les vecteurs $\boldsymbol{e}_\alpha$, $s_1 + 1 < \alpha \leq s_2$.

Or, la courbe considérée est arbitraire, pourvu qu'il y a de vecteur de la première courbure de la courbe au point M; par suite, Θ dans les formules (14) est arbitraire et par conséquence, les formules (15) entraînent, dans le cas $N > 2$,

$$p_{2\alpha 0} = p_{1\alpha 1} = p_{0\alpha 2} = 0, \quad \alpha > s_2 + 1.$$

Il en résulte, d'aprés (7),

3° dans le cas $2 < N$,

$$\omega_{1\alpha} = \omega_{s_1 \alpha} = 0, \quad \alpha > s_2 + 1. \tag{17}$$

Or, les X_α dans les formules (16) représentent, dans le premier espace principal au point M, les coordonnées du sommet du vecteur de la premiére courbure normale de la courbe considérée au point M. Par suite, quand on regarde, dans ces formules, Θ comme variable, les formules en question représentent les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 au point M. Cette indicatrice est donc bien une courbe rationnelle fermée. Dans le cas $N=2$ il n'y a pas d'indicatrices d'ordres supérieurs à 2 et par suite, dans ce cas, le théorème est démontré.

Dans le cas $N>2$ nous allons procéder dans la démonstration du théorème par la voie d'induction complète.

Dans ce but désignons par k un entier positif $< N-2$. Supposons que nous avons démontré que, avec le choix (5) des vecteurs e, pour $j=1,2,\dots k$,

1° on a les relations de la forme

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=s_{j-1}+1}^{s_j} p_{j\nu 0}\,\omega_{\nu\alpha} = p_{j+1,\alpha,0}\,\omega_1 + p_{j\alpha 1}\,\omega_2, \qquad s_0=0,\quad \alpha > s_j+1\\
&\sum_{\nu=s_{j-1}+1}^{s_j} p_{j-1,\nu,1}\,\omega_{\nu\alpha} = p_{j\alpha 1}\,\omega_1 + p_{j-1,\alpha,2}\,\omega_2,\\
&\sum_{\nu=s_{j-1}+1}^{s_j} p_{j-2,\nu,2}\,\omega_{\nu\alpha} = p_{j-1,\alpha,2}\,\omega_1 + p_{j-2,\alpha,3}\,\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{\nu=s_{j-1}+1}^{s_j} p_{0\nu j}\,\omega_{\nu\alpha} = p_{1\alpha j}\,\omega_1 + p_{0,\alpha,j+1}\,\omega_2,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

les p étant des fonctions des paramètres dont dépend le système normal, et, en particulier,

$$p_{110}=1,\quad p_{120}=0,\quad p_{011}=0,\quad p_{021}=1;$$

2° étant donné, sur la surface, un point particulier quelconque M et une courbe qui passe par M et pour laquelle les vecteurs de la première, deuxième, etc., $j^{\text{ième}}$ courbure dans ce point existent, les quantités

$$X_\alpha = \sum_{\mu=0}^{j+1}\binom{j+1}{\mu} p_{j+1-\mu,\alpha,\mu}\cos^{j+1-\mu}\Theta\,\sin^{\mu}\Theta,\quad s_j+1<\alpha<s_{j+1} \tag{19}$$

prises au point M, sont les composantes du vecteur de la $j^{\text{ième}}$ courbure normale de la courbe au point M suivant les vecteurs e_α, $s_j+1<\alpha<s_{j+1}$, (Θ ayant la signification ci-dessus);

3° on a, dans le cas $j+1<N$,

$$\omega_{s_{j-1}+1,\alpha} = \omega_{s_{j-1}+2,\alpha} = \dots\dots = \omega_{s_j,\alpha} = 0;\quad \alpha > s_{j+1}+1. \tag{20}$$

Les hypothèses 1°, 2° et 3° sont des faits, nous l'avons vu, pour $k \quad 1$. Nous allons montrer qu'elles restent vrai pour $j = k + 1$.

Pour cela remarquons d'abord qu'on a, d'après l'hypothèse, $k + 1 < N$. On a donc, d'après 3°, en particulier, les équations

$$\omega_{\mu\alpha} - 0, \quad \mu - s_{k \quad 1} + 1, \dots s_k; \quad \alpha > s_{k+1} + 1. \tag{21}$$

Appliquons les formules (4) à ces équations. Nous avons, en tenant compte des formules (21) elles-memes

$$\sum_{\nu \quad s_k + 1}^{s_{k+1}} [\omega_{\mu\nu}\, \omega_{\nu\alpha}] = 0.$$

On a alors aussi, pour $h - 0, 1, \dots k$,

$$\sum_{\nu \quad s_k + 1}^{s_{k+1}} p_{k \quad h, \mu, h} [\omega_{\mu\nu}\, \omega_{\nu\alpha}] \quad 0,$$

et par suite

$$\sum_{\nu - s_k \quad 1}^{s_{k+1}} [\sum_{\mu \quad s_{k \quad 1} + 1}^{s_k} p_{k \quad h, \mu, h}\, \omega_{\mu\nu};\ \omega_{\nu\alpha}] \quad 0,$$

et d'après (18)

$$[\omega_1, \sum_{\nu - s_k + 1}^{s_{k+1}} p_{k+1-h, \nu, h}\, \omega_{\nu\alpha}] + [\omega_2, \sum_{\nu \quad s_k + 1}^{s_{k+1}} p_{k-h, \nu, h+1}\, \omega_{\nu\alpha}] = 0, \tag{22}$$

$$(h \quad 0, 1, \dots k;\ \alpha > s_{k+1} + 1).$$

Cette formule montre qu'on peut poser

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu \quad s_k + 1}^{s_{k+1}} p_{k \,\iota\, 1 \quad h, \nu, h}\, \omega_{\nu\alpha} \quad p_{k+2 \quad h, \alpha, h}\, \omega_1 + p_{k+1-h, \alpha, h+1}\, \omega_2, \\ &\sum_{\nu \quad s_k + 1}^{s_{k+1}} p_{k-h, \nu, h+1}\, \omega_{\nu\alpha} \quad p_{k+1-h, \alpha, h+1}\, \omega_1 + p_{k-h, \alpha, h+2}\, \omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$(h \quad 0, 1, \dots k;\ \alpha > s_{k+1} + 1),$$

les p, dans les seconds membres, étant des fonctions des paramètres dont dépend le système normal. Les formules (23) constituent bien un groupe de formules telles que le groupe de formules (18) pour $j \quad k + 1$. L'hypothèse 1° reste donc vrai pour $j = k + 1$.

Posons alors

$$\varphi_\alpha^{(0} \quad \omega_\alpha, \quad \alpha > 1$$

et pour $j = 1, 2, \dots, k + 1$,

$$\varphi_\alpha^{\ j} - \sum_{\nu \quad s_{j-1} + 1}^{s_j} \varphi_\nu^{\ j \quad 1)}\, \omega_{\nu\alpha}, \quad \alpha > s_j + 1. \tag{24}$$

On a la formule

$$\varphi_\alpha^{\ j} \quad \sum_{\mu \quad 0}^{j+1} \binom{j+1}{\mu} p_{j+1 \quad \mu, \alpha, \mu}\, \omega_1^{\,j+1 \quad \mu}\, \omega_2^{\,\mu}; \quad \alpha > s_j + 1. \tag{25}$$

En effet, cette formule est exacte, d'après (8) et (9) pour j 1. Pour $1 < j < k + 1$ elle se vérifie facilement par la voie d'induction complète, au moyen des formules (18) et (23).

Cela étant, considérons sur la surface un point particulier M quelconque et une courbe qui passe par M et telle qu'il y a de vecteurs de la première, deuxième, etc., $k+1^{\text{ième}}$ courbure de la courbe au point M. La courbe peut être définie par les formules de Frenet et on a, en particulier,

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{t}, \\
& \boldsymbol{t}' \quad - - cM + a_1 \boldsymbol{n}_1, \\
& \boldsymbol{n}'_1 \quad - - a_1 \boldsymbol{t} \ + a_2 \boldsymbol{n}_2, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots \\
& \boldsymbol{n}'_k \quad\quad - a_k \boldsymbol{n}_{k \ \ 1} + a_{k+1} \boldsymbol{n}_{k+1},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$\boldsymbol{t}$ étant la tangente, $\boldsymbol{n}$ les normales successives de la courbe au point M; $a_j (> 0)$ signifie la $j^{\text{ième}}$ courbure scalaire de la courbe au point M et l'accent signifie la dérivation par rapport à l'arc s de la courbe. Les formules (26) entraînent

$$M^{(k \ \ 1} \quad \dots\dots + a_1 \cdot a_2 \dots\dots a_k \boldsymbol{n}_k,$$

l'expression non écrite n'étant qu'une combinaison de $M, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \dots \ \boldsymbol{n} \ \ _1$.

D'autre part le vecteur $\boldsymbol{v}_k \quad a_1 . a_2 \dots a_k \boldsymbol{n}_k$ se trouve situé dans l'espace osculateur d'ordre $k + 1$ de la surface au point M qui est déterminé, d'après le choix (5) des vecteurs $\boldsymbol{e}$, par les vecteurs

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_{s_k \ \ 1}, \dots \boldsymbol{e}_{s_{k+1}}.$$

Les composantes du vecteur $\boldsymbol{v}_k$ suivant les vecteurs $\boldsymbol{e}_\alpha$, $s_k + 1 < \alpha < s_{k \ \ 1}$ sont, d'après l'hypothèse 2°, les expressions X_α, $s_k + 1 < \alpha < s_{k+1}$, déterminées par une formule telle que (19) pour $j = k$, Θ désignant l'angle que fait la courbe considérée avec le vecteur $\boldsymbol{e}_1$; on voit d'ailleurs, d'après (25) que, en tenant compte des formules (13) on a

$$X_\alpha \quad \frac{1}{ds^{k+1}} \varphi_\alpha{}^k, \quad s_k + 1 < \alpha < s_{k+1}.$$

On a donc la formule

$$\boldsymbol{v}_k ds^{k \ \ 1} \quad \dots + \sum_{\nu \quad s_k+1}^{s_k \ \ 1} \varphi_\nu{}^k \boldsymbol{e}_\nu,$$

l'expression non écrite, dans le second membre, n'étant qu'une combinaison linéaire de $M, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{s_k}$. En différentiant cette formule on trouve facilement, en vertu des formules (26), (1), (24)

$$\boldsymbol{v}_{k+1} ds^{k \ \ 2} \quad \dots + \sum_{\nu - s_{k+1}+1}^{n} \varphi_\nu{}^{k+1} \boldsymbol{e}_\nu,$$

l'expression non écrite, dans le second membre, n'étant qu'une combinaison linéaire de $M, e_1, \dots e_{s_{k+1}}$. Par suite

$$\frac{1}{ds^{k+2}}\varphi_\alpha^{(k+1)} = \sum_{\mu=0}^{k+2}\binom{k+2}{\mu} p_{k+2-\mu,\,\alpha,\,\mu}\cos^{k+2-\mu}\Theta\sin^{\mu}\Theta,\quad \alpha > s_{k+1}+1 \qquad (27)$$

sont les composantes du vecteur v_{k+1} suivant les vecteurs e_α, $\alpha > s_{k+1}+1$.

Or, le vecteur v_{k+1} se trouve situé dans l'espace osculateur d'ordre $k+2$ de la surface au point M et cet espace est déterminé, d'après l'hypothèse, par M, $e_1 \dots e_{s_{k+2}}$; on a donc, dans le cas $N > k+2$

$$\varphi_\alpha^{k+1} = 0, \qquad \alpha > s_{k+2}+1. \qquad (28)$$

De plus, comme les vecteurs $e_{s_{k+1}+1}, \dots e_{s_{k+2}}$ correspondants déterminent le $k+1^{\text{ième}}$ espace principal de la surface, dans le cas $N > k+2$, les quantités

$$X_\alpha = \sum_{\mu=0}^{k+2}\binom{k+2}{\mu} p_{k+2-\mu,\,\alpha,\,\mu}\cos^{k+2-\mu}\Theta\,.\,\sin^{\mu}\Theta,\qquad s_{k+1}+1 < \alpha < s_{k+2},$$

prises au point M, sont les composantes du vecteur de la $k+1^{\text{ième}}$ courbure normale de la courbe au point M suivant les vecteurs e_α, $s_{k+1}+1 < \alpha < s_{k+2}$.

L'hypothèse 2° reste donc vrai pour $j = k+1$.

Il ne reste plus qu'à montrer que, dans le cas $k+2 < N$ on a les équations telles que (20) pour $j = k+1$. Supposons donc $k+2 < N$.

Comme la courbe considérée, sur la surface est arbitraire, pourvu qu'il y a de vecteurs de la première, deuxième, etc., $k+1^{\text{ième}}$ courbure de la courbe au point M, les formules (28) entraînent, d'après (27),

$$p_{k+2,\,\alpha,\,0} = p_{k+1,\,\alpha,\,1} = \dots = p_{0,\,\alpha,\,k+2} = 0, \quad \alpha > s_{k+2}+1.$$

Ces relations entraînent, d'après (23),

$$\sum_{\nu=s_k+1}^{s_{k+1}} p_{k+1-h,\,\nu,\,h}\,\omega_{\nu\alpha} = 0;\ h = 0, 1, \dots k+1;\ \alpha > s_{k+2}+1. \qquad (29)$$

Les formules (29) représentent $k+2$ relations linéaires en $\omega_{\nu\alpha}$ dont le nombre est $s_{k+1} - s_k = r_k < k+2$. Il suffit donc de montrer que les relations (29) sont linéairement indépendantes.

Dans le cas contraire il existe des quantités λ non toutes nulles telles que les relations

$$\sum_{\nu=s_k+1}^{s_{k+1}} \lambda_\nu p_{k+1-h,\,\nu,\,h} = 0;\quad h = 0, 1, \dots k+1$$

ont lieu. Il en résulte la relation

$$\sum_{\nu=s_k+1}^{s_{k+1}} \lambda_\nu \varphi_\nu^{\,k} = 0.$$

Par suite, M étant un point arbitraire sur la surface, le vecteur de la $k^{\text{ième}}$ courbure normale (s'il en existe) d'une courbe quelconque passant, sur la surface, par M, se trouve situé dans l'espace linéaire à $s_{k+1}-1$ dimensions

$$\mathop{\Sigma}_{\nu \quad s_k+1}^{s_k \quad 1} \lambda_\nu X_\nu \quad 0, \quad X_\alpha \quad 0, \quad \alpha > s_{k+1}+1, \tag{30}$$

$X, X_1, X_2, \ldots$ étant les coordonnées ponctuelles par rapport au système M, $e_1, e_2, \ldots$ Or, il est clair que, l'espace en question passe par l'espace osculateur d'ordre k de la surface au point M. Par suite, si l'on considère, sur la surface une courbe arbitraire, son espace osculateur d'ordre k en ce point (s'il en existe) se trouve dans l'espace linéaire (30); cet espace contient alors le vecteur v_k de la courbe considérée au point M et par suite, il contient l'espace osculateur d'ordre $k+1$ de la courbe au point M et, comme la courbe considérée est arbitraire, il contient l'espace osculateur d'ordre $k+1$ de la surface au point M. L'espace osculateur d'ordre $k+1$ de la surface au point M a alors moins de s_{k+1} dimensions, contrairement à l'hypothèse.

On a donc bien

$$\omega_{s_k+1,\alpha} - \omega_{s_k+2,\alpha} \quad \ldots = \omega_{s_{k+1},\alpha} \quad 0, \quad \alpha > s_{k+2}+1.$$

L'hypothèse 3° reste donc vrai pour $j = k+1$.

La démonstration de la proposition étant terminée, il se trouve démontré que, les X_α déterminés par les formules

$$X_\alpha = \mathop{\Sigma}_{\mu \quad 0}^{j \quad 1} \binom{j+1}{\mu} p_{j \quad 1 \quad \mu,\alpha,\mu} \cos^{j+1 \quad \mu} \Theta \sin^{\mu} \Theta, \quad s_j+1 < \alpha < s_{j+1} \tag{31}$$

prises dans un point M quelconque de la surface, représentent, pour $j \quad 1, 2, \ldots N-1$, dans le $j^{\text{ième}}$ espace principal au point M, les composantes du vecteur de la $j^{\text{ième}}$ courbure normale au point M, de chaque courbe sur la surface pour laquelle ce vecteur existe et dont la tangente fait, avec le vecteur e_1 l'angle Θ. Or, on peut interpréter les X_α en question, dans le $j^{\text{ième}}$ espace principal au point M, comme les coordonnées du sommet du vecteur de la $j^{\text{ième}}$ courbure normale, au point M, d'une telle courbe. Par suite, quand on regarde, dans les formules (31), Θ comme variable, ces formules représentent les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre j $(=1, 2, \ldots N-1)$ au point M. Cette indicatrice est donc bien une courbe rationelle fermée et on a, de plus, ses équations. Le théorème se trouve ainsi démontré.

II. Les surfaces dont quelquesunes premières indicatrices de courbure normale sont des circonférences aux centres dans le point correspondant de la surface.

4. Soit m un entier positif tel que $2(m+1) < n$ et proposons nous de déterminer toutes les surfaces appartenant à l'espace à n dimensions à courbure constante c qui jouissent de la propriété suivante:

Dans un point M quelconque de la surface toutes les indicatrices de courbure normale d'ordre $< m$ sont des circonférences aux centres au point M.

Remarquons d'abord que, dans un point M quelconque d'une surface arbitraire le $k^{\text{ième}}$ espace principal de la surface, $1 < k < N - 1$, est le plus petit espace linéaire passant par M et contenant l'indicatrice de courbure normale d'ordre k.

Cela étant, imaginons une surface (M) jouissant des propriétés voulues. Pour $1 < k < m$, dans un point M quelconque de (M), l'indicatrice de courbure normale d'ordre k étant une circonférence au centre au point M, le plus petit espace linéaire contenant une telle indicatrice est un plan qui passe par M. Par suite le $k^{\text{ième}}$ espace principal de la surface a précisément deux dimensions.

Faisons alors correspondre à chaque point M de la surface un système de référence normal. On prendra, dans chaque point M, en particulieur, les vecteurs

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2 & \text{dans le plan tangent;} \\ \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_4 & \text{dans le premier espace principal;} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_{2m+1}, \ \mathbf{e}_{2m+2} & \text{dans le } m^{\text{ième}} \text{ espace principal;} \end{array} \tag{32}$$

et on aura, pour k $1, 2, \dots m$.

1° les relations de la forme

$$\begin{array}{llll} p_{k,2k-1,0}\,\omega_{2k\ 1,\alpha} & + p_{k,2k,0}\,\omega_{2k,\alpha} & = p_{k+1,\alpha,0}\,\omega_1 & + p_{k,\alpha,1}\,\omega_2, \quad \alpha > 2k+1 \\ p_{k-1\ 2k-1,1}\,\omega_{2k-1.\alpha} & + p_{k-1,2k,1}\,\omega_{2k,\alpha} & = p_{k,\alpha\ 1}\,\omega_1 & + p_{k-1,\alpha,2}\,\omega_2, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ p_{0,2k\ 1,k}\,\omega_{2k\ 1,\alpha} & + p_{0,2k,k}\,\omega_{2k.\alpha} & = p_{1,\alpha,k}\,\omega_1 & + p_{0,\alpha,k+1}\,\omega_2, \end{array} \tag{33}$$

les p étant des fonctions des paramètres dont dépend le système de référence et, en particulier,

$$p_{110} = 1, \quad p_{120} \quad 0, \quad p_{011} = 0, \quad p_{021} = 1;$$

2° les équations paramètriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre k

$$X_\alpha = \sum_{\mu\ 0}^{k+1} \binom{k+1}{\mu} p_{k+1-\mu.\alpha,\mu} \cos^{k+1\ \mu}\Theta \sin^{\mu}\Theta, \quad 2k+1 \leq \alpha < 2k+2 \tag{34}$$

les X_α étant les composantes d'un point de l'indicatrice suivant les axes $\mathbf{e}_\alpha$.

3° les équations

$$\begin{array}{llll} \omega_{2k\ 1\ 2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} - \dots = \omega_{2k-1,n} - 0, \\ \omega_{2k,2k+3} \ \ = \omega_{2k.2k+4} \ \ = \dots \quad \omega_{2k,n} \quad 0, \end{array} \tag{35}$$

à condition d'y supprimer, *dans le cas* $2(m+1) = n$, celles qui en résultent pour $k = m$.

5. Exprimons alors que, l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1, en chaque point M, est une circonférence au centre en M. Ses équations étant, d'après 2 $(k=1)$,

$$\begin{aligned} X_3 &= p_{230}\cos^2\Theta + 2p_{131}\cos\Theta\sin\Theta + p_{032}\sin^2\Theta, \\ X_4 &= p_{240}\cos^2\Theta + 2p_{141}\cos\Theta\sin\Theta + p_{042}\sin^2\Theta, \end{aligned} \tag{36}$$

pourque le centre de l'indicatrice soit au point M, il faut et il suffit qu'on ait

$$p_{230} + p_{032} = 0; \quad p_{240} + p_{042} = 0.$$

Les formules (36) peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{1}{2}\left\{(p_{230} - ip_{131})e^{2i\Theta} + (p_{230} + ip_{131})e^{-2i\Theta}\right\}, \qquad i = \sqrt{-1} \\ X_4 &= \frac{1}{2}\left\{(p_{240} - ip_{141})e^{2i\Theta} + (p_{240} + ip_{141})e^{-2i\Theta}\right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Pourqu'elles représentent une circonférence de rayon R^1 (>0) il faut, évidemment, qu'on ait

$$\begin{aligned} &(p_{230} - ip_{131})^2 + (p_{240} - ip_{141})^2 = 0, \\ &(p_{230} + ip_{131})^2 + (p_{240} + ip_{141})^2 = 0, \\ \frac{1}{2}&\left\{(p_{230} - ip_{131})(p_{230} + ip_{131}) + (p_{240} - ip_{141})(p_{240} + ip_{141})\right\} = R^{1\,2} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} p_{230}^2 + p_{240}^2 &= p_{131}^2 + p_{141}^2 = R^{(1)2}, \\ p_{230}p_{131} + p_{240}p_{141} &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Or, si l'on fait une substitution orthogonale aux vecteurs e_3, e_4 les coefficients de $e^{2i\Theta}$ et ceux de $e^{-2i\Theta}$, dans les formules (37), subissent la même substitution orthogonale. On en déduit facilement, en tenant compte des formules (38), qu'on peut supposer, dans les formules (37), $p_{131} = 0$. Les formules (38) donnent alors $p_{240} = 0$ et on peut prendre, manifestement, $p_{230} = p_{141} = R^1$.

Inversement, les relations

$$p_{131} = p_{240} = 0, \quad p_{230} = p_{141} = R^1 \ (>0)$$

suffisent pourque l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 soit une circonférence de rayon R^1 au centre dans le point M correspondant.

On voit ainsi que, dans un point M quelconque de la surface (M), après avoir fait, au besoin une particularisation convenable des vecteurs e_3, e_4 on peut s'arranger que, le système de référence normal au point M soit tel qu'on a

1° les équations de la forme $(R^1 > 0)$

$$\begin{aligned} \omega_{13} + i\omega_{23} &= R^1(\omega_1 - i\omega_2), & \omega_{14} + i\omega_{24} &= iR^{1)}(\omega_1 - i\omega_2), \quad i = \sqrt{-1} \\ \omega_{13} - i\omega_{23} &= R^1(\omega_1 + i\omega_2), & \omega_{14} - i\omega_{24} &= -iR^{1)}(\omega_1 + i\omega_2), \end{aligned}$$

2° les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1

$$X_3 = R^{(1)} \cos 2\Theta, \quad X_4 = R^{(1)} \sin 2\Theta;$$

3° les équations

$$\begin{array}{llll} \omega_{15} = \omega_{16} = & \ldots & = \omega_{1n} = 0, \\ \omega_{25} = \omega_{26} = & \ldots & = \omega_{2n} = 0, \end{array}$$

a condition que $n > 4$.

6. Soit maintenant $m > 1$ et continuons à exprimer que, dans un point M quelconque de la surface (M) chaque indicatrice de courbure normale d'ordre $< m$ est une circonférence au centre en M. Pour cela procédons par la voie d'induction complète.

Supposons que nous avons déjà démontré que, dans un point M quelconque de la surface (M), après avoir fait, au besoin, une particularisation convenable des vecteurs $e_3, e_4, \ldots e_{2k+1}, e_{2k+2}$, $1 < k < m-1$, on peut s'arranger que, le système de référence normale, au point M, soit tel qu'on ait pour $1 < k < m-1$

1° les équations de la forme $(R^{(k)} > 0)$

$$\begin{aligned} \omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} &= R^{(k)} (\omega_1 - i\omega_2), \qquad i = \sqrt{-1} \\ \omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} &= R^{(k)} (\omega_1 + i\omega_2), \\ \omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} &= iR^{(k)} (\omega_1 - i\omega_2), \\ \omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} &= -iR^{(k)} (\omega_1 + i\omega_2), \end{aligned} \tag{39}$$

2° les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre k

$$\begin{aligned} X_{2k+1} &= R^{(1)} . R^{(2)} \ldots R^{(k)} \cos (k+1)\Theta, \\ X_{2k+2} &= R^{(1)} . R^{(2)} \ldots R^{(k)} \sin (k+1)\Theta, \end{aligned} \tag{40}$$

3° les équations

$$\begin{array}{llll} \omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = & \ldots & = \omega_{2k-1,n} = 0, \\ \omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = & \ldots & = \omega_{2k,n} = 0, \end{array} \tag{41}$$

et démontrons qu'après avoir fait, au besoin, une particularisation convenable des vecteurs e_{2m+1}, e_{2m+2} on peut s'arranger que, le système de référence normale, au point M, soit tel que les équations 1°, 2° vaillent pour $k = m$ et de même les équations 3°, si $2m + 2 < n$.

Dans ce but écrivons d'abord les équations (33) pour $k = m$; nous avons les formules

$$p_{m-\mu,2m-1,\mu}\,\omega_{2m-1,\alpha} + p_{m-\mu,2m,\mu}\,\omega_{2m,\alpha} = p_{m-1-\mu,\alpha,\mu}\,\omega_1 + p_{m-\mu,\alpha,\mu+1}\,\omega_2$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots m;\ \alpha = 2m+1,\ 2m+2),$$

lesquelles on peut mettre sous la forme $(i = \sqrt{-1})$

$$\begin{aligned} (p_{m-\mu,2m-1,\mu} + ip_{m-\mu,2m,\mu})(\omega_{2m-1,\alpha} - i\,\omega_{2m,\alpha}) &+ \\ + (p_{m-\mu,2m-1,\mu} - ip_{m-\mu,2m,\mu})(\omega_{2m-1,\alpha} + i\,\omega_{2m,\alpha}) &= \\ = (p_{m-1-\mu,\alpha,\mu} + ip_{m-\mu,\alpha,\mu+1})(\omega_1 - i\,\omega_2) &+ \\ + (p_{m-1-\mu,\alpha,\mu} - ip_{m-\mu,\alpha,\mu+1})(\omega_1 + i\,\omega_2). & \end{aligned} \tag{42}$$

Or, l'hypothèse 2°, appliquée à $k = m + 1$, donne

$$X_{2m+1} + i X_{2m} = R^{(1)} . R^{(2)} \ldots R^{(m-1)} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} (+i)^{\mu} \cos^{m-\mu} \Theta \sin^{\mu} \Theta$$

d'où l'on tire, en tenant compte de la formule (34),

$$p_{m-\mu, 2m-1, \mu} + i p_{m-\mu, 2m, \mu} = (+i)^{\mu} R^{(1)} . R^{(2)} \ldots R^{(m-1)} .$$

Par suite, on a d'après (42),

$$\begin{aligned} i^{\mu} R^{(1)} . R^{(2)} \ldots R^{(m-1)} \{ (\omega_{2m-1,\alpha} - i\, \omega_{2m,\alpha}) + (-1)^{\mu} (\omega_{2m-1,\alpha} + i\, \omega_{2m,\alpha} \} = \\ (p_{m+1-\mu, \alpha, \mu} + i p_{m-\mu, \alpha, \mu+1}) (\omega_1 - i\, \omega_2) + \\ + (p_{m+1-\mu, \alpha, \mu} - i p_{m-\mu, \alpha, \mu-1}) (\omega_1 + i\, \omega_2), \qquad (43) \\ (\mu = 0, 1, \ldots m ; \ \alpha = 2m+1, \ 2m+2). \end{aligned}$$

Écrivons, dans cette formule $\mu + 2$ au lieu de μ et ajoutons les deux membres ainsi obtenus à (43). Nous avons, évidemment,

$$\begin{aligned} p_{m+1-\mu, \alpha, \mu} + p_{m+1-\mu+2, \alpha, \mu+2} = 0, \\ (\mu = 0, 1, \ldots m-1 ; \ \alpha = 2m+1, 2m+2) \end{aligned} \qquad (44)$$

et on en déduit facilement

$$\begin{aligned} & p_{m+1-2\nu, \alpha, 2\nu} = (-1)^{\nu} p_{m+1, \alpha, 0} ; \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots ; \ 2\nu, 2\nu + 1 < m + 1) \\ & p_{m+1-2\nu+1, \alpha, 2\nu+1} = (-1)^{\nu} p_{m, \alpha, 1} . \end{aligned} \qquad (45)$$

Or, les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre m étant, d'après (34),

$$X_{\alpha} = \sum_{\mu=0}^{m+1} \binom{m+1}{\mu} p_{m+1-\mu, \alpha, \mu} \cos^{m+1-\mu} \Theta \sin^{\mu} \Theta, \quad \alpha = 2m+1, 2m+2,$$

on les peut écrire

$$\begin{aligned} X_{\alpha} = & \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \binom{m+1}{2\nu} p_{m+1-2\nu, \alpha, 2\nu} \cos^{m+1-2\nu} \Theta \sin^{2\nu} \Theta + \\ & + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{m+1}{2\nu+1} p_{m+1-2\nu+1, \alpha, 2\nu+1} \cos^{m+1-2\nu+1} \Theta \sin^{2\nu+1} \Theta \end{aligned}$$

et par suite, en tenant compte des formules (45)

$$\begin{aligned} X_{2m+1} = & \frac{1}{2} \{ (p_{m+1, 2m+1, 0} - i p_{m, 2m+1, 1}) e^{i(m+1)\Theta} + \\ & + (p_{m+1, 2m+1, 0} + i p_{m, 2m+1, 1}) e^{-i(m+1)\Theta} \}, \\ X_{2m+2} = & \frac{1}{2} \{ (p_{m+1, 2m+2, 0} - i p_{m, 2m+2, 1}) e^{i(m+1)\Theta} + \\ & + (p_{m+1, 2m+2, 0} + i p_{m, 2m+2, 1}) e^{-i(m+1)\Theta} \}. \end{aligned} \qquad (46)$$

Ces formules mettent en évidence que, *sous les hypothèses considérées, l'indicatrice de courbure normale d'ordre m, dans un point M* *quelconque de la surface, est nécessairement une éllipse dont le centre se trouve au point M.*

Pourque cette éllipse soit une circonférence de rayon $R^{(1)}\dots R^{(m)}$ il faut évidemment qu'on ait

$$p^2_{m+1,2m+1,0} + p^2_{m+1,2m+2,0} - p^2_{m,2m+1,1} + p^2_{m,2m+2,1} = R^{(1)2}\dots R^{(m)2},$$
$$p_{m+1,2m+1,0}\cdot p_{m,2m+1,1} + p_{m+1,2m+2,0}\cdot p_{m,2m+2,1} = 0. \qquad (47)$$

Or, si l'on fait une substitution orthogonale aux vecteurs e_{2m+1}, e_{2m+2} sans changer les vecteurs e d'indices inférieurs, les coefficients de $e^{i(m+1)\Theta}$ et ceux de $e^{-i(m+1)\Theta}$, dans les formules (46), subissent, évidemment, la même substitution orthogonale. D'autre part, cette substitution n'a aucune influence aux formes ω, qui pour $k < m-1$, figurent dans les formules (39) et (41). Cela est, en effet, immédiat, lorsqu'on remarque qu'en posant, pour abréger

$$E_k = e_{2k-1} + ie_{2k}, \quad E_{-k} = e_{2k-1} - ie_{2k}; \quad k = 1, 2, \dots m, \qquad (48)$$
$$\omega_1 + i\omega_2 = \Omega_1; \quad \omega_1 - i\omega_2 = \Omega_{-1},$$

les formules en question entraînent les suivantes

$$\begin{array}{llllll}
dM = & & \frac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 & + \frac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}; & & (k = 2,3,\dots m-1)\\
dE_1 = & -c\Omega_1 M & -i\omega_{12}E_1 & & + R^{(1)}\Omega_{-1}E_2; & \\
dE_{-1} = & -c\Omega_{-1}M & & + i\omega_{12}E_{-1} & + R^{(1)}\Omega_1 E_{-2}; & \\
dE_k = & & -R^{(k-1)}\Omega_1 E_{k-1} & -i\omega_{2k-1,2k}E_k & + R^{(k)}\Omega_{-1}E_{k+1}; & (49)\\
dE_{-k} = & & R^{(k-1)}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} & + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} & + R^{(k)}\Omega_1 E_{-(k+1)}; & \\
dE_m = & & -R^{(m-1)}\Omega_1 E_{m-1} & -i\omega_{2m-1,2m}E_m & + \sum_{j=2m+1}^{2m+2}(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})e_j & \\
dE_{-m} = & - & R^{(m-1)}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} & + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} & + \sum_{j=2m+1}^{2m+2}(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})e_j; & \\
de_{2m+1} = & & \omega_{2m-1,2m+1}e_{2m-1} & -\omega_{2m,2m+1}e_{2m} & + \omega_{2m+1,2m+2}e_{2m+2} + \dots; & \\
de_{2m+2} = & & -\omega_{2m-1,2m+2}e_{2m-1} & -\omega_{2m,2m+2}e_{2m} & -\omega_{2m+1,2m+2}e_{2m+1} + \dots; &
\end{array}$$

. . . .

On voit donc, en tenant compte des formules (47) qu'on peut supposer, dans les formules (46), $p_{m,2m+1,1} = 0$. Les formules (47) donnent alors $p_{m+1,2m+2,0} = 0$ et on peut prendre, manifestement, $p_{m+1,2m+1,0} = p_{m,2m+2,1} = R^{(1)}\cdot R^{(2)}\dots R^{(m)}$.

Inversement, les relations

$$p_{m,2m+1,1} = p_{m+1,2m+2,0} = 0;$$
$$p_{m+1,2m+1,0} = p_{m,2m+2,1} = R^{(1)}\cdot R^{(2)}\dots R^{(m)} \qquad (>0)$$

suffisent pourque l'indicatrice de courbure normale d'ordre m soit une circonférence de rayon $R^{(1)}\cdot R^{(2)}\dots R^{(m)}$ au centre au point M correspondant.

On a donc, d'après (43) et (45),

1° les équations

$$
\begin{aligned}
\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1} &= R^{(m)}(\omega_1 - i\omega_2);\\
\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1} &= R^{(m)}(\omega_1 + i\omega_2);\\
\omega_{2m-1,2m+2} + i\omega_{2m,2m+2} &= iR^{(m)}(\omega_1 - i\omega_2);\\
\omega_{2m-1,2m+2} - i\omega_{2m,2m+2} &= -iR^{(m)}(\omega_1 + i\omega_2);
\end{aligned}
$$

2° les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre m

$$
\begin{aligned}
X_{2m+1} &= R^{(1)}\,.\,R^{(2)}\dots R^{(m)}\cos(m+1)\,\Theta,\\
X_{2m+2} &= R^{(1)}\,.\,R^{(2)}\dots R^{(m)}\sin(m+1)\,\Theta,
\end{aligned}
$$

3° d'après (35), si $2m+2<n$,

$$
\begin{aligned}
\omega_{2m-1,2m+3} &= \omega_{2m-1,2m+4} = \dots = \omega_{2m-1,n} = 0,\\
\omega_{2m,2m+3} &= \omega_{2m,2m+4} = \dots = \omega_{2m,n} = 0,
\end{aligned}
$$

comme nous voulions démontrer.

7. On voit ainsi que, les surfaces générales appartenant à un espace à n dimensions à courbure constante c dont toutes les indicatrices de courbure normale d'ordre $<m$, dans un point M quelconque, sont des circonférences aux centres au point M, peuvent être définies par le système suivant

$$
\omega_3 = \omega_4 = \dots = \omega_n = 0;\quad \omega_{jl} + \omega_{lj} = 0 \quad (l, j = 1, 2, \dots n);
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} &= R^{(k)}(\omega_1 - i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} &= R^{(k)}(\omega_1 + i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} &= iR^{(k)}(\omega_1 - i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} &= -iR^{(k)}(\omega_1 + i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} &= \dots = \omega_{2k-1,n} = 0,\\
\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} &= \dots = \omega_{2k,n} = 0;\\
(i = \sqrt{-1};\ k = 1, 2, \dots m;\ &R^{(k)} > 0)
\end{aligned}
\tag{50}
$$

le groupe d'équations résultant de celles qui sont écrites dans les deux dernières lignes pour $k=m$, étant à supprimer si $2m+2=n$.

Or, le système en question entraîne les conditions d'intégrabilité suivantes

$$
\begin{aligned}
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\frac{dR^{(k)}}{R^{(k)}} + i\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(\frac{dR^{(k)}}{R^{(k)}} - i\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0;
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
\begin{gathered}
[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2m+1,j} + i\omega_{2m+2,j})] = 0;\\
[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2m+1,j} - i\omega_{2m+2,j})] = 0,\\
(k = 1, 2, \dots m;\ j = 2m+3,\ 2m+4, \dots n),
\end{gathered}
$$

les équations dans les deux dernières lignes étant à supprimer si $2m+2=n$.

Le nombre de relations (51) est évidemment

$$2m + 2(n - \overline{2m+2}) \quad 2(n - m - 2)$$

et il y a, dans ces relations, le même nombre d'expressions sécondaires (c'est à dire celles qui figurent dans les crochets [ ] en outre de $\omega_1 + i\omega_2$ linéairement indépendantes.

La forme des relations (51) met alors en évidence que le système (50 est en involution et sa solution générale dépend de $2(n - m - 2)$ fonctions arbitraires d'une variable.

Par suite,

les surfaces générales appartenant à un espace à n dimensions à courbure constante, dont toutes les indicatrices de courbure normale d'ordre $< m$, dans un point M quelconque, sont des circonferences aux centres en M, existent et dépendent de $2(n - m - 2)$ fonctions d'une variable.

Le raisonnement du n° 6 (v. p. 18) permet d'énoncer encore le résultat suivant:

Si une surface appartenant à un espace à n dimensions à courbure constante jouit, en ce qui concerne les indicatrices de courbure normale d'ordre $< m - 1$, des propriétés considérées, l'indicatrice de courbure normale d'ordre m, si l'en existe, est toujours une éllipse dont le centre coïncide avec le point correspondant de la surface.

8. Nous allons faire encore quelques remarques au sujet du cas où les rayons de toutes les indicatrices considérées sont des constantes. Cela a évidemment lieu alors et alors seulement si toutes les fonctions $R^{(k}$ qui figurent dans les formules (50) sont constantes. On a ensuite, d'après (51)

$$\omega_{12} + \omega_{2k\ 1,2k} - \omega_{2k\ 1,2k+2} \quad k \quad 1, 2, \dots m;$$

et il en résulte, évidemment,

$$\omega_{2k+1,2k+2} \quad (k+1)\,\omega_{12}. \tag{52}$$

Les conditions d'intégrabilité auxquelles donnent naissance ces équations sont

$$R^{(k)} \quad \frac{k(k+1)}{2} R^{(1\,2} - \frac{(k-1)(k+2)}{2} \cdot \frac{c}{2}, \quad k - 1, 2, \dots m; \tag{53}$$

$$\sum_{j\ 2m+3}^{n} [(\omega_{2m+1,j} - i\,\omega_{2m+2,j})(\omega_{2m+1,j} + i\,\omega_{2m+2,j})] +$$

$$\left\{(m+1)(m+2)R^{(1\,2} - m(m+3)\frac{c}{2}\right\} [(\omega_1 - i\,\omega_2)(\omega_1 + i\,\omega_2)] = 0,$$

$$si\ 2m + 2 < n; \tag{54}$$

$$(m + 1)(m+2)R^{1\,2} - m(m+3)\,\frac{c}{2} - 0, \quad si\ 2m + 2 - n.$$

La formule (53) exprime les relations qui doivent subsister entre les rayons des indicatrices des différents ordres et la courbure de l'espace.

La formule (54) à son tour, *appliquée au cas* $2m+2=n$, montre que, *dans les espaces à nombre paire de dimensions mais seulement à courbure positive il existe des surfaces dont toutes les indicatrices des différents ordres sont des circonférences aux centres au point correspondant sur la surface et de rayons constants*; cette formule exprime, en effet, que, sous certaines relations entre les rayons des indicatrices et la courbure de l'espace le système (50) et (52) est complètement intégrable. Remarquons que, les surfaces en question sont les surfaces représentées par les fonctions sphériques de Laplace*.

Dans le cas $2m+2<n$, si l'on prolonge le système (50), d'après (51) par les équations

$$\begin{aligned} &\omega_{2k+1,\,2k+2} = (k+1)\,\omega_{12}, && k = 1, 2, \ldots m; \\ &\omega_{2m+1,j} + i\,\omega_{2m+2,j} = u_j\,(\omega_1 - i\,\omega_2), && j = 2m+3, \ldots n; \\ &\omega_{2m+1,j} - i\,\omega_{2m+2,j} = \bar{u}_j\,(\omega_1 + i\,\omega_2), && \end{aligned} \tag{55}$$

les u étant des fonctions des variables dont dépend le système normal on a les conditions d'intégrabilité suivantes

$$\begin{aligned} &R^{(k)2} = \frac{k\,(k+1)}{2}\,R^{(1)2} - \frac{(k-1)\,(k-2)}{2}\cdot\frac{c}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots m; \\ &u_{2m+3}\,\bar{u}_{2m+3} + \cdots + u_n\,\bar{u}_n = (m+1)\,(m+2)\,R^{(1)2} - m\,(m+3)\,\frac{c}{2}; \\ &[(\omega_1 - i\,\omega_2)\,(du_j - i\sqrt{m+2}\,u_j\,\omega_{12} + \sum_{\nu=2m+3}^{n} u_\nu\,\omega_{\nu j})] = 0; \\ &[(\omega_1 + i\,\omega_2)\,(d\bar{u}_j - i\sqrt{m+2}\,\bar{u}_j\,\omega_{12} + \sum_{\nu=2m+3}^{n} \bar{u}_\nu\,\omega_{\nu j})] = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Le système d'équations (50) et (55) n'est pas donc en involution. Si l'on essaye de le mettre, dans le cas général, en involution, par des prolongements successifs, on est amener à effectuer des calculs très longs.

---

* V. à ce sujet mon Mémoire: *Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce* qui va paraître prochainement dans le J. Math. pures appl.