Otakar Borůvka
O jistých typech ploch, jež lze projektivně v sebe deformovati

Spisy přír. fak. MU, č. 43, 1924, 22 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500048

SPISY VYDÁVANÉ PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU MASARYKOVY UNIVERSITY REDAKTOR	PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ MASARYK RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1924 Čís. 43

O JISTÝCH TYPECH PLOCH, JEŽ LZE PROJEKTIVNĚ V SEBE DEFORMOVATI

(SUR CERTAINS TYPES DE SURFACES QUI SONT PROJECTIVEMENT APPLICABLES SUR ELLES MÊMES.)

NAPSAL

O. BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ	EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

O JISTYCH TYPECH PLOCH, JEŽ LZE PROJEKTIVNĚ V SEBE DEFORMOVATI.

(AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS.)

Mezi dvěma plochami (S) a (Σ) budiž taková jednojednoznačná koresdondence bodová, že dvěma odpovídajícím bodům plochy (S) a (Σ) odpovídají tytéž křivočaré souřadnice x, y; předpokládejme, že dva odpovídající body splývají v bodě 0. Mají-li pak také první a druhé derivace dle x a y nehomogenních souřadnic obou ploch v tomto bodě tytéž hodnoty, pravíme, že obě plochy mají v bodě 0 analytický dotyk řádu druhého*.

Jsou-li M (na ploše (S)) a P (na ploše (Σ)) libovolné dva body sobě odpovídající a existuje-li projektivní transformace plochy (Σ), která ji převádí v (Σ') a zvláště bod P v $P' \equiv M$, v němž obě plochy (S) a (Σ') mají analytický dotyk řádu druhého, pravíme, že lze obě plochy na sebe projektivně deformovati**.

Je-li možno na ploše (S) vytknouti takovou jednojednoznačnou korespondenci bodovou, že jsou-li $M(x, y)$ a $P(x', y')$ libovolné dva body sobě odpovídající, existuje projektivní transformace převádějící plochu (S) v (S') a zvláště bod P v $P' \equiv M$, v němž obě plochy (S) a (S') mají analytický dotyk řádu druhého, pravíme, že lze plochu (S) projektivně deformovati v sebe.

Aby bylo možno dvě plochy projektivně na sebe deformovati, jest k tomu dle Fubiniova theorému* nutné a stačí, aby existovala mezi nimi bodová korespondence, převádějící poměr dvou diferenciálních forem $\frac{\psi}{\varphi}$ příslušný k jedné ploše v poměr analogický, příslušný ku ploše druhé. Při tom jest forma φ kvadratická, která porovnána s nulou dává rovnici asymptotických čar na ploše, kdežto forma ψ jest kubická, jež annulována značí diferenciální rovnici čar Darbouxových. Plochy, jež lze projektivně v sebe deformovati, studoval *E. Cartan* v pojednání „Sur la déformation projective des surfaces"***. Našel, že všechny nepřímkové plochy, jež lze projektivně v sebe ∞^2 způsoby deformovati, patří mezi plochy asymptoticko-isothermické a závisí nejvýše na dvou libovolných konstantách. Existují tři typy takových ploch, charakterisované různými konstantními hodnotami jistých invariantů k těmto plochám příslušných.

* G. Fubini, Applicabilita proiettiva di due superficie (Rendiconti del Circolo matem. di Palermo t. XLI, 1916).

** Lze tudíž na př. každé dvě kolineární plochy projektivně na sebe deformovati.

*** Annales de l'école normale supérieure, sér. 3. t. XXXVII. (1920), p. 259—356.

Deformace v sebe, t. j. dle hořejší definice projektivní deformace plochy (S) v sebe v úvahu přicházející korespondence vždy dvou bodů na ploše, závisí u jedné skupiny ploch dvou typů na dvou parametrech a jest dána vzorci $x' = ax + b$, $y' = ay + b$; u ploch druhé skupiny jsou z těchto deformací některé (jež odpovídají hodnotě $a = 1$) kolineacemi v sebe a konečně všechny projektivní deformace v sebe (dané týmiž vzorci) ploch třetí skupiny jsou kolineacemi v sebe. Deformace v sebe ploch typu třetího dány jsou u jedné skupiny ploch vzorci $x' = \varepsilon x + a$, $y' = \varepsilon^2 y + b$ a $x' = \varepsilon y + a$ a $y' = \varepsilon^2 x + b$ $(\varepsilon^3 = 1)$; plochy skupiny druhé jsou tetraedrální o rovnici $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = 1$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0)$, jež, jak známo, připouštějí pouze ∞^2 kolineací v sebe.

Všechny tyto plochy jsou v uvedeném Cartanově pojednání určeny v podstatě systémem lineárních parciálních diferenciálních rovnic řádu čtvrtého. Systémy, určující plochy, při nichž grupa projektivních deformací v sebe závislá na dvou parametrech obsahuje subgrupu kolineací v sebe a ty, při nichž všechny projektivní deformace v sebe jsou kolineacemi, jsou velmi speciální, a sice tak, že koeficienty jejich jsou funkcemi pouze rozdílu obou neodvisle proměnných. Takové systémy jest možno nahraditi podle obecné metody, kterou mi sdělil p. prof. *E. Čech*, systémy jednoduššími, jež lze po případě integrovati. Provedl jsem z jeho podnětu touto metodou integraci příslušných systémů* a určil tím konečné rovnice uvažovaných ploch; pouze v jednom případě ploch, při nichž grupa deformací v sebe závislá na dvou parametrech obsahuje subgrupu kolineací v sebe, nelze integraci příslušného systému elementárně provésti, neboť počet vede na diferenciální rovnici řádu druhého se dvěma regulárními a jedním irregulárním singulárním bodem.

1. Výklad obecné integrační metody jistého typu systémů parciálních diferenciálních rovnic**.

Budiž dán systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial x} &= a_{i1} A_1 + a_{i2} A_2 + a_{i3} A_3 + a_{i4} A_4 \\ \frac{\partial A_i}{\partial y} &= a'_{i1} A_1 + a'_{i2} A_2 + a'_{i3} A_3 + a'_{i4} A_4 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (1)$$

v němž a_{ik} a a'_{ik} jsou funkcemi neodvisle proměnných x a y. Buďtež splněny podmínky integrability tohoto systému $\frac{\partial a_{ik}}{\partial y} - \frac{\partial a'_{ik}}{\partial x} = \sum_{\alpha=1}^{4} (a_{\alpha k} a'_{i\alpha} - a_{i\alpha} a'_{\alpha k})$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ a předpokládejme, že známe a priori lineární substituci B

$$B_i = b_{i1} A_1 + b_{i2} A_2 + b_{i3} A_3 + b_{i4} A_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (2)$$

* Jeden z nich jest velmi jednoduchý a lze jej bezprostředně integrovati kvadraturami (str. 16).

** Pouze pro jednoduchost uvažován jest systém řádu čtvrtého.

o koeficientech b_{ik}, jež jsou obecně funkcemi x, y (nikoliv všechny rovny nule), takovou, že jsou-li A_i partikulárním řešením systému (1), jsou jeho řešením také formy B_i. Předpokládejme dále pro jednoduchost* že charakteristická rovnice substituce B má jenom jednoduché kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Pak existují lineárně neodvislé formy

$$U_i = u_{i1} A_1 + u_{i2} A_2 + u_{i3} A_3 + u_{i4} A_4 \tag{3}$$

takové, že zavedeme-li v nich na místě A_i jejich lineární kombinace (2), nabudou hodnoty $\lambda_i U_i$ (kanonický tvar substituce (2)); tedy

$$\lambda_i U_i = u_{i1} B_1 + u_{i2} B_2 + u_{i3} B_3 + u_{i4} B_4. \tag{3'}$$

Dokážeme, že λ_i jsou konstanty. Jsou-li $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}$ čtyři lineárně neodvislá řešení uvažovaného systému (1), jest možno vyjádřiti funkce A_i, B_i, jakožto partikulární řešení téhož systému, pomocí konstant α_i, β_i vzorci

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_1 A_{i1} + \alpha_2 A_{i2} + \alpha_3 A_{i3} + \alpha_4 A_{i4} \\ B_i &= \beta_1 A_{i1} + \beta_2 A_{i2} + \beta_3 A_{i3} + \beta_4 A_{i4} \end{aligned} \tag{4}$$

anebo krátce

$$\begin{aligned} A_i &= (\alpha_i) \\ B_i &= (\beta_i) \end{aligned} \quad \text{(substituce } S). \tag{4'}$$

Z druhé rovnice pak ihned vyplývá

$$\beta_i = (B_i) \qquad (S^{-1})$$

a tudíž dle rovnic (2)

$$\beta_i = (A_i) \qquad (S^{-1} B).$$

Vychází tedy pomocí první rovnice (4')

$$\beta_i = (\alpha_i) \qquad (S^{-1} B S).$$

Koeficienty této substituce $T = S^{-1} B S$, t_{ik}, jsou konstantní; neboť kdyby tomu pro některé t_{ik} tak nebylo, vedla by rovnice

$$\beta_i = t_{i1} \alpha_1 + t_{i2} \alpha_2 + t_{i3} \alpha_3 + t_{i4} \alpha_4 \tag{5}$$

při zvolených $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_4$, $\alpha_k \neq 0$, k nemožnému důsledku $\dfrac{\beta_i}{\alpha_k} = t_{ik}$. Jsou tedy také konstantní kořeny charakteristické rovnice této substituce a tudíž také kořeny charakteristické rovnice substituce B.

Z tohoto poznatku snadno vychází, že za učiněných předpokladů jest možno nahraditi daný systém (1) systémem jednodušším, který lze integrovati kvadraturami. Neboť s ohledem na předpoklad, že funkce A_i i B_i hoví témuž systému (1), obdržíme derivací rovnic (3) a (3'), na př. dle x

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x} &= \bar{u}_{i1} A_1 + \bar{u}_{i2} A_2 + \bar{u}_{i3} A_3 + \bar{u}_{i4} A_4 \\ \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x} &= \bar{u}_{i1} B_1 + \bar{u}_{i2} B_2 + \bar{u}_{i3} B_3 + \bar{u}_{i4} B_4 \end{aligned} \tag{6}$$

---

* Tento předpoklad bude v dalším zobecněn.

kdež

$$\bar{u}_{ik} = \frac{\partial u_{ik}}{\partial x} + u_{i1} a_{1k} + u_{i2} a_{2k} + u_{i3} a_{3k} + u_{i4} a_{4k};$$

nahradíme-li pak v těchto rovnicích A_i a B_i lineárními kombinacemi v U_i, jež určíme z (3) a (3′), obdržíme současně platné rovnice

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} = v_{i1} U_1 + v_{i2} U_2 + v_{i3} U_3 + v_{i4} U_4$$

$$\lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = \lambda_1 v_{i1} U_1 + \lambda_2 v_{i2} U_2 + \lambda_3 v_{i3} U_3 + \lambda_4 v_{i4} U_4$$

a analogicky

$$\frac{\partial U_i}{\partial y} = v'_{i1} U_1 + v'_{i2} U_2 + v'_{i3} + v'_{i4} U_4$$

$$\lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial y} = \lambda_1 v'_{i1} U_1 + \lambda_2 v'_{i2} U_2 + \lambda_3 v'_{i3} U_3 + \lambda_4 v'_{i4} U_4.$$

Z nich vychází, poněvadž začáteční hodnoty funkcí U_i mohou býti libovolné,

$$v_{ik} = v'_{ik} = 0 \quad \text{pro } k \neq i.$$

Neboť kdyby na př. některé v_{ik} $(k \neq i)$ nebylo identicky rovno nule a na př. v bodě x_o, y_o nabývalo hodnoty $v_{ik}^{(o)} \neq 0$, vedla by rovnice

$$(\lambda_i - \lambda_1) v_{i1} U_1 + \ldots + (\lambda_i - \lambda_{i-1}) v_{i,\, i-1} U_{i\ 1} +$$
$$+ (\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_{i,\, i+1} U_{i+1} + \ldots + (\lambda_i - \lambda_4) v_{i4} U_4 = 0$$

při zvolených počátečních hodnotách

$$U_1^{(o)} = U_2^{(o)} = \ldots = U_{k-1}^{(o)} = U_{k+1}^{(o)} = \ldots = U_4^{(o)} = 0; \quad U_k^{(o)} = 1$$

k důsledku

$$v_{ik}^{(o)} = 0,$$

proti předpokladu.

Vychází tudíž, že funkce U_i lze určiti kvadraturami a tedy že jest možno daný systém (1) snadně integrovati; neboť ze známých funkcí U_i určí se hledané funkce A_i pomocí rovnic (3).

Bylo posud pro jednoduchost předpokládáno, že charakteristická rovnice substituce B má jenom jednoduché kořeny. Je-li nyní obecně λ_i l_i- násobným kořenem charakteristické rovnice substituce B a patří-li v charakteristické funkci substituce B k základu $\lambda - \lambda_i$

$r_1^{(i)}$ elementárních dělitelů $(\lambda - \lambda_i)^1$
$r_2^{(i)}$ „ „ $(\lambda - \lambda_i)^2$
. . . .
$r_e^{(i)}$ elementárních dělitelů $(\lambda - \lambda_i)^e$

a dosadíme-li

$$\varrho_1^{(i)} = r_1^{(i)} + r_2^{(i)} + \ldots\ldots\ldots + r_e^{(i)}$$
$$\varrho_2^{(i)} = \qquad r_2^{(\ )} + \ldots\ldots\ldots + r_e^{(i)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varrho_e^{(i)} = \qquad\qquad\qquad r_e^{(i)}$$

jest možno nalézti $\varrho_1^{(i)} + \varrho_2^{(i)} + \ldots + \varrho_e^{(i)} = l_i$ lineárně neodvislých forem

$$U_{\alpha\beta}^{(i)} = u_{\alpha\beta 1}^{(i)} A_1 + u_{\alpha\beta 2}^{(i)} A_2 + u_{\alpha\beta 3}^{(i)} A_3 + u_{\alpha\beta 4}^{(i)} A_4 \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots e \\ \beta = 1, 2, \ldots \varrho_\alpha^{(i)} \end{pmatrix} \tag{7}$$

takových, že zavedeme-li u nich na místě A_i jejich lineární kombinace (2), nabudou hodnoty $\lambda_i U_{\alpha\beta}^{(i)} + U_{\alpha-1,\beta}^{(i)}$ $(U_{o\beta}^{(i)} = 0$. Nebudeme zde obecně vyšetřovati, jak se zjednoduší příslušný systém diferenciálních rovnic, určující funkce $U_{\alpha\beta}^{(i)}$, nýbrž provedeme v dalším každém specielním případě příslušnou úvahu zvláště. Určíme-li integrací tohoto zjednodušeného systému funkce $U_{\alpha\beta}^{(i)}$, určíme také snadno pomocí rovnic (7) hledané funkce A_i.

Uvedené metody k nahrazení daného systému diferenciálních rovnic systémem jednodušším lze zvláště použíti, jsou-li koeficienty daného systému a_{ik}, a'_{ik} funkcemi pouze rozdílu nebo součtu obou neodvisle proměnných; neboť pak, hoví-li danému systému funkce $A_i(x, y)$, hoví mu také $A_i(x+c, y+c)$ resp. $A_i(x+c, y-c)$ a rovněž

$$\left.\frac{\partial A_i(x+c, y+c)}{\partial c}\right|_{c=0} \quad \text{resp.} \quad \left.\frac{\partial A_i(x+c, y-c)}{\partial c}\right|_{c=0}.$$

Obdržíme tudíž ihned v prvním případě

$$B_i = (a_{i1} + a'_{i1}) A_1 + (a_{i2} + a'_{i2}) A_2 + (a_{i3} + a'_{i3}) A_3 + (a_{i4} + a'_{i4}) A_4 \tag{2'}$$

a v případě druhém

$$B_i = (a_{i1} - a'_{i1}) A_1 + (a_{i2} - a'_{i2}) A_2 + (a_{i3} - a'_{i3}) A_3 + (a_{i4} - a'_{i4}) A_4. \tag{2'}$$

2. Systémy určující plochy, které připouštějí grupu ∞^2 projektivních deformací v sebe, z nichž některé jsou kolineacemi.

I. typ.

V citovaném Cartanově pojednání určeny jsou plochy prvního typu, které připouštějí grupu projektivních deformací v sebe, z nichž některé jsou pouhými kolineacemi v sebe, následujícím systémem diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11} A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\ dA_2 &= \omega_{21} A_1 + \omega_{22} A_2 + \omega_{23} A_3 + \omega_{24} A_4 \\ dA_3 &= \omega_{31} A_1 + \omega_{32} A_2 + \omega_{33} A_3 + \omega_{34} A_4 \\ dA_4 &= \omega_{41} A_1 + \omega_{42} A_2 + \omega_{43} A_3 + \omega_{44} A_4; \end{aligned} \tag{8}$$

při tom jsou ω lineární diferenciální formy dané rovnicemi

$$\omega_2 = \beta \frac{dx}{x-y}; \quad \omega_3 = -\alpha \frac{dy}{x-y}; \quad \omega_{23} = \omega_{34} = \omega_2; \quad \omega_{24} = \omega_{32} = \omega_3$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{22} - \omega_{11} &= 2\,\alpha\omega_2 + \beta\omega_3 \\
\omega_{33} - \omega_{11} &= \alpha\omega_2 + 2\,\beta\omega_3 \\
\omega_{44} - \omega_{11} &= 3\,\alpha\omega_2 + 3\,\beta\omega_3\,. \\
\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} &= 0
\end{aligned}
\tag{8'}
$$

$$
\omega_{21} = \omega_{43} = \lambda\omega_2\,;\ \omega_{31} = \omega_{42} = \varrho\omega_3\,;\ \omega_{41} = \varrho\omega_2 + \lambda\omega_3\,;\ \lambda = \beta\,(x-y)^2\,;\ \varrho = \alpha\,(x-y)^2.
$$

α, β jsou konstanty vázané relací $\alpha\beta = 1$. Vypočteme-li z těchto rovnic ω_{ik} a dosadíme-li je do systému (8), obdržíme s ohledem na rovnici

$$
dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A_i}{\partial y}\,dy
$$

porovnáním koeficientů při dx a dy následující systém parciálních diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_1 + \beta\frac{1}{x-y}A_2 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= \beta^2(x-y)A_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_2 + \beta\frac{1}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_3}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_3 + \beta\frac{1}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_4}{\partial x} &= (x-y)A_1 + \beta^2(x-y)A_3 + \frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= \frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_1 - \alpha\frac{1}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_2 - \alpha\frac{1}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} &= -\alpha^2(x-y)A_1 - \alpha\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_4}{\partial y} &= -(x-y)A_1 - \alpha^2(x-y)A_2 - \frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_4
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Koeficienty tohoto systému jsou funkcemi pouze rozdílu obou proměnných x a y; jest tedy možno použíti integrační metody, jak byla vyložena v odstavci předešlém. Nalezneme snadno dle (2'), že jsou-li A_1, A_2, A_3, A_4 partikulárním řešením tohoto systému, jsou jeho řešením také jejich lineární kombinace

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \beta\frac{1}{x-y}A_2 - \alpha\frac{1}{x-y}A_3 \\
B_2 &= \beta^2(x-y)A_1 + \frac{1}{x-y}A_2 + \beta\frac{1}{x-y}A_3 - \alpha\frac{1}{x-y}A_4 \\
B_3 &= -\alpha^2(x-y)A_1 - \alpha\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{1}{x-y}A_3 + \beta\frac{1}{x-y}A_4 \\
B_4 &= -\alpha^2(x-y)A_2 + \beta^2(x-y)A_3
\end{aligned}
\tag{10}
$$

určující substituci B, jejíž charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{\beta}{x-y} & -\dfrac{\alpha}{x-y} & 0 \\ \beta^2(x-y) & \dfrac{1}{x-y}-\lambda & \dfrac{\beta}{x-y} & -\dfrac{\alpha}{x-y} \\ -\alpha^2(x-y) & -\dfrac{\alpha}{x-y} & -\dfrac{1}{x-y}-\lambda & \dfrac{\beta}{x-y} \\ 0 & -\alpha^2(x-y) & \beta^2(x-y) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

má kořeny

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} \\ \lambda_2 &= -\alpha^{\frac{3}{2}} - \beta^{\frac{3}{2}} \\ \lambda_3 &= \alpha^{\frac{3}{2}} - \beta^{\frac{3}{2}} \\ \lambda_4 &= -\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Vyplývá tudíž z předchozích vývodů, že systém, jímž daný systém (9) nahradíme, bude lze integrovati kvadraturami.

Podle obecné metody* obdržíme po delším, zde neuváděném, počtu kanonický tvar substituce (10)

$$\begin{aligned} U_1 &= [\beta^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_1 + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{x-y}[\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_2 + \\ &+ \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{x-y}[\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} - 2(x-y)]A_3 + \frac{1}{(x-y)^2}[\beta^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} - 2(x-y)]A_4 \\ U_2 &= [\beta^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_1 + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{x-y}[-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} - 2(x-y)]A_2 + \\ &+ \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{x-y}[-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} - 2(x-y)]A_3 + \frac{1}{(x-y)^2}[\beta^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_4 \qquad (11) \\ U_3 &= [-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_1 + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{x-y}[-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_2 + \\ &+ \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{x-y}[-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_3 + \frac{1}{(x-y)^2}[-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_4 \\ U_4 &= [-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_1 + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{x-y}[\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} - 2(x-y)]A_2 + \\ &+ \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{x-y}[\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} + 2(x-y)]A_3 + \frac{1}{(x-y)^2}[-\beta^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{3}{2}} - 2(x-y)]A_4 \end{aligned}$$

a vyjádříme-li z těchto rovnic funkce A_i pomocí U_1, U_2, U_3, U_4

---

* Srovn. na př. J. Horn Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (1905), str. 72.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{8(x-y)}\,[U_1 + \frac{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}\,U_2 + \\
&\quad + \frac{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}\,U_3 + U_4] \\
A_2 &= \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{8}\,[U_1 - U_2 + U_3 - U_4] \\
A_3 &= \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{8}\,[-U_1 - \frac{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}\,U_2 + \\
&\quad + \frac{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}\,U_3 + U_4] \\
A_4 &= \frac{x-y}{8}\,[-U_1 + \frac{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}\,U_2 + \\
&\quad + \frac{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}\,U_3 - U_4]
\end{aligned}
\tag{11'}
$$

Derivací rovnic (11) na př. dle x obdržíme, nahradíme-li po derivování na pravých stranách funkce $\frac{\partial A_i}{\partial x}$ příslušnými lineárními formami v A_i, jak jsou dány systémem (9) a vyjádříme-li konečně A_i podle rovnic (11') příslušnými výrazy v U_i, jednoduchý systém

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial x} &= [\beta^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(x-y)}]\,U_1 \\
\frac{\partial U_1}{\partial x} &= [-\beta^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(x-y)} + \frac{2}{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}]\,U_2 \\
\frac{\partial U_3}{\partial x} &= [\beta^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(x-y)} + \frac{2}{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}]\,U_3 \\
\frac{\partial U_4}{\partial x} &= [-\beta^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(x-y)}]\,U_4
\end{aligned}
\tag{12}
$$

a analogicky

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial y} &= [\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(x-y)}]\,U_1 \\
\frac{\partial U_2}{\partial y} &= [\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(x-y)} - \frac{2}{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}]\,U_2 \\
\frac{\partial U_3}{\partial y} &= [-\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(x-y)} - \frac{2}{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}]\,U_3 \\
\frac{\partial U_4}{\partial y} &= [-\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(x-y)}]\,U_4.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Integrací snadno nalezneme

$$
\begin{aligned}
U_1 &= k_1 \frac{e^{\beta^{\frac{3}{2}}x+\alpha^{\frac{3}{2}}y}}{\sqrt{x-y}} \\
U_2 &= k_2\, e^{-\beta^{\frac{3}{2}}x+\alpha^{\frac{3}{2}}y}\, \frac{2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-y}} \\
U_3 &= k_3\, e^{\beta^{\frac{3}{2}}x-\alpha^{\frac{3}{2}}y}\, \frac{2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-y}} \\
U_4 &= k_4 \frac{e^{-\beta^{\frac{3}{2}}x-\alpha^{\frac{3}{2}}y}}{\sqrt{x-y}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

při čemž k_1, k_2, k_3, k_4 jsou integrační konstanty.

Dosazením těchto výrazů do rovnic (11′) obdržíme hledané funkce A_i. Z nich má A_1 zvláštní geometrický význam, a značí, udělíme-li integračním konstantám k_1, k_2, k_3, k_4 hodnoty $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$ v jistém systému souřadném i-tou homogenní souřadnici bodu na uvažované ploše ($|k_k^{(i)}| \neq 0$). Můžeme zvláště uděliti konstantám $k_k^{(i)}$ po sobě hodnoty (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1); obdržíme tedy v jistém systému souřadném homogenní souřadnice bodu na uvažované ploše jako koeficienty při integračních konstantách.

Z rovnic (11′) a (13) vychází při malé změně označení konstant k_i

$$
\begin{aligned}
A_1 = (x-y)^{-\frac{3}{2}} \Big\{ & k_1 e^{\beta^{\frac{3}{2}}x+\alpha^{\frac{3}{2}}y} + k_2 [2(x-y)+\alpha^{\frac{3}{2}}+\beta^{\frac{3}{2}}]\, e^{-\beta^{\frac{3}{2}}x+\alpha^{\frac{3}{2}}y} + \\
& + k_3 [2(x-y)-\alpha^{\frac{3}{2}}-\beta^{\frac{3}{2}}]\, e^{\beta^{\frac{3}{2}}x-\alpha^{\frac{3}{2}}y} + k_4 e^{-\beta^{\frac{3}{2}}x-\alpha^{\frac{3}{2}}y} \Big\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

a jsou tedy rovnice hledaných ploch, dosadíme-li ještě $\beta^{\frac{3}{2}} = a, 2x = x'$, $2y = y'$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= e^{ax+\frac{1}{a}y} \\
x_2 &= \left(x-y+a+\frac{1}{a}\right) e^{\frac{1}{a}y} \\
x_3 &= \left(x-y-a-\frac{1}{a}\right) e^{ax}
\end{aligned}
\tag{14′}
$$

II. typ.

Plochy druhého typu, které připouštějí grupu ∞^2 projektivních deformací v sebe, z nichž některé jsou pouhými kolineacemi v sebe, určeny jsou opět systémem diferenciálních rovnic (8), v němž však na rozdíl od typu prvního jest klásti

$$
\omega_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dx}{x-y}; \qquad \omega_3 = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dy}{x-y}; \qquad \alpha = \beta = \sqrt{1-2c} \neq 0;
$$

$$
\omega_{21} = \lambda\omega_2 + c\omega_3; \qquad \omega_{31} = c\omega_2 + \varrho\omega_3; \qquad \lambda = \varrho = (x-y)^2 + \frac{3}{2}c.
$$

Vypočteme-li z těchto a zbývajících (dle těchto relací změněných) rovnic (8') ω_{ik} a dosadíme-li je do systému (8), obdržíme analogicky jako dříve, následující systém parciálních diferenciálních rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_1 + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_2 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{\lambda}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_2 + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_3}{\partial x} &= \frac{c}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_3 + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_4}{\partial x} &= \frac{\varrho}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_1 + \frac{c}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_2 + \frac{\lambda}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_3 + \frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= \frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_1 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_3 \qquad (9a) \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= -\frac{c}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} &= -\frac{\varrho}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_1 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_4}{\partial y} &= -\frac{\lambda}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_1 - \frac{\varrho}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{c}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_3 - \frac{3}{2}\frac{1}{x-y}A_4
\end{aligned}
$$

jehož koeficienty jsou funkcemi pouze rozdílu obou proměnných x, y.

Nalezneme snadno, že jsou-li A_1, A_2, A_3, A_4 partikulárním řešením tohoto systému, jsou jeho řešením také jejich lineární kombinace

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_3 \\
B_2 &= \frac{1}{\alpha}\left[x-y+\frac{c}{2(x-y)}\right]A_1 + \frac{1}{x-y}A_2 + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_3 - \\
&\quad - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x-y}A_4 \\
B_3 &= -\frac{1}{\alpha}\left[(x-y)+\frac{c}{2(x-y)}\right]A_1 - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x-y}A_2 - \frac{1}{x-y}A_3 + \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-y}A_4 \qquad (10a) \\
B_4 &= -\frac{1}{\alpha}\left[x-y+\frac{c}{2(x-y)}\right]A_2 + \frac{1}{\alpha}\left[x-y+\frac{c}{2(x-y)}\right]A_3
\end{aligned}
$$

určující substituci B, jejíž charakteristická rovnice má kořeny

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{2}{\alpha}, \quad \lambda_4 = -\frac{2}{\alpha}.$$

Elementární dělitele charakteristické funkce této substituce jsou jednoduché λ, λ, $\left(\lambda - \frac{2}{\alpha}\right)$, $\left(\lambda + \frac{2}{\alpha}\right)$; existují tudíž čtyři lineárně neodvislé kombinace U_1, U_2, U_3, U_4 funkcí A_i takové, že, zavedeme-li v nich na místě A_i jejich lineární kombinace (10a), nabudou hodnoty $0, 0, \frac{2}{\alpha} U_3, -\frac{2}{\alpha} U_4$.

Z rovnic současně platných

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial x} &= v_{11}U_1 + v_{12}U_2 + v_{13}U_3 + v_{14}U_4 & 0 &= \frac{2}{\alpha} v_{13}U_3 - \frac{2}{\alpha} v_{14}U_4 \\
\frac{\partial U_2}{\partial x} &= v_{21}U_1 + v_{22}U_2 + v_{23}U_3 + v_{24}U_4 & 0 &= \frac{2}{\alpha} v_{23}U_3 - \frac{2}{\alpha} v_{24}U_4 \\
\frac{\partial U_3}{\partial x} &= v_{31}U_1 + v_{32}U_2 + v_{33}U_3 + v_{34}U_4 & \frac{2}{\alpha}\frac{\partial U_3}{\partial x} &= \frac{2}{\alpha} v_{33}U_3 - \frac{2}{\alpha} v_{34}U_4 \\
\frac{\partial U_4}{\partial x} &= v_{41}U_1 + v_{42}U_2 + v_{43}U_3 + v_{44}U_4 & -\frac{2}{\alpha}\frac{\partial U_4}{\partial x} &= \frac{2}{\alpha} v_{43}U_3 - \frac{2}{\alpha} v_{44}U_4
\end{aligned}
$$

a z toho, že počátečné podmínky mohou býti libovolné, vyplývá

$$v_{13} = v_{14} = v_{23} = v_{24} = v_{31} = v_{32} = v_{34} = v_{41} = v_{42} = v_{43} = 0$$

takže funkce U_3 a U_4 bude lze určiti kvadraturami, kdežto pro funkce U_1 a U_2 nalezneme systém tvaru

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial x} &= v_{11} U_1 + v_{12} U_2 & \frac{\partial U_1}{\partial y} &= v'_{11} U_1 + v'_{12} U_2 \\
\frac{\partial U_2}{\partial x} &= v_{21} U_1 + v_{22} U_2 & \frac{\partial U_2}{\partial y} &= v'_{12} U_1 + v'_{22} U_2.
\end{aligned}
$$

Kanonický tvar substituce (10a) jest

$$
\begin{aligned}
U_1 &= A_1 + \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{c}{2}} A_4 \\
U_2 &= A_1 + A_2 + A_3 + \frac{\alpha}{(x-y)^2 + \frac{c}{2}} A_4 \\
U_3 &= -\left[(x-y)^2 + \frac{c}{2}\right] A_1 - \frac{1}{2}\left[2(x-y) + \alpha + 1\right] A_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[2(x-y) - \alpha - 1\right] A_3 + A_4 \\
U_4 &= -\left[(x-y)^2 + \frac{c}{2}\right] A_1 - \frac{1}{2}\left[2(x-y) - \alpha + 1\right] A_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[2(x-y) + \alpha - 1\right] A_3 + A_4.
\end{aligned}
\tag{11a}
$$

Z těchto rovnic obdržíme, vyjádříme-li funkce A_i pomocí U_1, U_2, U_3, U_4

$$A_1 = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\alpha U_1 - U_2 - \frac{1}{\alpha} U_3 + \frac{1}{\alpha} U_4\right]$$

$$A_2 = -\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}[x-y+\frac{c}{2(x-y)}]\,U_1 + \frac{1}{\alpha-1}[x-y+\frac{c}{2(x-y)}]\,U_2 +$$
$$+\frac{1}{\alpha}[\frac{x-y}{\alpha-1}-\frac{x-y+\alpha}{2(x-y)}]\,U_3 - \frac{1}{\alpha}[\frac{x-y}{\alpha-1}-\frac{1}{2}]\,U_4 \qquad (11'a)$$
$$A_3 = \frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}[x-y+\frac{c}{2(x-y)}]\,U_1 - \frac{1}{\alpha-1}[x-y+\frac{c}{2(x-y)}]\,U_2 -$$
$$-\frac{1}{\alpha}[\frac{x-y}{\alpha-1}+\frac{x-y-\alpha}{2(x-y)}]\,U_3 + \frac{1}{\alpha}[\frac{x-y}{\alpha-1}+\frac{1}{2}]\,U_4$$
$$A_4 = \frac{(x-y)^2+\frac{c}{2}}{\alpha-1}[-U_1+U_2+\frac{1}{\alpha}U_3-\frac{1}{\alpha}U_4]$$

Derivací rovnic (11a), na př. dle x, obdržíme, nahradíme-li po derivování na pravých stranách rovnic funkce $\frac{\partial A_i}{\partial x}$ příslušnými formami v A_i, jak jsou dány systémem (9a) a vyjádříme-li konečně A_i podle rovnic (11'a) příslušnými výrazy v U_i, systém

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{3}{2(x-y)}U_1 + \frac{1}{\alpha(x-y)}\cdot[1+\frac{c}{(x-y)^2+\frac{c}{2}}]\,U_2$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{x-y}\cdot[\frac{(x-y)^2+\frac{c}{2}}{\alpha}-\alpha-1]\,U_1 +$$
$$+\frac{1}{(x-y)}\cdot[\frac{\alpha+2}{2\alpha}+\frac{c}{(x-y)^2+\frac{c}{2}}]\,U_2 \qquad (12a)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}[1+\frac{2\alpha-1}{2(x-y)}]\,U_3$$
$$\frac{\partial U_4}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}[1+\frac{2\alpha+1}{2(x-y)}]\,U_4$$

a analogicky

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{3}{2(x-y)}U_1 - \frac{1}{\alpha(x-y)}[1+\frac{c}{(x-y)^2+\frac{c}{2}}]\,U_2$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} = -\frac{1}{x-y}[\frac{(x-y)^2+\frac{c}{2}}{\alpha}-\alpha-1]\,U_1 -$$
$$-\frac{1}{x-y}[\frac{\alpha+2}{2\alpha}+\frac{c}{(x-y)^2+\frac{c}{2}}]\,U_2 \qquad (12a)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial y}=\frac{1}{\alpha}\left[1-\frac{2\alpha-1}{2(x-y)}\right]U_3$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial y}=-\frac{1}{\alpha}\left[1-\frac{2\alpha+1}{2(x-y)}\right]U_4$$

Kvadraturami určíme funkce U_3 a U_4

$$\left.\begin{aligned} U_3&=k_3 e^{\frac{x+y}{\alpha}}(x-y)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}\\ U_4&=k_4 e^{-\frac{x+y}{\alpha}}(x-y)^{-\frac{2\alpha+1}{2\alpha}}\end{aligned}\right\}\qquad(13a)$$

a pro funkce U_1 a U_2 obdržíme, zavedeme-li novou neodvisle proměnnou $(x-y)^2=z$, systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU_1}{dz}&=-\frac{3}{4z}U_1+\frac{1}{2\alpha z}\left[1+\frac{c}{z+\frac{c}{2}}\right]U_2\\ \frac{dU_2}{dz}&=\frac{1}{2z}\left[\frac{z+\frac{c}{2}}{\alpha}-\alpha-1\right]U_1+\frac{1}{2z}\left[\frac{\alpha+2}{2\alpha}+\frac{c}{z+\frac{c}{2}}\right]U_2\end{aligned}\right\}\qquad(13a)$$

jenž vede, jak zřejmo, na diferenciální rovnici druhého řádu s dvěma regulárními ($z=0$, $z=-\frac{c}{2}$) a jedním irregulárním ($z=\infty$) singulárním bodem. Vypočteme ji pro $Y=\alpha U_1-U_2$; obdržíme

$$Y''+\frac{m_0 z+m_1}{z(z+\frac{c}{2})}Y'+\frac{n_0 z^2+n_1 z+n_2}{z^2(z+\frac{c}{2})}Y=0 \qquad (13'a)$$

kdež

$$m_0=\frac{\alpha-1}{2\alpha}$$

$$m_1=\frac{8-4\alpha-17c+5c\alpha}{4\alpha}$$

$$n_0=-\frac{1}{4\alpha^2} \qquad (\alpha=\sqrt{1-2c}\neq 0)$$

$$n_1=\frac{\alpha^2+6\alpha-4}{16\alpha^2}$$

$$n_2=\frac{-40+85c-16c^2+32\alpha-42c\alpha}{32\alpha^2}$$

3. Systémy určující plochy, které připouštějí grupu ∞^2 kolineací v sebe.

I. typ.

Plochy prvního typu, při nichž projektivní deformace v sebe dané vzorci $x'=ax+b$, $y'=ay+b$, jsou pouhými kolineacemi v sebe, určeny jsou systémy (8) a (8'), v nichž však na rozdíl od případů již uvažovaných jest klásti $\lambda=\varrho=0$.

Vychází tedy v tomto případě jednoduchý systém

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\frac{3}{2(x-y)}A_1 + \frac{\beta}{x-y}A_2 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{1}{2(x-y)}A_2 + \frac{\beta}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_3}{\partial x} &= -\frac{1}{2(x-y)}A_3 + \frac{\beta}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_4}{\partial x} &= \frac{3}{2(x-y)}A_4 \\
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= \frac{3}{2(x-y)}A_1 - \frac{\alpha}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= \frac{1}{2(x-y)}A_2 - \frac{\alpha}{x-y}A_4 \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} &= -\frac{\alpha}{x-y}A_2 - \frac{1}{2(x-y)}A_3 \\
\frac{\partial A_4}{\partial y} &= -\frac{3}{2(x-y)}A_4
\end{aligned}
\tag{9b}
$$

který lze bezprostředně integrovati; neboť stačí omeziti se na systém druhého řádu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{1}{2(x-y)}A_2 + \frac{\beta}{x-y}A_3 \\
\frac{\partial A_3}{\partial x} &= -\frac{1}{2(x-y)}A_3 \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= \frac{1}{2(x-y)}A_2 \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} &= -\frac{\alpha}{x-y}A_2 - \frac{1}{2(x-y)}A_3
\end{aligned}
\tag{9'b}
$$

jehož řešení kvadraturami snadno nalezneme. Obdržíme

$$
\begin{aligned}
A_2 &= c_1(x-y)^{\frac{1}{2}} + (c_1 y + c_2)(x-y)^{-\frac{1}{2}} \\
A_3 &= -\alpha(c_1 y + c_2)(x-y)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

a z funkcí těchto a z

$$A_4 = c_4(x-y)^{\frac{3}{2}}$$

vypočteme variací konstant c_1, c_2 funkce A_2, A_3 hovící systému (9b) a konečně z prvních rovnic tohoto systému

$$
\begin{aligned}
A_1 = (x-y)^{-\frac{3}{2}}[k_1(\beta^3x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - \alpha^3y^3) + \\
+ k_2(\beta^{\frac{3}{2}}x^2 + \alpha^{\frac{3}{2}}y^2) + k_3(\beta^{\frac{3}{2}}x - \alpha^{\frac{3}{2}}y) + k_4]
\end{aligned}
\tag{14b}
$$

kdež k_1, k_2, k_3, k_4, jsou integrační konstanty, $\alpha\beta = 1$. Označíme-li $\beta^{\frac{3}{2}} = a$, obdržíme rovnice uvažovaných ploch ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a^2 x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - \frac{1}{a^2} y^3 \\
x_2 &= a x^2 + \frac{1}{a} y^2 \\
x_3 &= a x - \frac{1}{a} y
\end{aligned}
\tag{14'b}
$$

II. typ.

Rovnice ploch druhého typu, které připouštějí grupu ∞^2 projektivních deformací v sebe, jež všechny jsou kolineacemi, obdrží se integrací systému diferenciálních rovnic (9a), v němž však jest nutno klásti $\lambda = \varrho - \frac{3}{2} c$.

Systém takto pozměněný jest tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\frac{3}{2(x-y)} A_1 + \frac{1}{\alpha(x-y)} A_2 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{3c}{2\alpha} \frac{1}{x-y} A_1 + \frac{1}{2(x-y)} A_2 + \frac{1}{\alpha(x-y)} A_3 \\
\frac{\partial A_3}{\partial x} &= \frac{c}{\alpha} \frac{1}{x-y} A_1 - \frac{1}{2(x-y)} A_3 + \frac{1}{\alpha(x-y)} A_4 \\
\frac{\partial A_4}{\partial x} &= \frac{3c}{2\alpha} \frac{1}{x-y} A_1 + \frac{c}{\alpha} \frac{1}{x-y} A_2 + \frac{3c}{2\alpha} \frac{1}{x-y} A_3 + \frac{3}{2(x-y)} A_4 \\
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= \frac{3}{2(x-y)} A_1 - \frac{1}{\alpha(x-y)} A_3 \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= -\frac{c}{\alpha(x-y)} A_1 + \frac{1}{2(x-y)} A_2 - \frac{1}{\alpha(x-y)} A_4 \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} &= -\frac{3c}{2\alpha} \frac{1}{x-y} A_1 - \frac{1}{\alpha(x-y)} A_2 - \frac{1}{2(x-y)} A_3 \\
\frac{\partial A_4}{\partial y} &= -\frac{3c}{2\alpha} \frac{1}{x-y} A_1 - \frac{3c}{2\alpha} \frac{1}{x-y} A_2 - \frac{c}{\alpha} \frac{1}{x-y} A_3 - \frac{3}{2} \frac{1}{x-y} A_4
\end{aligned}
\tag{9c}
$$

a jeho koeficienty jsou funkcemi pouze rozdílu obou proměnných x, y*.

Nalezneme snadno, že jsou-li A_1, A_2, A_3, A_4 partikulárním řešením tohoto systému, jsou jeho řešením také jejich lineární kombinace

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\alpha(x-y)} A_2 - \frac{1}{\alpha(x-y)} A_3 \\
B_2 &= \frac{c}{2\alpha(x-y)} A_1 + \frac{1}{x-y} A_2 + \frac{1}{\alpha(x-y)} A_3 - \frac{1}{\alpha(x-y)} A_4 \\
B_3 &= -\frac{c}{2\alpha(x-y)} A_1 - \frac{1}{\alpha(x-y)} A_2 - \frac{1}{x-y} A_3 + \frac{1}{\alpha(x-y)} A_4 \\
B_4 &= -\frac{c}{2\alpha(x-y)} A_2 + \frac{c}{2\alpha(x-y)} A_3
\end{aligned}
\tag{10c}
$$

* Substitucí $(x-y) = e^z$ přejde tento systém v jiný s konstantními koeficienty.

určující substituci B, jejíž charakteristická rovnice má kořeny

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Elementární dělitele charakteristické funkce této substituce jsou λ^3, λ; existují tudíž čtyři lineárně neodvislé kombinace U_1, U_2, U_3, U_4 funkcí A_i takové, že zavedeme-li v nich na místě A_i jejich lineární kombinace (10c), nabudou hodnoty 0, 0, U_2, U_3.

Z rovnic současně platných

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} = v_{i1} U_1 + v_{i2} U_2 + v_{i3} U_3 + v_{i4} U_4 \qquad \begin{aligned} 0 &= v_{13} U_2 + v_{14} U_3 \\ 0 &= v_{23} U_2 + v_{24} U_3 \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} &= v_{33} U_2 + v_{34} U_3 \\ \frac{\partial U_3}{\partial x} &= v_{43} U_2 + v_{44} U_3 \end{aligned}$$

a z toho, že počáteční podmínky mohou býti libovolné, vyplývá .

$$\begin{gathered} v_{13} = v_{14} = v_{21} = v_{23} = v_{24} = v_{31} = v_{34} = 0 \\ v_{22} = v_{33} = v_{44} \\ v_{32} = v_{43}, \end{gathered}$$

takže obdržíme jednoduchý systém tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= v_{11} U_1 + v_{12} U_2 \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \qquad\qquad v_{22} U_2 \\ \frac{\partial U_3}{\partial x} &= \qquad\qquad v_{32} U_2 + v_{22} U_3 \\ \frac{\partial U_4}{\partial x} &= v_{41} U_1 + v_{42} U_2 + v_{32} U_3 + v_{22} U_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial y} &= v'_{11} U_1 + v'_{12} U_2 \\ \frac{\partial U_2}{\partial y} &= \qquad\qquad v'_{22} U_2 \\ \frac{\partial U_3}{\partial y} &= \qquad\qquad v'_{32} U_2 + v'_{22} U_3 \\ \frac{\partial U_4}{\partial y} &= v'_{41} U_1 + v'_{42} U_2 + v'_{32} U_3 + v'_{22} U_4 \end{aligned}$$

který, jak zřejmo, lze integrovati kvadraturami.

Kanonický tvar substituce (10c) jest

$$U_1 = \frac{c}{2} A_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + A_4$$

$$
\begin{aligned}
U_2 &= -\frac{c^2}{2} A_1 - \frac{c(\alpha+1)}{2} A_2 - \frac{c(\alpha+1)}{2} A_3 + c A_4 \\
U_3 &= \qquad -\frac{c\alpha(x-y)}{2} A_2 + \frac{c\alpha(x-y)}{2} A_3 \\
U_4 &= \qquad \alpha^2 (x-y)^2 A_4;
\end{aligned} \tag{11c}
$$

z těchto rovnic obdržíme, vyjádříme-li funkce A_i pomocí U_1, U_2, U_3, U_4

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{c} U_1 - \frac{2}{c\,\alpha^2 (x-y)^2} U_4 \\
A_2 &= -\frac{1}{\alpha+1} U_1 - \frac{1}{c(\alpha+1)} U_2 - \frac{1}{c\,\alpha\,(x-y)} U_3 + \frac{2}{\alpha^2 (\alpha+1)(x-y)^2} U_4 \\
A_3 &= -\frac{1}{\alpha+1} U_1 - \frac{1}{c\,(\alpha+1)} U_2 + \frac{1}{c\,\alpha\,(x-y)} U_3 + \frac{2}{\alpha^2 (\alpha+1)(x-y)^2} U_4 \\
A_4 &= \frac{1}{\alpha^2 (x-y)^2} U_4
\end{aligned} \tag{11'c}
$$

Z rovnic (11c), (11'c), (9c) obdrzíme analogicky jako dříve zjednodušený systém

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{3}{2\alpha\,(x-y)} U_1 - \frac{3}{\alpha(\alpha+1)(x-y)} U_2 \\
\frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{2\alpha-1}{2\,\alpha\,(x-y)} U_2 \\
\frac{\partial U_3}{\partial x} &= \frac{1}{2} U_2 + \frac{2\alpha-1}{2\alpha\,(x-y)} U_3 \\
\frac{\partial U_4}{\partial x} &= \frac{\alpha}{4} (7+5\alpha)(x-y)\, U_1 - \frac{5\alpha(x-y)}{2(\alpha+1)} U_2 + \frac{1}{2} U_3 + \frac{2\alpha-1}{2\alpha(x-y)} U_4 \\
\frac{\partial U_1}{\partial y} &= -\frac{3}{2\alpha\,(x-y)} U_1 + \frac{3}{\alpha(\alpha+1)\,(x-y)} U_2 \\
\frac{\partial U_2}{\partial y} &= -\frac{2\alpha-1}{2\alpha\,(x-y)} U_2 \\
\frac{\partial U_3}{\partial y} &= \frac{1}{2} U_2 - \frac{2\alpha-1}{2\,\alpha\,(x-y)} U_3 \\
\frac{\partial U_4}{\partial y} &= -\frac{\alpha}{4} (7+5\alpha)\,(x-y)\, U_1 + \frac{5\alpha\,(x-y)}{2\,(\alpha+1)} U_2 + \frac{1}{2} U_3 - \frac{2\alpha-1}{2\alpha\,(x-y)} U_4
\end{aligned} \tag{12c}
$$

jehož integrací snadno nalezneme

$$
\begin{aligned}
U_1 &= k_1 (x-y)^{\frac{3}{2\alpha}} - k_2 \frac{3}{(\alpha-2)\,(\alpha+1)} (x-y)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}} \\
U_2 &= k_2\, (x-y)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}} \\
U_3 &= \frac{1}{2}\, [k_2\, (x+y) + k_3]\, (x-y)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}} \\
U_4 &= k_1 \frac{\alpha^2\,(7+5\alpha)}{4\,(\alpha+2)}\, (x-y)^{\frac{4\alpha+3}{2\alpha}} + \Big[-k_2 \alpha \frac{25\alpha+1}{8\,(\alpha+1)\,(\alpha-2)} (x-y)^2 + \\
&\quad + \frac{k_2\,(x+y)^2 + 2k_3\,(x+y) + k_4}{8}\Big]\, (x-y)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}
\end{aligned} \tag{13c}
$$

Dosazením těchto výrazů do rovnic (11'c) obdržíme analogicky jako dříve při malé změně označení konstant k_1, k_2, k_3, k_4 rovnice hledaných ploch

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (x-y)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}} \\
x_2 &= (x+y)\,(x-y)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}} \qquad\qquad (14'c) \\
x_3 &= \alpha\,(x-y)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - (\alpha-2)\,(x+y)^2\,(x-y)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}}
\end{aligned}
$$

Ze vzorců (11'c), (12c), (13c) vyplývá, že v těchto rovnicích jest nutno předpokládati $\alpha \neq 0, +1, +2$. Kdežto plochy příslušné k hodnotám parametru $\alpha = +1$ jsou dány rovnicemi (14'b) pro hodnoty $a = \sqrt{+1}$, určí se rovnice ploch v případech $\alpha = \pm 2$ zvláště; obdržíme pro $\alpha = 2$

$$x_1 \quad \frac{1}{(x-y)^2}, \quad x_2 = \frac{x+y}{(x-y)^2}, \quad x_3 = \log(x-y) - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

a pro $\alpha = -2$ (14'c)

$$x_1 = \log(x-y), \quad x_2 = x+y, \quad x_3 = (x-y)^2 - 2(x+y)^2.$$

SUR CERTAINS TYPES DE SURFACES QUI SONT PROJECTIVEMENT APPLICABLES SUR ELLES MÊMES.

PAR

O. BORŮVKA.

(RÉSUMÉ.)

Les surfaces qui sont projectivement applicables sur elles mêmes ont été étudiées par *M. E. Cartan* dans son Mémoire «Sur la déformation projective des surfaces» *). Ces surfaces étant données par de système des équations différentielles on peut trouver les équations de ces surfaces en intégrant ces systèmes. Ils sont, dans le cas de surfaces qui admettent un groupe à deux paramètres de déformations projectives avec un sous-groupe projectif et de celles qui n'admettent qu'un groupe projectif à deux paramètres bien simples et de telle sorte que leur coefficients ne sont que fonctions de $x—y$, x, y étant variables indépendantes. D'après une méthode que m'a communiquée M. le prof. *E. Čech* on peut simplifier tels systèmes en formant une substitution linéaire (2) conduisant d'une solution particulière A_1, A_2, A_3, A_4 du système donné à une autre B_1, B_2, B_3, B_4 et en la mettant sous la forme canonique. J'explique cette méthode (p. 4) et je l'applique pour trouver les équations des dites surfaces. Mais dans un cas des surfaces qui admettent un groupe à deux paramètres de déformations projectives avec un sousgroupe projectif on est amené à une équation différentielle du second ordre avec deux points singuliers réguliers et avec un point singulier irrégulier (voir p. 15).

Dans tous les autres cas on trouve les équations cherchées sous forme finie; on obtient les résultats:

1. Les équations d'un type des surfaces, qui admettent un groupe à deux paramètres de déformations projectives proprement dites ($a' — ax + b$, $y' = ay + b$) avec un sousgroupe projectif ($a — 1$) sont

$$x_1 — e^{\alpha x + \frac{1}{\alpha} y}$$

$$x_2 = \left(x - y + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\frac{y}{\alpha}}$$

$$x_3 = \left(x - y - \alpha - \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha x}$$

2. Les équations des surfaces, qui admettent un groupe projectif à deux paramètres ($x' = ax + b$, $y' = ay + b$) sont

*) Annales de l'école normale supérieure, série 3. t. XXXVII. (1920), p. 259 – 356.

a)

$$x_1 = \alpha^2 x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - \frac{1}{\alpha^2} y^3$$

$$x_2 = \alpha x^2 + \frac{1}{\alpha} y^2$$

$$x_3 = \alpha x - \frac{1}{\alpha} y$$

b)

$$x_1 = (x-y)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}}$$

$$x_2 = (x+y)(x-y)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}} \qquad (\alpha \neq 0, \ +1, \ \pm 2)$$

$$x_3 = \alpha (x-y)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - (\alpha-2)(x+y)^2 (x-y)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}}$$

$$x_1 = \frac{1}{(x-y)^2}, \quad x_2 = \frac{x+y}{(x-y)^2}, \quad x_3 = \log(x-y) - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

$$x_1 = \log(x-y), \quad x_2 = x+y, \quad x_3 = (x-y)^2 - 2(x+y)^2.$$

3. L'équation des surfaces qui admettent un groupe projectif mixte à deux paramètres ($x' = \varepsilon x + a$, $y' = \varepsilon^2 y + b$; $x' = \varepsilon y + a$, $y' = \varepsilon^2 x = b$; $\varepsilon^3 = 1$)

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = 1 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0)$$

Brno, le 4. juillet 1924.