Otakar Borůvka

Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. II

Spisy přír. fak. MU, č. 212, 1935, 20 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500040

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

ANTONÍN ŠIMEK

ROK 1935 Čís. 212

RECHERCHES SUR LA COURBURE DES SURFACES DANS DES ESPACES A n DIMENSIONS A COURBURE CONSTANTE.

II.

PAR

O. BORUVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

RECHERCHES SUR LA COURBURE DES SURFACES DANS DES ESPACES A n DIMENSIONS A COURBURE CONSTANTE. II.

Le présent travail est suivi d'un autre portant le même titre et désigné par III. Tous les deux sont conçus de manière à former un seul Mémoire. C'est seulement pour des raisons techniques qu'il paraît utile de publier ce Mémoire en deux parties[1].

Le contenu fait la suite des recherches que j'ai commencées antérieurement et qui concernent une classe étendue de surfaces plongées dans des espaces à n dimensions à courbure constante[2]. En language géométrique, il s'agit des surfaces caractérisées par la propriété locale que, quelquesunes premières indicatrices de courbure normale, en tout point M de la surface, sont des circonférences centrées au point M. A présent, j'étudie le cas où *toutes* les indicatrices de courbure normale jouissent de cette propriété, c'est ce qui exige, naturellement, que n soit un nombre paire $2\,r$ et je considère l'espace *euclidien.* Le cas d'espace noneuclidien exige des considérations à part et il sera traité ultérieurement.

Le résultat principal au sujet des surfaces considérées consiste en ceci que, les surfaces en question et leurs invariants locaux représentent une image réelle des courbes analytiques plongées dans l'espace hermitien parabolique à r dimensions et de leurs invariants locaux. Les surfaces classiques de Kwietniewski et Kommerell dans l'espace euclidien à quatre dimensions, récemment souvent considérées en relation avec la théorie de fonctions analytiques de deux variables complexes — citons seulement les Mémoires de MM. *B. Segre*[3] et *E. Cartan*[4] — en font un cas particulier ($r = 2$) et elles apparaissent, en ce qui concerne la métrique hermitienne, dans une lumière nouvelle. Suivant une terminologie moderne j'appelle les surfaces étudiées *surfaces caractéristiques* des courbes analytiques.

Le Mémoire est divisé en quatre chapitres dont deux sont dans chaque partie. Les premiers chapitres des deux parties contiennent des préliminaires au sujet de l'espace hermitien parabolique à r dimensions et son représentation habituelle sur l'espace euclidien réel à $2\,r$ dimensions et ils ont pour but de préciser le point de départ des considérations

---

[1] Plusieurs résultats qui se trouvent établis dans ce Mémoire ont été énoncés, sans démonstration, dans ma Note publiée aux *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 197, p. 109, 1933.

[2] Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. I. (*Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk*, N° 165, 1932.) Ce Mémoire sera cité dorénavant par I.

[3] B. Segre, *Rend. Semin. Mat. Roma*, Ser. II, V. 7, 1931, parte II, p. 59—107.

[4] E. Cartan, *Ann. Mat. pura appl.*, Ser. IV, T. XI, 1932—33, p. 17.

qui suivent. Le deuxième chapitre de la première partie est consacré à l'étude d'un système d'équations différentielles représentant une espèce de formules de Frenet pour les courbes analytiques plongées dans l'espace hermitien parabolique à r dimensions. Cette étude paraît de présenter de l'intérêt aussi du point de vue de l'analyse car elle concerne les équations différentielles ordinaires les plus générales dont le groupe de monodromie consiste de substitutions qui sont des déplacements de l'espace hermitien en question. Enfin, les raisonnements contenus dans le deuxième chapitre de la seconde partie, basés aux considérations précédentes, concernent les propriétés des surfaces caractéristiques.

Il est digne de remarque que, la méthode pour l'étude des surfaces caractéristiques, employée dans ce Mémoire, peut être étendue à l'étude de variétés caractéristiques d'un nombre plus élévé de dimensions, p. ex. à l'étude des variétés données par des fonctions biharmoniques. Une telle étude ne paraît pas être sans intérêt pour la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes et je me propose d'y revenir dans un autre Mémoire.

1. Préliminaires sur la géométrie hermitienne parabolique.

1. Choisissons arbitrairement mais une fois pour tout un nombre entier positif $r > 1$ et considérons *l'espace hermitien parabolique* à r dimensions K_r. Un tel espace est, on le sait, un espace métrique, dont les *points* peuvent être assimilés à des ensembles ordonnés de $r+1$ nombres complexes non tous nuls — *coordonnées homogènes.* A côté de points on considère les *hyperplans* de l'espace que l'on fait assimiler aussi à des ensembles ordonnés de $r+1$ nombres complexes non tous nuls — *coordonnées homogènes.* Deux points (hyperplans) coïncident si leurs coordonnées homogènes ne diffèrent que par un facteur commun et dans ce cas seulement. Entre les deux catégories d'éléments, points et hyperplans, on définit la relation d'incidence bien connue. Si un hyperplan particulier est incident avec un point particulier nous disons que, l'hyperplan passe par le point et le point est situé dans l'hyperplan. Dans le cas de l'espace hermitien *parabolique,* que nous considérons, un hyperplan joue un role privilégié. On l'appelle *l'hyperplan à l'infini* de l'espace K_r. Nous supposons que c'est l'hyperplan dont les coordonnées homogènes sont toutes nulles sauf la première qui est différente de zéro. Si un point de l'espace n'est pas situé dans l'hyperplan à l'infini nous l'appellerons simplement *point*; s'il y est situé nous l'appellerons *point à l'infini.* Comme deux points coïncident si leurs coordonnées homogènes ne diffèrent que par un facteur commun, nous pouvons supposer la première coordonnée de tout point égale à l'unité et par conséquent, tout point peut être assimilé à un ensemble ordonné de r nombres complexes — *coordonnées non-homogènes.* Un

ensemble ordonné de $r+1$ nombres complexes $0, a^1, \ldots, a^r$, les a n'étant pas tous nuls, représent un *vecteur* de l'espace K_r. Les nombres a sont les *composantes* du vecteur. Tout vecteur $a^1, \ldots, a^r$ détermine précisément un point à l'infini à savoir celui, dont les coordonnées homogènes sont $0, a^1, \ldots, a^r$ et inversement, tout point à l'infini peut être déterminé de cette manière par une infinité de vecteurs qui se déduisent d'un d'entre eux par multiplication de ses composantes par un facteur non nul. Nous désignérons les points (vecteurs) par des lettres majuscules (grasses) telles que A ($\boldsymbol{a}$) et leurs coordonnées non-homogènes (composantes) par des lettres respectives douées d'indices supérieurs, p. ex. $A^1, \ldots, A^r$ ($a^1, \ldots a^r$). Rappelons que les symboles tels que p. ex. $A + x^1 \boldsymbol{a}_1 + x^2 \boldsymbol{a}_2$, les x^1, x^2 étant des nombres complexes, représentent des points. Etant donné deux points différents A, B quelconques, pris dans cet ordre, on peut leur associer le vecteur $\boldsymbol{a}$ aux composantes $B^k - A^k$. Nous disons alors que, A est l'origine, B le sommet du vecteur $\boldsymbol{a}$ et que le vecteur $\boldsymbol{a}$ est issu du point A. Convenons enfin que, x étant un nombre complexe quelconque nous désignons par le symbole $\bar{x}$ le nombre complexe conjugué à x.

2. La métrique de l'espace K_r est déterminé par une forme hermitienne définie positive située dans l'hyperplan à l'infini (*forme fondamentale*) que nous prendrons sous la forme $(z, \bar{z}) = z^1 \bar{z}^1 + \ldots. + z^r \bar{z}^r$. A cette forme est attaché la notion de la distance de deux points quelconques A, B: C'est le nombre positif ou nul dont le carré égale à la quantité

$$(B^1 - A^1)(\bar{B}^1 - \bar{A}^1) + \ldots. + (B^r - A^r)(\bar{B}^r - \bar{A}^r).$$

Ce nombre est aussi, par définition, la longueur du vecteur dont B est le sommet et A l'origine ou inversement. Une autre notion importante attachée à la forme fondamentale est celle de l'angle de deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. C'est le nombre ω déterminé *mod* 2π par la formule

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(a, \bar{a})(b, \bar{b}) - (a, \bar{b})(\bar{a}, b)}{(a, \bar{a})(b, \bar{b})}.$$

Nous disons que, deux vecteurs particuliers $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sont *orthogonaux* si leur angle égale à π et par conséquent si la quantité $(a, \bar{b})$ correspondante est nulle.

Le groupe de l'espace K_r est le groupe de substitutions projectives ou antiprojectives en $r+1$ variables conservant l'hyperplan à l'infini et la forme fondamentale. Chaque substitution du groupe transforme donc des points en points et des points à l'infini en points à l'infini. Les formules de transformation sont de la forme

$$\begin{aligned} & z'^k = a_{k0} + a_{k1} z^1 + \ldots + a_{kr} z^r \\ \text{ou bien} \quad & z'^k = a_{k0} + a_{k1} \bar{z}^1 + \ldots + a_{kr} \bar{z}^r \qquad (k = 1, \ldots, r) \end{aligned} \tag{1}$$

pour les coordonnées non-homogènes de points, et

$$z'^k = a_{k1} z^1 + \dots + a_{kr} z^r$$
ou bien
$$z'^k = a_{k1} \bar{z}^1 + \dots + a_{kr} \bar{z}^r \qquad (k = 1, \dots, r) \tag{2}$$

pour les composantes de vecteurs. Dans ces formules les a sont des nombres complexes, la matrice $\| a_{kl} \|$ $(k, l = 1, \dots, r)$ étant telle que, la substitution linéaire (2) conserve la forme fondamentale.

Désignons par des lettres majuscules grasses les matrices à r lignes et r colonnes formées de nombres complexes et, en particulier, par $\boldsymbol{E}$ la matrice des coefficients de la forme fondamentale. La matrice $\boldsymbol{A}$ des a_{kl} dont il est la question vérifie alors l'équation symbolique suivante

$$\bar{\boldsymbol{A}}' \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \tag{3}$$

$\bar{\boldsymbol{A}}'$ étant la transposée de la matrice complexe conjuguée de $\boldsymbol{A}$. Or, on sait[5] que, toute matrice vérifiant cette équation est de la forme

$$\boldsymbol{A} = e^{i\varphi} (\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H})^{-1} (\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}), \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{4}$$

φ étant un nombre réel et $\boldsymbol{H}$ une matrice hermitienne et inversement, chaque matrice de cette forme vérifie l'équation (3). Comme une matrice hermitienne à r lignes et r colonnes dépend de r^2 paramètres (réels), la formule (4) entraîne que, le nombre de paramètres arbitraires dans les formules (2) est r^2 et par conséquent, d'après (1), le nombre de paramètres arbitraires du groupe de l'espace K_r est $r^2 + 2r = (r+1)^2 - 1$.

3. En vue d'applications ultérieures nous allons faire quelques remarques concernant les espaces linéaires dans l'espace K_r. Soit A un point quelconque dans l'espace K_r et considérons un espace linéaire K_m à m dimensions, $1 \leqq m \leqq r$, passant par A. Cet espace coupe l'hyperplan à l'infini dans un espace linéaire $\mathcal{K}_{m-1}$ à $m-1$ dimensions. Si $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ désignent des vecteurs arbitraires déterminant des points à l'infini linéairement indépendants et situés dans l'espace $\mathcal{K}_{m-1}$, tout point P de l'espace $\mathcal{K}_m$ se trouve déterminé par une formule telle que

$$P = A + x^1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x^m \boldsymbol{a}_m.$$

Inversement, en faisant varier les x dans la formule précédente on obtient tous les points de l'espace K_m. Les *vecteurs de l'espace* K_m sont, par définition, les différents vecteurs qui déterminent les points à l'infini de l'espace $\mathcal{K}_{m-1}$. Il forment donc un système linéaire homogène à m paramètres ayant pour base les vecteurs $\boldsymbol{a}$. Remarquons que, tout point à l'infini peut être déterminé par une infinité de vecteurs *unitaires*. En effet, si un point à l'infini est déterminé par un vecteur $\boldsymbol{a}$ et que

---

[5] A. Loewy, Über bilineare Formen mit konjugiert imaginären Variablen (*Nova Acta. Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher*, Bd. LXXI, Nr. 8).

α désigne la longueur du vecteur $\mathbf{a}$, le vecteur $e^{i\varphi} \cdot \mathbf{a} : \sqrt{\alpha}$, quelque soit le nombre réel φ est unitaire et il détermine le même point à l'infini.

Deux espaces linéaires K_m, K_n passant par un point A quelconque s'appellent *orthogonaux* l'un à l'autre si tout vecteur de l'espace K_m et tout vecteur de l'espace K_n sont orthogonaux. Evidemment, pour que deux espaces linéaires K_m, K_n passant par un point A soient orthogonaux l'un à l'autre il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ du système de vecteurs de l'espace K_m et une base $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ du système de vecteurs de l'espace K_n telle que, tout vecteur $\mathbf{a}$ et tout vecteur $\mathbf{b}$ soient orthogonaux. Il nous sera utile la remarque suivante. Si un espace linéaire K_{m+1} à $m+1$ dimensions contient un espace K_m passant par un point A il existe précisément une droite passant par A, orthogonale à l'espace K_m et contenue dans l'espace K_{m+1}. Soient, en effet, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ des vecteurs formant une base du système de vecteurs de l'espace K_m. Le déterminant $|(\bar{a}_k, a_l)|$ $(k, l = 1, \ldots, m)$ est différent de zéro, car ce déterminant est le produit des deux matrices à m lignes et r colonnes $\|\bar{a}_k{}^\alpha\|$, $\|a_k{}^\alpha\|$. Soit $\mathbf{a}_{m+1}$ un vecteur de l'espace K_{m+1} tel que, les vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}$ forment une base du système de vecteurs de l'espace K_{m+1}. Il s'agit de faire voir qu'il existe un seul système de nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$, à des systèmes de nombres proportionnels près, tel que $\lambda_{m+1} \neq 0$ et le vecteur $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{m+1} \mathbf{a}_{m+1}$ et un quelconque des vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ soient orthogonaux. Autrement dit, il s'agit de faire voir qu'il existe une seule solution, à des solutions proportionnelles près, des m équations linéaires homogènes à $m+1$ inconnues

$$\lambda_1 (\bar{a}_k, a_1) + \ldots + \lambda_{m+1} (\bar{a}_k, a_{m+1}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)$$

telle que $\lambda_{m+1} \neq 0$. Or, cela est évident car le déterminant $|(\bar{a}_k, a_l)|$ est différent de zéro.

2. Extension des formules de Frenet pour l'espace K_r.

4. Une courbe analytique dans l'espace K_r est, par définition, un ensemble de points tel que $P^k = f^k(z)$, $1 \leq k \leqq r$, les $f^k(z)$ étant des fonctions analytiques d'une variable complexe $z = x + iy$. Nous supposons les fonctions $f^k(z)$ déterminées par des séries entières en $z - z_0$, convergentes au voisinage de la valeur $z = z_0$. Ces séries constituent *l'élément initial* de la courbe. Nous considérons comme *domaine de définition* de la courbe un domaine (ouvert et connexe) D du plan (z) jouissant de la propriété que, pour $z_1 \in D$, les séries formant l'élément initial peuvent être prolongées, suivant le même chemin, situé dans D, en des séries entières en $z - z_1$, convergentes au voisinage de la valeur $z = z_1$. Ces séries constituent alors un *élément* de la courbe centré au point $z_1 \in D$. D'après cette définition les fonctions $f^k(z)$ ne sont pas nécéssairement uniformes dans le domaine D. Si, par exemple, les fonctions

$f^k(z)$ forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle ordinaire linéaire et homogène d'ordre r, dont les coefficients sont des fonctions analytiques et uniformes dans un domaine, ce domaine peut être pris pour le domaine de définition de la courbe analytique $P^k = f^k(z)$. Les éléments de la courbe centrés dans n'importe quel point z de ee domaine s'obtiennent d'un quelconque d'entre eux par des substitutions du groupe de monodromie de la dite équation différentielle.

Nous disons qu'une courbe analytique dans l'espace K_r *appartient* à l'espace K_r s'il n'y a pas entre les fonctions $f^k(z)$, $1 < k < r$, qui définissent la courbe, de relation identique linéaire, en général non homogène, à des coefficients (complexes) constants.

5. Considérons une courbe analytique $f^k(z)$, $1 \leqq k \leq r$, appartenant à l'espace K_r. A chaque point P de la courbe on peut associer les r vecteurs aux composantes $f^{1(k)}(z), \ldots, f^{r(k)}(z)$, $1 \leq k < r$, $f^{l(k)}(z)$ signifiant la dérivée d'ordre k de la fonction $f^l(z)$ au point P. Nous appelons *vecteurs fondamentaux* de la courbe au point P les vecteurs en question; le premier, le deuxième etc. vecteur fondamental de la courbe au point P.

Nous supposons dans la suite, pour éviter des complications dans les détails que, en chaque point de la courbe, les vecteurs fondamentaux sont linéairement indépendants. Cette supposition s'exprime par l'inégalité que, le déterminant

$$F(z) = f^{1\,k}(z), \ldots, f^{r(k)}(z)|$$

est différent de zéro pour tout point de la courbe.

Soit P un point de la courbe. Pour $1 \leq k \leq r$ l'espace linéaire à k dimensions passant par P et contenants les k premiers vecteurs fondamentaux de la courbe au point P est, par définition, *l'espace osculateur d'ordre k* de la courbe au point P. Nous disons aussi la *tangente* au lieu de l'espace osculateur d'ordre 1. Pour $1 \leqq k < r - 1$, l'espace osculateur d'ordre k de la courbe au point P se trouve contenu dans l'espace osculateur d'ordre $k + 1$, qui est à $k + 1$ dimensions. Il existe, par conséquent, précisément une droite, passant par P, orthogonale au premier et contenue dans l'autre: c'est, par définition, la *k-ième normale* de la courbe au point P.

La notion de la tangente et des différents normales de la courbe conduit à la notion de *repère normal* attaché à la courbe dans son point P quelconque. Nous entendons par là un repère formé par r vecteurs uniteurs contenus respectivement dans la tangente et dans les différentes normales de la courbe au point P. Les vecteurs n_k $0 < k < r - 1$, d'un tel repère sont donc déterminés à des facteurs de la forme $e^{i\varphi_k}$ près, φ_k désignant des quantités réelles arbitraires. Si l'on pose $z = x + iy$, x, y réel, on peut choisir ces facteurs de manière que, les vecteurs unitaires en question soient de la forme $n_k = u_k(x, y) + i\,v_k(x, y)$, les $u_k{}^l$, $v_k{}^l$ étant des fonctions analytiques réelles des deux variables x, y.

6. A chaque point P de la courbe analytique considérée faisons

associer un repère normal $\boldsymbol{n}_k = \boldsymbol{u}_k(x, y) + i\,\boldsymbol{v}_k(x, y)$, $0 \leqq k < r-1$, de manière que les u_k^l, v_k^l soient des fonctions analytiques réelles des deux variables x, y. Les vecteurs $\boldsymbol{n}_k$ étant indépendants, chaque vecteur de l'espace est une combinaison linéaire de ces vecteurs. En particulier, les r composantes des vecteurs respectifs remplissent les équations de la forme

$$\begin{aligned} dM &= \tau^0 n_0 + \ldots + \tau^{r-1} n_{r-1}, \\ dn_k &= \tau_k^0 n_0 + \ldots + \tau_k^{r-1} n_{r-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

les τ étant, évidemment, des formes de Pfaff, en général complexes, en dx, dy. Ces formes sont assujeties à remplir certaines relations quadratiques, celles que l'on obtient en exprimant que, les convariants bilinéaires des seconds membres, dans les formules (5), sont nuls identiquement. Les relations en question sont

$$\begin{aligned} (\tau^k)' &= [\tau^0 \tau_0^k] + \ldots + [\tau^{r-1} \tau_{r-1}^k], \\ (\tau_l^k)' &= [\tau_l^0 \tau_0^k] + \ldots + [\tau_l^{r-1} \tau_{r-1}^k], \end{aligned} \tag{6}$$

quelsque soient les indices $k, l = 0, \ldots, r-1$. Remarquons que, à côté des formules (5) et (6) on a les formules analogues qui se déduisent des précédentes en remplaçant chaque quantité par la complexe conjuguée.

Les vecteurs $\boldsymbol{n}_k$ formant un repère normal associé au point P, les deux conditions suivantes sont satisfaites 1° les vecteurs $\boldsymbol{n}_k$ sont unitaires et mutuellement orthogonaux 2° pour $0 \leqq k \leqq r-1$ le vecteur $\boldsymbol{d}^{k+1}\boldsymbol{P}$ se trouve situé dans l'espace linéaire déterminé par les vecteurs $\boldsymbol{n}_0, \ldots, \boldsymbol{n}_k$. Inversement, les deux conditions citées expriment la propriété des vecteurs $\boldsymbol{n}_k$ de former un repère normal associé au point P. La condition 1° peut s'exprimer par la formule

$$(n_k, \bar{n}_l) = 0 \text{ pour } k \neq l, = 1 \text{ pour } k = l \quad (k, l = 0, \ldots, r-1). \tag{7}$$

Il en résulte

$$(dn_k, \bar{n}_l) + (n_k, d\bar{n}_l) = 0,$$

d'où, en vertu de (5) et (7),

$$\tau_k^l + \bar{\tau}_l^k = 0 \qquad (k, l = 0, \ldots, r-1). \tag{8}$$

On voit donc, en particulier, que les formes diagonales τ_k^k sont purement imaginaires. La condition 2°, à son tour, s'exprime par les équations identiques suivantes

$$\begin{aligned} &\tau^1 = \ldots = \tau^{r-1} = 0, \\ &\tau_k^{k+2} = \ldots = \tau_k^{r-1} = 0, \qquad (k = 0, \ldots, r-3). \end{aligned} \tag{9}$$

Les deux hypothèses 1° et 2° entraînent donc les relations (8), (9) entre les formes τ de sorte que, le système (5) est de la forme suivante

$$\begin{aligned} dP &= \tau^0 n_0, \\ dn_k &= -\bar{\tau}_{k-1}^k n_{k-1} + \tau_k^k n_k + \tau_k^{k+1} n_{k+1}, \quad (k = 0, \ldots, r-1) \end{aligned} \tag{10}$$

les termes avec n_{-1} et n_r étant à supprimer. Cette forme met en évidence qu'aucune des formes pfaffiennes

$$\tau^0;\ \tau_0{}^1,\ \tau_1{}^2, \ldots, \tau_{r-2}{}^{r-1}$$

n'est identiquement nulle, car autrement la courbe considérée n'appartient pas à l'espace K_r.

Tandis que les relations (8) n'entraînent pas des relations quadratiques nouvelles, celles, données par les formules (9) donnent, en vertu d'elles mêmes et de (8),

$$\begin{aligned}&[\tau^0\, \tau_0{}^1] = 0,\\ &[\tau_0{}^1\, \tau_1{}^2] = [\tau_1{}^2\, \tau_2{}^3] = \ldots = [\tau_{r-3}{}^{r-2}\, \tau_{r-2}{}^{r-1}] = 0.\end{aligned}$$

Or, comme aucune des formes τ figurant dans ces relations n'est identiquement nulle, les relations en question montrent qu'il existe des fonctions analytiques $\varrho_1, \ldots, \varrho_{r-1}$, en général complexes, non nulles, des deux variables réelles x, y, telles qu'on a identiquement

$$\tau_0{}^1 = \varrho_1 \tau^0,\ \tau_1{}^2 = \varrho_2 \tau^0, \ldots, \tau_{r-2}{}^{r-1} = \varrho_{r-1}\tau^0. \tag{11}$$

On peut, par conséquent, écrire les formules (10) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}&dP = \tau^0 n_0,\\ &dn_k = -\bar\varrho_k \tau^0 n_{k-1} + \tau_k{}^k n_k + \varrho_{k+1}\tau^0 n_{k+1}, \qquad (k = 0, \ldots, r-1)\end{aligned}$$

les termes avec n_{-1} et n_r étant à supprimer. Les formules (11) entraînent les relations quadratiques suivantes

$$\begin{aligned}&[\tau^0 (\frac{d\varrho_k}{\varrho_k} - \tau_0{}^0 - \tau_{k-1}{}^{k-1} + \tau_k{}^k)] = 0,\\ &[\tau^0 (\frac{d\bar\varrho_k}{\bar\varrho_k} - \bar\tau_0{}^0 - \bar\tau_{k-1}{}^{k-1} + \tau_k{}^k)] = 0. \qquad (k = 1, \ldots, r-1)\end{aligned} \tag{12}$$

Les formes τ et les fonctions ϱ qui figurent dans les formules précédentes dépendent du choix du repère normal attaché à la courbe. Prenons un autre repère normal, formé par des vecteurs $\boldsymbol{n}'_k = e^{i\varphi_k} \cdot \boldsymbol{n}_k$, les φ_k étant réels d'ailleurs arbitraires. Pour simplifier l'écriture, écrivons encore $\boldsymbol{n}_k$ au lieu de $\boldsymbol{n}'_k$ et τ^0 au lieu de $e^{-i\varphi_0}\tau^0$. Avec le nouveau repère normal les formules (10) deviennent

$$\begin{aligned}&dP = \tau^0 n_0,\\ &dn_k = -\bar\varrho_k e^{-i(\varphi_0 + \varphi_{k-1} - \varphi_k)}\tau^0 n_{k-1} + (i\, d\varphi_k + \tau_k{}^k) n_k +\\ &\qquad + \varrho_{k+1} e^{i(\varphi_0 + \varphi_k - \varphi_{k+1})}\tau_0 n_{k+1}, \qquad (k = 0, \ldots, r-1)\end{aligned} \tag{13}$$

les termes avec n_{-1} et n_r étant à supprimer. Pour disposer convenablement des quantités φ remarquons d'abord que, les formules (6), (8), (11) donnent

$$(\tau_k{}^k)' = (\varrho_k \varrho_k - \varrho_{k+1}\varrho_{k+1})\,[\tau^0\, \tau^0], \qquad (k = 0, \ldots, r-1)$$

les termes $\varrho_0 \bar{\varrho}_0$, $-\varrho_r \bar{\varrho}_r$ étant à supprimer. Par suite, la forme pfaffienne $\tau_0{}^0 + \tau_1{}^1 + \ldots + \tau_{r-1}{}^{r-1}$ est une différentielle exacte et, comme elle est purement imaginaire, on peut poser

$$\tau_0{}^0 + \tau_1{}^1 + \ldots + \tau_{r-1}{}^{r-1} = i\, d\Phi_0,$$

Φ_0 étant une fonction analytique réelle des deux variables x, y et elle n'est déterminée qu'à une constante additive près. Cela étant remarqué, posons $\varrho_k = R_k e^{i\Phi_k}$, $R_k > 0$, Φ_k réel, $k = 1, \ldots, r-1$, et choisissons les quantités φ suivant les formules

$$\begin{aligned} &\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{r-1} + \Phi_0 = 0, \\ &\varphi_0 + \varphi_{k-1} - \varphi_k + \Phi_k = 0. \qquad (k = 1, \ldots r-1). \end{aligned} \tag{14}$$

Ce choix est évidemment possible précisément d'une manière. Cela étant, posons

$$\tau_0 = \omega^1 + i\,\omega^2; \quad i\,d\varphi_k + \tau_k{}^k = i\,\tilde{\omega}^k, \qquad (k = 0, \ldots, r-1)$$

les ω et $\tilde{\omega}$ étant des formes réelles. Le choix en question entraîne que, les formules (13) sont les suivantes

$$\begin{aligned} &dP - (\omega^1 + i\omega^2)\, n_0, \\ &dn_k - -R_k(\omega^1 - i\omega^2)\, n_{k-1} + i\tilde{\omega}^k n_k + R_{k+1}(\omega^1 + i\omega^2)\, n_{k+1}, \quad (k = 0, \ldots r-1) \end{aligned}$$

les termes avec n_{-1} et n_r étant à supprimer. On a en outre la relation

$$\tilde{\omega}^0 + \tilde{\omega}^1 + \ldots + \tilde{\omega}^{r-1} = 0.$$

Les relations quadratiques (12), à leur tour, prennent la forme

$$\begin{aligned} &[(\omega^1 + i\,\omega^2)\,(\frac{dR_k}{R_k} - i\overline{\tilde{\omega}^0 + \tilde{\omega}^{k-1} - \tilde{\omega}_k})] = 0, \\ &[(\omega^1 - i\,\omega^2)\,(\frac{dR_k}{R_k} + i\overline{\tilde{\omega}^0 + \tilde{\omega}^{k-1} - \tilde{\omega}^k})] = 0, \qquad (k = 1, \ldots, r-1). \end{aligned}$$

On arrive ainsi au résultat suivant:

A toute courbe analytique dans l'espace K_r, appartenant à cet espace, on peut faire correspondre un système d'équations différentielles, complètement intégrable, de la forme suivante

$$\begin{aligned} &dP = (\omega^1 + i\omega^2)\, n_0, \\ &dn_k = -R_k(\omega^1 - i\omega^2)\, n_{k-1} + i\tilde{\omega}^k n_k + R_{k+1}(\omega^1 + i\omega^2)\, n_{k+1}, \\ &\qquad (k = 0, \ldots, r-1). \end{aligned} \tag{15}$$

les termes en n_{-1}, n_r étant à supprimer. Dans ces formules, les ω, $\tilde{\omega}$ désignent des formes de Pfaff réelles en deux variables indépendantes x, y telles que

$$\tilde{\omega}^0 + \tilde{\omega}^1 + \ldots + \tilde{\omega}^{r-1} = 0, \tag{16}$$

et les R désignent des fonctions analytiques réelles et positives de x, y. Les formes en question vérifient les relations quadratiques suivantes

$$
\begin{aligned}
&(\omega^1 + i\omega^2)' = \pm\, i\,[(\omega^1 \pm i\omega^2)\,\tilde{\omega}^0],\\
&(\tilde{\omega}^k)' = -\, i\,(R_k^2 - R_{k+1}^2)\,[(\omega^1 + i\omega^2)\,(\omega^1 - i\omega^2)];\\
&[(\omega^1 + i\omega^2)\,(\frac{dR_k}{R_k} - i\,\overline{\tilde{\omega}^0 + \tilde{\omega}^{k-1} - \tilde{\omega}_k})] = 0,\\
&[(\omega^1 - i\omega^2)\,(\frac{dR_k}{R_k} + i\,\overline{\tilde{\omega}^0 + \tilde{\omega}^{k-1} - \tilde{\omega}^k})] = 0,\\
&\qquad (k = 0, \ldots, r-1;\ R_0 = R_r = 0).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Le système (15) *est de sorte que, les coordonnées* $(P^k -)\,f^k(z)$ *de la courbe,* $z = x + iy$, *et les composantes* n_k^l *de* r *vecteurs formant un repère normal convenablement choisi, attaché à la courbe au point* P, *en font un système fondamental d'intégrales.*

Les formules (15) représentent une extension des formules de Frenet pour l'espace K_r. Nous appellerons les fonctions R qui y figurent encore *courbures scalaires* de la courbe analytique correspondante.

7. Nous allons élucider, à présent, la signification des courbures scalaires R d'une courbe analytique appartenant à l'espace K_r. Dans ce but remarquons qu'il y a précisément r formes hermitiennes associées à la forme fondamentale $(z, \bar{z})$ $\quad z^1\bar{z}^1 + \ldots + z^r\bar{z}^r$: la première, la deuxième etc. forme hermitienne associée. Etant donné, à côté des variables $z^1, \ldots, z^r$ que nous désignérons par $z_1^1, \ldots, z_1^r$, $r-1$ d'autres systèmes de variables $z_l^1, \ldots, z_l^r$ $(l = 2, \ldots, r)$, la $(1 <)\, k\, (\leq r)$-ième forme hermitienne associée H_k à la forme (z, z) est formée par les k premiers de ces systèmes et elle est définie par la formule

$$
H_k = \begin{vmatrix} (z_1, \bar{z}_1) & \ldots\ldots & (z_1, \bar{z}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (z_k, \bar{z}_1) & \ldots\ldots & (z_k, \bar{z}_k) \end{vmatrix}.
$$

Remarquons que, le second membre dans cette formule, est le produit des deux matrices

$$
\begin{Vmatrix} z_1^1 & \ldots\ldots & z_1^r \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ z_k^1 & \ldots\ldots & z_k^r \end{Vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Vmatrix} \bar{z}_1^1 & \ldots\ldots & \bar{z}_1^r \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \bar{z}_k^1 & \ldots\ldots & \bar{z}_k^r \end{Vmatrix}
$$

On a, en particulier, $H_1 = (z, \bar{z})$. On voit que, si par une substitution linéaire appliquée aux variables z^l et la substitution complexe conjuguée, appliquée aux $\bar{z}^l$, la forme $(z, \bar{z})$ reste inaltérée, par les mêmes substitutions linéaires, appliquées simultanément à chacun des systèmes de variables $z_l^1, \ldots z_l^r$ resp. $\bar{z}_l^1, \ldots, \bar{z}_l^r$ dont est formé H_k, cette forme H_k reste inaltérée.

Cela étant remarqué, revenons aux formules (15). Elles entraînent, évidemment, des relations telles que

$$d^k P \quad \chi_{k0}\, n_0 + \chi_{k1}\, n_1 + \dots + \chi_{k,\,k-1}\, n_{k-1}, \qquad (k = 1, \dots, r) \tag{18}$$

les χ étant des expressions différentielles; on a, en particulier,

$$\chi_{k,\,k-1} = R_0 R_1 \dots R_{k-1} (\omega^1 + i\omega^2)^k, \quad (k = 1, \dots, r; R_0 = 1). \tag{19}$$

On a en outre les relations analogues complexes conjuguées. Or, les formules (18) entraînent

$$\begin{vmatrix} (dP, d\overline{P}) & \dots\dots & (dP, d^k\overline{P}) \\ \vdots & & \vdots \\ (d^kP, d\overline{P}) & \dots & (d^kP, d^k\overline{P}) \end{vmatrix} = \chi_{10}\, \chi_{21} \dots \chi_{k,\,k-1} \cdot \overline{\chi}_{10}\, \overline{\chi}_{21} \dots \overline{\chi}_{k,k-1}. \tag{20}$$

Le premier membre dans cette formule est, manifestement,

$$H_k \cdot (dz dz)^{\frac{k(k+1)}{2}},$$

H_k étant la k-ième forme hermitienne associée à (z, z) formée avec les dérivées d'ordres $\leq k$ des coordonnées $P^i(z)$ de la courbe. D'autre part, comme la formule

$$P'.dz = (\omega^1 + i\omega^2)\, n_0$$

entraîne la relation

$$dz\, d\bar{z} = H_1^{-1} (\omega^1 + i\omega^2)(\omega^1 - i\omega^2),$$

on voit que, le premier membre en question est

$$H_k \cdot H_1^{-\frac{k(k+1)}{2}} (\omega^1 + i\omega^2)^{\frac{k(k+1)}{2}} (\omega^1 - i\omega^2)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Le second membre, à son tour, a la valeur, d'après (19),

$$(R_0^k R_1^{k-1} \dots R_{k-1})^2 (\omega^1 + i\omega^2)^{\frac{k(k+1)}{2}} (\omega^1 - i\omega^2)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

La formule (20) donne alors

$$H_k = H_1^{\frac{k(k+1)}{2}} [R_0^k R_1^{k-1} \dots R_{k-1}]^2, \qquad (k = 1, \dots, r; R_0 = 1). \tag{21}$$

Il en résulte facilement, pour chaque point de la courbe,

$$R_k^2 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{H_{k-1} \cdot H_{k+1}}{H_k^2}, \qquad (k = 1, \dots, r-1; H_0 = 1). \tag{22}$$

Le carré de la courbure scalaire R_k est une fonction rationnelle, donnée par (22), *de formes hermitiennes associées à la forme fondamentale, ces formes associées étant formées avec les dérivées d'ordres $\leqq k+1$ des coordonnées non-homogènes de la courbe.*

On peut déduire de la formule (22) une autre expression pour le carré de la fonction R_k, $k=1,\ldots,r-1$, ne faisant intervenir que les deux formes H_1, H_k. Soit, en effet, k un quelconque des nombres $1,\ldots,r-1$ et considérons le déterminant

$$H_{k+1}=\begin{vmatrix}(P',\bar{P}')\ldots\ldots\ldots\ldots(P',\bar{P}^{(k+1)})\\ (P^{(k+1)},\bar{P}')\ldots\ldots(P^{(k+1)},\bar{P}^{(k+1)})\end{vmatrix} \tag{23}$$

formé avec les dérivées d'ordres $\leq k+1$ des coordonnées non-homogènes de la courbe. Désignons par h_{11}; h_{12}; h_{21}; h_{22} les mineurs d'ordre k de ce déterminant, lesquels on obtient en supprimant, dans le déterminant considéré, la ligne et la colonne d'indice respectivement k, k; $k, k+1$; $k+1, k$; $k+1, k+1$. On a, en particulier, $h_{22}=H_k$ et, d'après un théorème bien connu, la relation suivante a lieu

$$H_{k-1}H_{k+1}=h_{11}\,.\,h_{22}-h_{12}\,.\,h_{21}. \tag{24}$$

Cela étant remarqué, désignons par les symboles $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ les opérations $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ de sorte que, si p. ex. f signifie une fonction analytique de la variable complexe $z=x+iy$, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. Or, en prenant pour définition de la fonction H_k un déterminant tel que (23), on obtient facilement la relation

$$\frac{\partial^2 \log H_k}{\partial z \partial \bar{z}}=\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}}{H_k^2},$$

d'où il résulte, en vertu de (24) et (22), la formule mentionnée

$$R_k^2=\frac{1}{4H_1}\left(\frac{\partial^2 \log H_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \log H_k}{\partial y^2}\right), \qquad (k=1,\ldots,r-1). \tag{25}$$

8. Considérons un système de fonctions analytiques 1; $P^1(z),\ldots$ $\ldots, P^r(z)$, de la variable $z=x+iy$, définies dans un domaine D, et supposons que, ces fonctions constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre $r+1$

$$(\mathfrak{A}) \qquad y^{(r+1)}+p_1(z)\,y^{(r)}+\ldots+p_r(z)\,y'=0, \tag{26}$$

les coefficients $p(z)$ étant, dans le domaine D, des fonctions analytiques et *uniformes* de la variable z. Supposons de plus que, l'équation $\mathfrak{A}$ jouit de la propriété que, son groupe de monodromie, appartenant au système fondamental en question, consiste de substitutions qui sont des déplacements de l'espace K_r.

Le déterminant Δ, d'ordre $r+1$, formé des fonctions considérées et de leurs dérivées d'ordres $\leqq r$ ne diffère évidemment pas du déterminant

$$|P^{1(k)},\ldots,P^{r(k)}|, \qquad (k=1,\ldots,r)$$

$P^{l(k)}$ désignant la dérivée d'ordre k de la fonction $P^l(z)$. D'après un théorème classique, la valeur du déterminant Δ est différente de zéro quelques soient les valeurs des fonctions $P^l(z)$ correspondant à la même valeur de z. On peut, par conséquent, interpréter les fonctions P comme les coordonnées non-homogènes d'une courbe analytique de l'espace K_r dont D est le domaine de définition. L'hypothèse faite au sujet du groupe de monodromie de l'équation $\mathfrak{A}$ entraîne, évidemment, que, les courbures scalaires de la courbe en question sont des fonctions *uniformes* dans le domaine D.

9. Pour avoir plus de clarté au sujet des formules (15) nous allons établier la composition de la forme pfaffienne $\omega^1 + i\omega^2$. Dans ce but remarquons d'abord que, le vecteur $\boldsymbol{n}_0$ étant, manifestement, de la forme

$$\boldsymbol{n}_0 = e^{-i\varphi}\sqrt{\frac{H_0}{H_1}}\,\boldsymbol{P}'(z), \qquad (H_0 = 1)$$

φ réel, on a

$$\omega^1 + i\omega^2 = e^{i\varphi}\sqrt{H_1}\,dz. \tag{27}$$

Les formules (15), (22), (27) montrent alors que, pour $k = 0, \ldots, r-1$, le vecteur $\boldsymbol{n}_k$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{P}'(z), \ldots, \boldsymbol{P}^{(k+1)}(z)$ de la forme

$$\boldsymbol{n}_k = \nu_{k1}\boldsymbol{P}'(z) + \nu_{k2}\boldsymbol{P}''(z) + \ldots + e^{-i(k+1)\varphi}\sqrt{\frac{H_k}{H_{k+1}}}\,\boldsymbol{P}^{(k+1)}(z). \tag{28}$$

D'autre part, la relation (16) exprime, évidemment, que le déterminant $|n_0{}^l, n_1{}^l, \ldots, n_{r-1}{}^l|$ a une valeur constante (nécéssairement de module égal à l'unité). Nous pouvons supposer, la quantité Φ_0 dans les formules (14) n'étant déterminée qu'à une constante additive près, que la valeur en question égale à 1. Les formules (28) entraînent alors la relation

$$F(z) = \sqrt{H_r}\,e^{i\frac{r(r+1)}{2}\varphi}, \tag{29}$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$F(z) = |(P^l)', (P^l)'', \ldots, (P^l)^{(r)}|.$$

Posons encore pour simplifier

$$\varrho = R_1{}^{r-1} R_2{}^{r-2} \ldots R_{r-1}. \tag{30}$$

Avec cette notation, on a, en vertu de la formule (21),

$$H_r = H_1{}^{\frac{r(r+1)}{2}}\varrho^2,$$

de sorte que, la relation (29) entraîne

$$\left(e^{i\varphi}\sqrt{H_1}\right)^{\frac{r(r+1)}{2}} = \varrho^{-1}F(z). \tag{31}$$

Il en résulte, d'après (27),

$$\omega^1 + i\omega^2 = (R_1^{r-1} R_2^{r-2} \dots R_{r-1})^{-\frac{2}{r(r+1)}} [F(z)]^{\frac{2}{r(r+1)}} dz.$$

Une première conséquence de cette formule est, évidemment, que la forme $\omega^1 + i\omega^2$ n'est pas déterminée sans ambiguïté *a priori.* On peut plutôt associer à l'élément initial de la courbe considérée une quelconque des $\frac{r(r+1)}{2}$ déterminations de la fonction $[F(z)]^{\frac{2}{r(r+1)}}$ pour fixer la forme $\omega^1 + i\omega^2$ dans le domaine entier de définition de la courbe analytique considérée. Une autre conséquence est la suivante qu'*on peut changer la variable indépendante de façon que, la forme* $\omega^1 + i\omega^2$ *correspondante soit*

$$\omega^1 + i\omega^2 = (R_1^{r-1} R_2^{r-2} \dots R_{r-1})^{-\frac{2}{r(r+1)}} dz. \tag{32}$$

En effet, la détermination de la fonction $[F(z)]^{\frac{2}{r(r+1)}}$ étant choisie, considérons l'élément de la fonction analytique

$$z' = \int_{z_1}^{z} [F(z)]^{\frac{2}{r(r+1)}} dz, \tag{33}$$

fourni par l'élément initial de la courbe. Soit $z = z(z')$ son élément inverse, cet élément étant par conséquent défini au voisinage de la valeur $z' = 0$. Les fonctions $P^\kappa[z(z')]$, $k = 1, \dots, r$, régulières au voisinage de la valeur $z' = 0$ et prenant pour $z' = 0$ les valeurs de l'élément initial, pour $z = z_0$, de la courbe analytique primitive, definissent un élément initial d'une courbe analytique dont z' est le paramètre. Cette courbe coïncide, évidemment, avec la courbe primitive et on a pour elle la formule (32), l'accent de la variable z' étant omis.

10. On sait que, si l'on se donne arbitrairement $r - 1$ fonctions positives et analytiques d'une variable réelle, définies dans le même interval, il y a dans l'espace euclidien réel à r dimensions une courbe analytique et une seule, à des déplacements de l'espace près, qui jouit de la propriété qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points de la courbe et les valeurs de ces fonctions, déterminées par la même valeur de la variable, telle que, les courbures scalaires, en tout point de la courbe, soient les valeurs correspondantes des fonctions données. Nous allons montrer qu'il y a d'analogie dans l'espace K_r. Mais, il est clair a priori que, si l'on se donne *arbitrairement* $r - 1$ fonctions positives et analytiques de deux variables réelles indépendantes, définies dans le même domaine, il n'y a pas, dans l'espace K_r de courbe analytique qui jouisse, par rapport a ces fonctions, de la propriété analogue à celle que nous venons de mentionner. Plutôt, pour qu'il en soit ainsi il faut que les fonctions données satisfassent à certaines conditions. Nous allons établir le théorème suivant qui donne du renseignement à ce sujet:

Pour qu'un système de $r-1$ fonctions positives et analytiques R_k $(k=1,\ldots,r-1)$ de deux variables réelles indépendantes, définies dans le même domaine, représente identiquement le système de courbures scalaires d'une courbe analytique de l'espace K_r, il faut et il suffit qu'après avoir effectué, au besoin, aux variables indépendantes une transformation conforme convenable, ce système satisfait aux équations différentielles suivantes.

$$\frac{\partial^2 \log R_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \log R_k}{\partial y^2}=$$
$$=2\left(R_1^{r-1}R_2^{r-2}\ldots R_{r-1}\right)^{\frac{4}{r(r+1)}}\cdot\left(-R_1^2+R_{k-1}^2-2R_k^2+R_{k+1}^2\right) \tag{34}$$
$$(k=1,\ldots,r-1;\ R_0=R_r=0).$$

Nous appelons *transformation conforme* une transformation telle que $x'=u(x,y)$, $y'=v(x,y)$ les fonctions u, v vérifiant les équations partielles de Cauchy-Riemann. Remarquons que, pour $r=2$ le système (34) se réduit à l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-8\,e^L$$

où l'on a posé $L=\log R_1^{\frac{4}{3}}$.

Montrons, au premier lieu que la condition énoncée dans le théorème, est nécéssaire. Considérons, dans ce but, une courbe analytique dans l'espace K_r, appartenant à cet espace, et désignons par $z=x+iy$ son paramètre. Pour ses courbures scalaires R_k, $k=1,\ldots,r-1$, on a les formules telles que (25). En comparant avec (22) on voit d'abord que, les formes hermitiennes H_k associées à la forme fondamentale, formées avec les dérivées d'ordres $\leqq k+1$ des coordonnées non-homogènes de la courbe, satisfont aux équations différentielles partielles suivantes[6]

$$\frac{\partial^2 \log H_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \log H_k}{\partial y^2}=4\,\frac{H_{k-1}\cdot H_{k+1}}{H_k^2}\quad (k=1,\ldots,r-1;\ H_0=1). \tag{35}$$

Il en résulte, encore d'après (22), les équations différentielles suivantes

$$\frac{\partial^2 \log R_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \log R_k}{\partial y^2}=2\,H_1\left(-R_1^2+R_{k-1}^2-2R_k^2+R_{k+1}^2\right) \tag{36}$$
$$(k=1,\ldots,r-1;\ R_0=R_r=0)$$

qui sont remplies par les fonctions R_k, H_1. Cela étant, remarquons que la formule (31) entraîne

$$H_1=\left(\frac{F}{\varrho}\cdot\frac{\overline{F}}{\varrho}\right)^{\frac{2}{r(r+1)}},$$

[6] A l'étude du système d'équations différentielles tel que (35) est consacré mon travail paru récemment dans les *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.*, Bd. 11, 1934, p. 65- 72.

de sorte que, par un changement du paramètre tel que (33), la forme H_1 se réduit à la fonction suivante

$$H_1 = (R_1{}^{r-1} R_2{}^{r-2} \dots R_{r-1})^{\frac{4}{r\,r+1)}}.$$

Cette dernière formule et la (36) conduisent à la relation (34) et la première partie du théorème se trouve établie.

Remarque. En regardant la formule (36) on pourrait penser qu'en effectuant, au besoin, un changement convenable du paramètre, on arrivera à une courbe analytique jouissant de la propriété que, la forme H_1 correspondante ait une valeur constante et par suite le système (36) se présente sous une forme particulièrement simple. Cependant, il résulte immédiatement de la formule (25) *qu'il n'existe pas dans l'espace K_r de courbe analytique, appartenant à cet espace, telle qu'une quelconque des formes H_k $(1 \leq k \leq r-1)$ correspondantes garde de valeur constante.*

Montrons à présent, au second lieu, que la condition du théorème est suffisante. Soit $R_k, k = 1, \dots, r-1$, un système de $r-1$ fonctions positives et analytiques de deux variables indépendantes telles qu'après avoir effectué, au besoin, aux variables indépendantes une transformation conforme convenable, ce système satisfait aux équations différentielles (34). Nous supposons défini les fonctions R_k par des éléments formés de séries infinies en puissances entières de $x - x_0, y - y_0$, absolument convergentes. Posons alors $z = x + iy$ et formons avec les fonctions R_k la forme pfaffienne (32). Il s'agit, au fond, de faire voir qu'on peut définir d'autres formes pfaffiennes $\tilde{\omega}^0, \dots, \tilde{\omega}^{r-1}$ en x, y à coefficients réguliers au voisinage de x_0, y_0, réelles, et de sorte que les relations (16), (17) aient lieu identiquement. En effet, supposons qu'on a trouvé de telles formes. Le système d'équations différentielles (15) formé avec ces formes $\omega^1 + i\omega^2$, $\tilde{\omega}$ et les fonctions R_k considérées est complètement intégrable, car les relations (17) en représentent les conditions d'intégrabilité et elles sont vérifiées identiquement d'après l'hypothèse. Il existe, par conséquent, un système fondamental d'intégrales analytiques du système (15), qui sont régulières au voisinage de $x = x_0$, $y - y_0$ et dont $P = 1, n_k = 0$ est une intégrale particulière. Si $P^k(x, y), 1 < k \leq r$, sont les autres fonctions P du système considéré, elles vérifient identiquement, comme le montre la première équation (15), la relation $\frac{\partial P^k}{\partial \bar{z}} = 0$ et par conséquent ces fonctions sont des éléments de fonctions analytiques de la variable complexe z. La courbe analytique, définie par ces éléments dans un domaine de définition, appartient alors à l'espace K_r et ses courbures scalaires sont précisément les fonctions considérées R_k.

Cela étant, on a d'abord, manifestement,

$$\frac{dR_k}{R_k} = \frac{\partial \log R_k}{\partial z}(dx + idy) + \frac{\partial \log R_k}{\partial z}(dx - idy).$$

S'il existe donc des formes $\tilde{\omega}$ joussant des propriétés voulues, on a d'après (16), (17),

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}^0+\tilde{\omega}^1+\ldots+\tilde{\omega}^{r-1}=0,\\ \tilde{\omega}^0+\tilde{\omega}^{k-1}-\tilde{\omega}^k=i\left(\frac{\partial \log R_k}{\partial z}\,dz-\frac{\partial \log R_k}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}\right);\quad (k=1,\ldots,r-1).\end{gathered}\tag{37}$$

Or, ce système est résoluble par rapport aux $\tilde{\omega}^k$, $0<k\leq r-1$, et on trouve, en particulier,

$$\tilde{\omega}^0=\frac{2\,i}{r\,(r+1)}\left(\frac{\partial \log \varrho}{\partial z}\,dz-\frac{\partial \log \varrho}{\partial \bar{z}}\,dz\right),\tag{38}$$

où l'on s'est servi de la notation (30). On voit donc qu'il existe précisément un système de formes $\tilde{\omega}^k$, $0\leq k<r-1$, à coefficients réguliers au voisinage de x_0, y_0 et vérifiant les relations (16), ($17_{3,4}$). Il ne s'agit donc à présent que de fair voir que, pour les formes $\omega^1+i\omega^2$, $\tilde{\omega}^k$ ainsi définies les relations ($17_{1,2}$) ont lieu. Or, la première de ces relations résulte immédiatement des formules (32) et (38). Quant aux autres, on déduit facilement des formules (37) et (38), en tenant compte de l'hypothèse que les fonctions R_k satisfont aux équations différentielles (34),

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}^{0\prime}-iR_1^2\,[(\omega^1+i\omega^2)\,(\omega^1-i\omega^2)],\\ (\tilde{\omega}^k-\tilde{\omega}^{k-1})'=i\,(R_{k-1}^2-2\,R_k^2+R_{k+1}^2)\,[(\omega^1+i\omega^2)\,(\omega^1-i\omega^2)]\\ (k-1,\ldots,r-1;\,R_0=R_r=0),\end{gathered}$$

et cela sont précisément les relations requises.

Remarque. Le raisonnement précédent montre que la donnée des courbures scalaires $R_k\,(x,y)$ détermine la courbe analytique correspondante à des déplacements

$$F^k=a_{k0}+a_{k1}f^1+\ldots+a_{kr}f^r\qquad (k=1,\ldots,r)\tag{39}$$

de l'espace K_r près. Les coordonnées non-homogènes de la courbe en question (avec l'intégrale banale $1;\,0,\ldots,0$) constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle ordinaire $\mathfrak{A}$ de la forme (26), équivalente au système (15), les coefficients $p\,(z)$ de cette équation étant des fonctions analytiques de la variable complexe $z=x+iy$, composées rationnellement des fonctions R_k et leurs dérivées partielles par rapport à x, y. Remarquons de plus que le théorème de ce n° entraîne qu'*il n'y a pas de courbe analytique de l'espace K_r dont toutes les courbures scalaires soient des constantes.* En effet, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les équations

$$-R_1^2+R_{k-1}^2-2\,R_k^2+R_{k+1}^2=0,$$

écrites pour $k=1,\ldots,r-1$, soient satisfaites par des constantes positives R_k^2 convenables. On constate cependant facilement que ces équations sont linéairement indépendantes.

11. Nous allons terminer ce Chapitre par les remarques suivantes. Si les coordonnées non-homogènes $f^i(z)$ d'une courbe analytique sont des fonctions *uniformes* de z dans le domaine de définition de la courbe, les courbures scalaires correspondantes R_k sont, manifestement, elles mêmes des fonctions uniformes dans le même domaine. Ces courbures scalaires R_k appartiennent aussi à toute courbe analytique de l'espace K_r dont les coordonnées non-homogènes se déduisent de celles de la courbe $f^i(z)$ par un déplacement de l'espace tel que (39). Si l'on prend, inversement, une solution analytique positive du système (34) quelconque, qui est uniforme dans un domaine D du plan (x, y), il lui correspond, d'après la remarque fait à la fin du n⁰ précédent, des courbes analytiques définis dans le domaine D et se déduisant l'une de l'autre par des déplacements de l'espace K_r. Les coordonnées non-homogènes d'une quelconque de ces courbes constituent (avec l'intégrale banale $y = 1$) un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle $\mathcal{R}$, telle que (26), à coefficients uniformes dans le domaine D. Ces coordonnées, cependant, ne sont pas nécéssairement uniformes dans le domaine D mais tous les éléments de la courbe déterminés par le même point (x, y) du domaine D se déduisent d'un d'entre eux par des déplacements de l'espace K_r. Autrement dit, le groupe de monodromie de l'équation différentielle $\mathcal{R}$ en question, correspondant à des chemins situés dans le domaine D, consiste de substitutions qui sont des déplacements de l'espace K_r. Si l'on considère, par exemple, la courbe analytique qui se déduit d'un élément initial formé par les différentes déterminations w satisfaisant à une équation algébrique irréductible $F(w, z)$ 0, d'ordre r par rapport à w, les courbures scalaires d'une telle courbe sont des fonctions uniformes de x, y $(z = x + iy)$. Car les fonctions d'un élément quelconque d'une telle courbe se permutent entre elles et par conséquent subissent des déplacements de l'espace K_r quand la variable z décrit un chemin fermé situé dans le domaine de définition de la courbe.