Otakar Borůvka
O rozkladech množin

Rozpravy II. třídy České akademie 53, 1943, č. 23, 26 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500060

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK LIII. ČÍSLO 23.

O rozkladech množin.

Podává
O. BORŮVKA.

Předloženo dne 1. září 1943.

Provedeno s podporou Národní rady badatelské.

Obsah četných matematických vět úzce souvisí s pojmem rozkladu množiny. Nehledíc ke klasické matematice, vyskytují se takové věty zejména v teorii množin, topologii a algebře. Významným příkladem jest obecná teorie grup a pojem grupy tříd, jehož podstatnou složku tvoří právě rozklad množiny. Mimo to jest pojem rozkladu množiny realisován klasifikacemi v jednotlivých vědních oborech a tím nabývá na významu i s vyššího hlediska noetického.

V této práci jsem se pokusil o soustavné zpracování vlastností rozkladů množin. Některé hlavní pojmy a výsledky této teorie jsou již obsaženy v mých úvahách o grupoidech.[1] To platí zejména o poznatku, že se vhodnou definicí svazových operací dá teorie rozkladů množin podřaditi obecné teorii svazů. Třebaže tento výsledek určuje celkový ráz naší teorie, zdaleka ji nevyčerpává, neboť rozklady realisovaná teorie svazů popisuje vlastnosti rozkladů jako prvků svazu, nechávajíc stranou vztahy mezi prvky jednotlivých rozkladů. Teorii řetězců rozkladů v množinách, která v podstatě jest v oněch úvahách obsažena, jsem však in extenso do tohoto spisu nepojal kvůli úspoře místa.

Látka zde zpracovaná jest rozdělena do tří kapitol, z nichž první obsahuje základní pojmy o rozkladech v množinách, druhá jedná o doplňkových rozkladech a třetí o řadách rozkladů množin. V první kapitole jsou

[1]) O. BORŮVKA, *Teorie grupoidů.* Část první. [Spisy vydávané přírodověd. fak. Masarykovy univ., čís. 275 (1939)]; *Über Ketten von Faktoroiden* [Math. Ann., **118**, 41—64 (1941)].

zejména popsány obě svazové operace, jimiž se teorie rozkladů množin podřazuje obecné teorii svazů. Druhá kapitola jest věnována studiu doplňkových rozkladů. Zdá se, že tento pojem má širší význam, neboť na př. jest realisován každými dvěma rozklady ve třídy na libovolné grupě, vytvořenými invariantními podgrupami, a jest úzce spjat s teorií zobrazování rozkladů množin. Teorie řad rozkladů, tvořící obsah třetí kapitoly, široce zobecňuje vlastnosti řad rozkladů grupy vytvořených řadami invariantních podgrup.

Teorie rozkladů množin, jak jest v tomto spise zpracována, má také bezprostřední použití v teorii grupoidů, v níž se může realisovati vytvořujícími rozklady.

I. Základní pojmy o rozkladech v množinách.

1. Označení. Množiny (prvky množin) budeme označovati zpravidla velkými (malými) latinskými písmeny. Množinu, která se skládá z prvků $a, b, \ldots$, označujeme také $\{a, b, \ldots\}$. K označení systémů množin budeme zpravidla používati velkých latinských písmen s pruhem, na př. $\overline{A}$, a pro jednotlivé množiny systému, jakožto prvky množiny, malých latinských písmen s pruhem, na př. $\overline{a}$. Když a značí prvek v množině A, píšeme, jak jest obvyklé v teorii množin, $a \in A$; když A jest podmnožina v (nadmnožina na) B, píšeme $A \subset B$ anebo $B \supset A$ ($A \supset B$ anebo $B \subset A$). $\emptyset$ značí prázdnou množinu. Symboly $\vee$, $\cap$, vztahující se na dvě množiny, značí jejich součet, průnik; symbol $\cong$ vyjadřuje ekvivalenci množin. Když dvě množiny mají neprázdný průnik, pravíme, že jsou *incidentní*. Symbol $s\overline{A}$ značí součet těch množin, které jsou prvky systému $\overline{A}$. Písmeno G značí všude v dalším libovolnou neprázdnou množinu.

2. Rozklady v množině. Každý neprázdný disjunktní systém neprázdných podmnožin v G, $\overline{A}$, nazýváme *rozklad v G*. Když $s\overline{A} = G$, t. j. když $\overline{A}$ pokrývá množinu G, nazýváme jej rozklad *na G* anebo rozklad množiny G. O rozkladu $\overline{A}$ v (na) G pravíme, že *jest* či *leží* v (na) množině G. Jednoduchým příkladem rozkladu v množině G jest rozklad skládající se z libovolné neprázdné podmnožiny v G. Důležitými příklady rozkladů na množině G jsou: rozklad, jehož jediným prvkem jest množina G, a dále rozklad, jehož prvky jsou všechny jednobodové množiny $\{a\}$, kde $a \in G$; první jest t. zv. *největší* rozklad množiny G a označujeme jej $\overline{G}_{\max}$, druhý jest *nejmenší* rozklad množiny G, $\overline{G}_{\min}$.

Počínajíc odstavcem **7**, budeme systematicky studovati vlastnosti rozkladů *na G*. Zde předběžně vysvětlíme pojem zákrytu a zjemnění rozkladu na množině G, který potřebujeme v odst. **6**.

Nechť $\overline{A}$, $\overline{B}$ značí libovolné rozklady množiny G. Když každý prvek v $\overline{A}$ jest součtem některých prvků rozkladu $\overline{B}$, pravíme, že $\overline{A}$ ($\overline{B}$) jest *zákryt* (*zjemnění*) rozkladu $\overline{B}$ ($\overline{A}$) anebo, že rozklad $\overline{A}$ ($\overline{B}$) *jest* či *leží* na (pod) rozkladu (rozkladem) $\overline{B}$ ($\overline{A}$). Užíváme pak označení $\overline{A} \geqq \overline{B}$ anebo $\overline{B} \leqq \overline{A}$.

3. Obal a průsek. Nechť $\overline{A}$ značí nějaký rozklad a B nějakou podmnožinu v G.

Množina všech prvků $\bar{a} \in \overline{A}$ incidentních s B jest jistá podmnožina v $\overline{A}$; nazýváme ji *obal* podmnožiny B v rozkladu $\overline{A}$ a označujeme symbolem $B \sqsubset \overline{A}$ anebo $\overline{A} \sqsupset B$. $B \sqsubset \overline{A}$ může ovšem býti prázdná množina a jest zřejmé, že tento případ nastane, když a jen když $\mathrm{s}\overline{A} \cap B = \emptyset$. Je-li $B \sqsubset \sqsubset \overline{A} \neq \emptyset$, pak ovšem $B \sqsubset \overline{A}$ jest rozklad v G.

Další pojem vztahující se na rozklad $\overline{A}$ a podmnožinu B jest pojem průseku. *Průsek* rozkladu $\overline{A}$ a podmnožiny B jest množina neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\overline{A}$ s podmnožinou B; označujeme jej $\overline{A} \sqcap B$ anebo $B \sqcap \overline{A}$. Také průsek $\overline{A} \sqcap B$ může býti prázdná množina a opět jest zřejmé, že tento případ nastane, když a jen když $\mathrm{s}\overline{A} \cap B = \emptyset$. Jinak jest ovšem $\overline{A} \sqcap B$ rozklad v G a dokonce v B.

Všimněme si, že když $\overline{A}$ jest rozklad *na* G a $B \neq \emptyset$, pak $B \sqsubset \overline{A}$ i $\overline{A} \sqcap B$ jsou neprázdné systémy množin, z nichž první jest podmnožinou v $\overline{A}$ a druhý rozkladem na B.

4. Rozklady spřažené a sdružené. Nechť $\overline{A}, \overline{C}$ značí nějaké rozklady v G.

Rozklady $\overline{A}, \overline{C}$ nazýváme *spřažené*, když ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ existuje jediný prvek $\bar{c} \in \overline{C}$ s ním incidentní a ke každému prvku $\bar{c} \in \overline{C}$ jediný prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ incidentní s $\bar{c}$. — Když rozklady $\overline{A}, \overline{C}$ jsou spřažené, pak platí rovnosti $\overline{A} = \mathrm{s}\overline{C} \sqsubset \overline{A}$, $\overline{C} = \mathrm{s}\overline{A} \sqsubset \overline{C}$; rovněž jest zřejmé, že $\overline{A}, \overline{C}$ jsou ekvivalentní množiny, při čemž prosté zobrazení jedné na druhou jest dáno incidencí prvků.

Nechť $B \in \overline{A}$, $D \in \overline{C}$ a nechť $B \cap D \neq \emptyset$. Pak $B \in D \sqsubset \overline{A}$, $D \in B \sqsubset \overline{C}$ a ze vztahů $B \subset A$, $D \subset C$ plyne $\emptyset \neq B \cap D \subset B \cap C$, $A \cap D$; při tom kvůli stručnosti klademe $A = \mathrm{s}\overline{A}$, $C = \mathrm{s}\overline{C}$. Odtud vidíme, že

$$D \sqsubset \overline{A} \sqcap C, \quad B \sqsubset \overline{C} \sqcap A$$

jsou rozklady v G. První symbol značí buď rozklad $D \sqsubset (\overline{A} \sqcap C)$ anebo jemu rovný rozklad $(D \sqsubset \overline{A}) \sqcap C$ a podobně druhý symbol. Rozklady $\overline{A}$, $\overline{C}$ nazýváme *sdružené* vzhledem k B, D, anebo (když víme, že jde o B, D) stručněji: sdružené, když platí rovnost

$$\mathrm{s}(D \sqsubset \overline{A} \sqcap C) = \mathrm{s}(B \sqsubset \overline{C} \sqcap A).$$

5. Vytvořující rozklady. Předpokládejme, že na množině G jest dáno nějaké násobení, takže každý prvek $a \in G$ má s každým prvkem $b \in G$ jistý součin $ab \in G$. Množina G spolu s tímto násobením jest grupoid $\mathfrak{G}$. Rozkladem v $\mathfrak{G}$ rozumíme rozklad v G. Libovolný rozklad $\overline{A}$ v $\mathfrak{G}$ se nazývá *vytvořující*, když pro $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{A}$ existuje prvek $\bar{c} \in \overline{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Při tom ovšem $\bar{a}\bar{b}$ značí množinu skládající se z jednotlivých součinů každého prvku v $\bar{a}$ s každým prvkem v $\bar{b}$.

6. Řetězce. Nechť $A \supset B$ značí libovolné neprázdné podmnožiny v G. *Řetězcem* rozkladů od A do B, stručněji: řetězcem od A do B rozumíme uspořádanou konečnou množinu rozkladů v G: $\bar{A}_0, \ldots, \bar{A}_{\alpha-1}$, takovou, že 1. $\bar{A}_0$ jest rozklad na A, 2. každý následující rozklad leží na některém prvku rozkladu předcházejícího, 3. $B \in \bar{A}_{\alpha-1}$. Takový řetězec označujeme symbolem

$$\bar{A}_0 \to \ldots \to \bar{A}_{\alpha-1}$$

anebo jenom $[\bar{A}]$. Pro $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$ klademe $A_\gamma = s\bar{A}_\gamma$ a někdy místo B píšeme A_α. Z definice řetězce $[\bar{A}]$ tedy plyne $A_1 \in \bar{A}_0, \ldots, A_\alpha \in \bar{A}_{\alpha-1}$ a ovšem také $A = A_0 \supset \ldots \supset A_\alpha = B$. Množiny A, B jsou *konce* řetězce $[\bar{A}]$. *Délkou* řetězce $[\bar{A}]$ rozumíme počet α rozkladů v řetězci. $\bar{A}_0, \ldots, \bar{A}_{\alpha-1}$ jsou *členy* řetězce $[\bar{A}]$.

Když v řetězci $[\bar{A}]$ jest některý rozklad $\bar{A}_\gamma$ největší rozklad na A_γ, takže $\bar{A}_\gamma$ se skládá z jediného prvku $A_\gamma = A_{\gamma+1}$, nazývá se rozklad $\bar{A}_\gamma$ *nepodstatný*. Jinak jest *podstatný*. Počet podstatných rozkladů jest *redukovaná délka* řetězce.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad v G. Označme $A = s\bar{A}$ a nechť $B \in \bar{A}$. *Elementárním řetězcem* od A do B nad $\bar{A}$, stručněji (když víme, že jde o B): elementárním řetězcem nad $\bar{A}$, rozumíme řetězec rozkladů od A do B

$$([\mathring{A}] \equiv)\ \mathring{A}_0 \to \ldots \to \mathring{A}_{\alpha-1}$$

libovolné délky $\alpha\ (\geqq 1)$ takový, že pro $0 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$ jest rozklad $\mathring{A}_\gamma$ zákryt rozkladu $\bar{A} \sqcap A_\gamma$.

V takovém řetězci jest tedy především $\mathring{A}_0$ zákryt rozkladu $\bar{A}$. Dále existuje v A právě jedna podmnožina A_1 určená vztahy $B \subset A_1 \in \mathring{A}_0$ a na ní jest rozklad $(\bar{A}_1 \quad)\ \bar{A} \sqcap A_1$, obsahující jako prvek množinu B; $\bar{A}_1$ jest podmnožina v $\bar{A}$. Dále jest $\mathring{A}_1$ zákryt rozkladu $\bar{A}_1$. Opět existuje v A_1 právě jedna podmnožina A_2 určená vztahy $B \subset A_2 \in \mathring{A}_1$ a na ní jest rozklad $(\bar{A}_2 \ -)$ $\bar{A} \sqcap A_2$, obsahující jako prvek množinu B; $\bar{A}_2$ jest podmnožina v $\bar{A}_1$. Dále jest $\mathring{A}_2$ zákryt rozkladu $\bar{A}_2$. Atd.; konečně jest $\mathring{A}_{\alpha-1}$ zákryt rozkladu $\bar{A}_{\alpha-1}$ a obsahuje množinu B jako prvek.

Nechť $(\emptyset \neq) B \subset A \sqsubset G$ a nechť

$$([\bar{A}] \equiv)\ \bar{A}_0 \to \ldots \to \bar{A}_{\alpha-1}$$

značí nějaký řetězec od A do B, délky $\alpha \geqq 1$. *Zjemněním* řetězce $[\bar{A}]$ rozumíme řetězec rozkladů od A do B

$$([\mathring{A}] \quad)\ \mathring{A}_{0,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{0,\beta_0-1} \to \mathring{A}_{1,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{1,\beta_1-1} \to \ldots$$
$$\ldots \to \mathring{A}_{\alpha-1,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{\alpha-1,\beta_{\alpha-1}-1}$$

takový, že pro $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$ jest

$$\mathring{A}_{\gamma,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{\gamma,\beta_\gamma-1}$$

elementární řetězec od A_γ od $A_{\gamma+1}$ nad $\bar{A}_\gamma$. Libovolné zjemnění řetězce $[\bar{A}]$ tedy obdržíme, když každý jeho rozklad $\bar{A}_\gamma$ nahradíme vhodným elementárním řetězcem od A_γ do $A_{\gamma+1}$ nad $\bar{A}_\gamma$.

XXIII.

Nechť $(\emptyset \neq)\, B \subset A \subset G$, $(\emptyset \neq)\, D \subset C \subset G$ a nechť

$$([\bar{A}] \quad)\quad \bar{A}_0 \to \ldots \to \bar{A}_{\alpha-1}$$
$$([\bar{C}] \;-)\quad \bar{C}_0 \to \ldots \to \bar{C}_{\beta-1}$$

značí řetězce od A do B a od C do D. Řetězce $[\bar{A}]$, $[\bar{C}]$ se nazývají *sdružené*, když 1. mají stejné konce, tedy $A = C$, $B = D$, 2. každé dva členy $\bar{A}_\gamma$, $\bar{C}_\delta$ jsou sdružené vzhledem k $s\bar{A}_{\gamma+1}$, $s\bar{C}_{\delta+1}$. Při tom značí $s\bar{A}_\alpha = B$, $s\bar{C}_\beta = D$.

7. **Rozklady na množině.** V dalším se budeme zabývati rozklady *na* množině G. Jak jsme již uvedli v odst. 2, jsou tyto rozklady charakterisovány tím, že pokrývají G.

8. **Zákryt a zjemnění rozkladu.** Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ značí libovolné rozklady na množině G.

V odst. 2 jsme již vyložili pojem zákrytu a zjemnění rozkladu a uvedli jsme, že když $\bar{A}$ ($\bar{B}$) jest zákrytem (zjemněním) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$), píšeme $\bar{A} \geqq \bar{B}$ anebo $\bar{B} \leqq \bar{A}$. Nyní si všimneme podrobněji vlastností vztahu $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

Když platí $\bar{A} \geqq \bar{B}$, aniž by bylo $\bar{A} = \bar{B}$, pak pravíme, že $\bar{A}$ ($\bar{B}$) jest *vlastní* zákryt (zjemnění) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$).

Když $\bar{A} \geqq \bar{B}$, pak ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ existuje podmnožina $\bar{\bar{b}}$ prvků v $\bar{B}$, která jest rozkladem množiny $\bar{a}$; systém podmnožin $\bar{\bar{b}}$, pro $a \in \bar{A}$, jest rozklad rozkladu $\bar{B}$. Naopak, když každý prvek $\bar{a}$ libovolného rozkladu $\bar{A}$ množiny G nahradíme nějakým jeho rozkladem $\bar{\bar{b}}$, obdržíme jakési zjemnění rozkladu $\bar{A}$. Když každý prvek $\bar{b}$ nějakého rozkladu $\bar{\bar{B}}$ libovolného rozkladu $\bar{B}$ množiny G nahradíme množinou $s\bar{b}$, obdržíme jistý zákryt rozkladu $\bar{B}$; o tomto zákrytu pravíme, že jest *vynucen* rozkladem B.

Nechť $\bar{A}$; $\bar{B}$, $\bar{C}$ značí libovolné rozklady množiny G.

·*1. Jest* $\bar{A} \geqq \bar{B}$ *když a jen když pro* $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ *platí* $\bar{a} \supset \bar{b}$.

Vskutku, nechť platí $\bar{A} \geqq \bar{B}$ a nechť $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Pak $\bar{a}$ jest součtem některých podmnožin v G, jež jsou prvky rozkladu $\bar{B}$. Jednou z těchto podmnožin jest $\bar{b}$, neboť $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ a prvky rozkladu $\bar{B}$ jsou disjunktní. Tedy platí $\bar{a} \supset \bar{b}$. — Nechť naopak pro $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ platí $\bar{a} \supset \bar{b}$. Pak $\bar{a}$ jest součtem těch podmnožin v G, které jsou prvky rozkladu $\bar{B}$ a jsou incidentní s $\bar{a}$. Odtud plyne $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

·*2. Platí tyto vztahy:*

1. $\bar{A} \geqq \bar{A}$ (*reflexivnost*);

2. když $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{A}$, *pak* $\bar{A} = \bar{B}$ (*antisymetrie*);

3. když $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{C}$, *pak* $A \geqq \bar{C}$ (*transitivnost*).

Důkaz plyne snadno z definice obsahu znaménka $\geqq$ a z ·*1*.

·*3. Jest* $\bar{G}_{\max} \geqq \bar{A} \geqq \bar{G}_{\min}$.

Důkaz jest snadný.

Věta ·*2* vyjadřuje, že vztah $\geqq$ definuje v každém neprázdném systému rozkladů množiny G částečné uspořádání. Podle ·*3* má takto částečně uspořádaný systém všech rozkladů množiny G největší prvek $\overline{G}_{\max}$ a nejmenší prvek $\overline{G}_{\min}$.

9. Nejmenší společný zákryt a největší společné zjemnění. Nechť $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ značí libovolné rozklady na G.

Nejmenší společný zákryt rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$ jest rozklad na G, který jest určen touto konstrukcí:

Nechť $\overline{a}, \overline{p} \in \overline{A}$ značí libovolné prvky. Uspořádanou konečnou množinu prvků v $\overline{A}$:

$$\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\alpha\}$$

nazveme *řetězec* v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$, když $\overline{a}_1 = \overline{a}, \overline{a}_\alpha = \overline{p}$ a když ke každým dvěma sousedním prvkům $\overline{a}_\beta, \overline{a}_{\beta+1}$ existuje prvek $\overline{b}_\beta \in \overline{B}$, který jest s oběma incidentní. Vztah definovaný pro libovolné dva prvky $\overline{a}, \overline{p} \in \overline{A}$ tím, že existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$ jest zřejmě reflexivní, symetrický a transitivní. Tedy existuje rozklad $\overline{\overline{A}}$ na $\overline{A}$ takový, že pro každé dva prvky v $\overline{A}$, které jsou v témže prvku rozkladu $\overline{\overline{A}}$, existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od jednoho k druhému, kdežto pro žádné dva prvky, které nejsou v témže prvku rozkladu $\overline{\overline{A}}$, neexistuje. Zákryt rozkladu $\overline{A}$ vynucený rozkladem $\overline{\overline{A}}$, jest právě nejmenší společný zákryt rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$; označujeme jej $[\overline{A}, \overline{B}]$.

Z této definice tedy především plyne: $[\overline{A}, \overline{B}] \geqq \overline{A}$.

·*1. Rovnost* $[\overline{A}, \overline{B}] = \overline{A}$ *a vztah* $\overline{A} \geqq \overline{B}$ *platí současně.*

Důkaz. a) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$ značí libovolné incidentní prvky. Neplatí-li $\overline{a} \supset \overline{b}$, pak existuje prvek $\overline{p} \in \overline{A}$, incidentní s $\overline{b}$ a různý od $\overline{a}$. $\{\overline{a}, \overline{p}\}$ jest řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$ a tedy $\overline{a} \vee \overline{p}$ jest částí jistého prvku $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$. Prvek $\overline{u}$ jest tedy součtem alespoň dvou různých prvků rozkladu $\overline{A}$ a tedy není v $\overline{A}$, proti předpokladu. Máme tedy $\overline{a} \supset \overline{b}$ a vychází $\overline{A} \geqq \overline{B}$, podle 8·*1*.

b) Nechť platí vztah $\overline{A} \geqq \overline{B}$. Nechť $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ a nechť $\overline{a} \in \overline{A}$ značí libovolný prvek ležící v $\overline{u}$, takže $\overline{u}$ jest součtem všech prvků $\overline{p} \in \overline{A}$, pro něž existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$:

$$\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\alpha\} \ (\overline{a}_1 = \overline{a}, \overline{a}_\alpha = \overline{p}).$$

Podle definice řetězce existuje ke každým dvěma sousedním prvkům $\overline{a}_\beta, \overline{a}_{\beta+1}$ prvek $\overline{b}_\beta \in \overline{B}$ incidentní s $\overline{a}_\beta, \overline{a}_{\beta+1}$. Podle 8·*1* máme $\overline{b}_\beta \subset \overline{a}_\beta \cap \overline{a}_{\beta+1}$ a odtud plyne $\overline{a}_\beta = \overline{a}_{\beta+1}$, takže $\overline{a} = \overline{p}$. Vychází tedy $\overline{u} = \overline{a}$ a tedy $[\overline{A}, \overline{B}] \leqq \overline{A}$. Protože však současně platí vztah $\geqq$, platí hořejší rovnost.

·*2. Platí tyto rovnosti*:

$$[\overline{A}, \overline{B}] = [\overline{B}, \overline{A}],$$
$$[\overline{A}, \overline{A}] = \overline{A},$$
$$[\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]] = [[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}].$$

Důkaz. a) Nechť $\overline{a}, \overline{p} \in \overline{A}$, $\overline{b}, \overline{q} \in \overline{B}$ značí libovolné prvky a nechť $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset \neq \overline{p} \cap \overline{q}$. Když existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$:

$$\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\alpha\} \ (\overline{a}_1 = \overline{a}, \overline{a}_\alpha = \overline{p}),$$

pak také existuje řetězec v $\{\overline{B}, \overline{A}\}$ od $\overline{b}$ do $\overline{q}$. Neboť pak každé dva sousední prvky $\overline{a}_\beta, \overline{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní s jistým prvkem $\overline{b}_\beta \in \overline{B}$, takže prvky $\overline{b}_\beta, \overline{b}_{\beta+1}$ jsou incidentní s prvkem $\overline{a}_{\beta+1}$ a tedy

$$\{\overline{b}_0, \ldots, \overline{b}_\alpha\} \quad (\overline{b}_0 = \overline{b}, \overline{b}_\alpha = \overline{q})$$

jest takový řetězec.

Nechť nyní pro libovolné prvky $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$, $\overline{v} \in [\overline{B}, \overline{A}]$ platí $\overline{u} \cap \overline{v} \neq \emptyset$. Protože $\overline{u}$ ($\overline{v}$) jest součtem jistých prvků rozkladu $\overline{A}$ ($\overline{B}$), existují prvky $\overline{a} \in \overline{A}, \overline{b} \in \overline{B}$ takové, že $\overline{a} \subset \overline{u}, \overline{b} \subset \overline{v}, \overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Dále leží každý prvek $p \in \overline{u}$ v jistém prvku $\overline{p} \in \overline{A}$ a existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$. Protože rozklad $\overline{B}$ pokrývá G, leží p v jistém prvku $\overline{q} \in \overline{B}$, pro nějž ovšem platí $\overline{p} \cap \overline{q} \neq \emptyset$, a tedy existuje řetězec v $\{\overline{B}, \overline{A}\}$ od $\overline{b}$ do $\overline{q}$. Odtud plyne $\overline{q} \subset \overline{v}$ a tedy také $[\overline{A}, \overline{B}] \leqq [\overline{B}, \overline{A}]$, podle 8·*1*. Současně však z podobných důvodů platí vztah $\geqq$ a tedy vychází $[\overline{A}, \overline{B}] = [\overline{B}, \overline{A}]$, podle 8·*2*.

b) Protože platí $\overline{A} \geqq \overline{A}$, platí také $[\overline{A}, \overline{A}] = \overline{A}$, podle ·*1*.

c) Když některé prvky $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \in \overline{A}$ jsou incidentní s některým prvkem $\overline{t} \in [\overline{B}, \overline{C}]$, pak leží v témže prvku rozkladu $[[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}]$. Neboť pak existují prvky $\overline{b}, \overline{q} \in \overline{B}$ takové, že $\overline{b}, \overline{q} \subset \overline{t}$, $\overline{a}_1 \cap \overline{b} \neq \emptyset \neq \overline{a}_2 \cap \overline{q}$ a existuje řetězec v $\{\overline{B}, \overline{C}\}$ od $\overline{b}$ do $\overline{q}$:

$$\{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_\gamma\} \quad (\overline{b}_1 = \overline{b}, \overline{b}_\gamma = \overline{q}).$$

Každý prvek $\overline{b}_\delta$ tohoto řetězce jest částí jistého prvku $\overline{u}_\delta \in [\overline{B}, \overline{A}] = [\overline{A}, \overline{B}]$, při čemž z hořejších nerovností plyne: $\overline{a}_1 \subset \overline{u}_1$, $\overline{a}_2 \subset \overline{u}_\gamma$. Protože každé dva sousední prvky $\overline{b}_\delta, \overline{b}_{\delta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem $\overline{c}_\delta \in \overline{C}$, jest $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_\gamma\}$ řetězec v $\{[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}\}$ od $\overline{u}_1$ do $\overline{u}_\gamma$. Odtud plyne, že prvky $\overline{u}_1, \overline{u}_\gamma$ a tedy i prvky $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ leží v témže prvku rozkladu $[[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}]$.

Nechť nyní pro libovolné prvky $\overline{u} \in [\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]]$, $\overline{v} \in [[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}]$ platí $\overline{u} \cap \overline{v} \neq \emptyset$. Pak existuje prvek $\overline{a} \in \overline{A}, \overline{a} \subset \overline{u} \cap \overline{v}$ a $\overline{u}$ jest součtem všech prvků $\overline{p} \in \overline{A}$, pro něž existuje řetězec v $\{\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$:

$$\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\alpha\} \quad (\overline{a}_1 = \overline{a}, \overline{a}_\alpha = \overline{p}).$$

Každé dva sousední prvky $\overline{a}_\beta, \overline{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem rozkladu $[\overline{B}, \overline{C}]$ a tedy leží v témže prvku rozkladu $[[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}]$. Odtud plyne $\overline{p} \subset \overline{v}$, neboť jest $\overline{a} \subset \overline{v}$. Vychází tedy $\overline{u} \subset \overline{v}$ a tedy $[\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]] \leqq [[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}]$, podle 8·*1*. Odtud a z a) pak plyne dále:

$$[\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]] \leqq [[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}] = [\overline{C}, [\overline{A}, \overline{B}]] \leqq [[\overline{C}, \overline{A}], \overline{B}] = [\overline{B}, [\overline{C}, \overline{A}]] \leqq$$
$$\leqq [[\overline{B}, \overline{C}], \overline{A}] = [\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]],$$

takže máme $[\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]] = [[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}]$ a důkaz jest ukončen.

Podle první rovnosti ·*2* jest nejmenší společný zákryt rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$ týž, jako nejmenší společný zákryt rozkladu $\overline{B}$ a rozkladu $\overline{A}$. Proto platí vedle vztahu $[\overline{A}, \overline{B}] \geqq \overline{A}$, také vztah $[\overline{A}, \overline{B}] \geqq \overline{B}$, takže $[\overline{A}, \overline{B}]$ jest skutečně *společný* zákryt rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$. Z téhož důvodu mluvíme zpravidla o nejmenším společném zákrytu rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$, nerozlišujíce jejich pořádek.

Když $\overline{X}$ značí libovolný společný zákryt rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$, takže platí

$$[\overline{X}, \overline{A}] = \overline{X}, \quad [\overline{X}, \overline{B}] = \overline{X},$$

pak podle třetí rovnosti ·*2* máme

$$[\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]] \doteq [[\overline{X}, \overline{A}], \overline{B}] = [\overline{X}, \overline{B}] = \overline{X}$$

a vidíme, že $\overline{X}$ jest zákryt rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$. Každý společný zákryt rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$ jest tedy zákrytem rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$; tato vlastnost rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$ jest v jeho názvu vyjádřena přívlastkem *nejmenší*.

Největší společné zjemnění rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$ jest rozklad na G, který obdržíme, když každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ nahradíme jeho rozkladem $\bar{a} \sqcap \overline{B}$; označujeme jej $(\overline{A}, \overline{B})$.

Z této definice tedy především plyne $(\overline{A}, \overline{B}) \leqq \overline{A}$.

·*3. Rovnost $(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A}$ a vztah $\overline{A} \leqq \overline{B}$ platí současně.*

Důkaz. a) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{b} \in \overline{B}$ značí libovolné prvky a nechť $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Pak $\bar{a} \cap \bar{b} \in \bar{a} \sqcap \overline{B} \subset (\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A}$ a tedy $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$. Odtud plyne $\bar{a} \subset \bar{b}$ a tedy $\overline{A} \leqq \overline{B}$, podle 8·*1*.

b) Nechť platí vztah $\overline{A} \leqq \overline{B}$. Pak každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ jest částí jistého prvku rozkladu $\overline{B}$ a tedy $\bar{a} \sqcap \overline{B}$ se skládá z jediného prvku $\bar{a}$. Odtud plyne $(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A}$.

·*4. Platí tyto rovnosti*:

$$(\overline{A}, \overline{B}) = (\overline{B}, \overline{A}),$$
$$(\overline{A}, \overline{A}) = \overline{A},$$
$$(\overline{A}, (\overline{B}, \overline{C})) = ((\overline{A}, \overline{B}), \overline{C}).$$

Důkaz. a) Každý prvek $\bar{v} \in (\overline{A}, \overline{B})$ jest prvkem rozkladu $\bar{a} \sqcap \overline{B}$, kde $\bar{a}$ značí některý prvek v $\overline{A}$, takže $\bar{v} = \bar{a} \cap \bar{b}$, kde $\bar{b} \in \overline{B}$. Odtud pak plyne $\bar{v} \in \bar{b} \sqcap \overline{A} \subset (\overline{B}, \overline{A})$. Máme tedy $(\overline{A}, \overline{B}) \subset (\overline{B}, \overline{A})$ a z podobných důvodů platí vztah $\supset$.

b) Protože platí vztah $\overline{A} \leqq \overline{A}$, platí také $(\overline{A}, \overline{A}) = \overline{A}$, podle ·*3*.

c) Nechť $\bar{v} \in (\overline{A}, (\overline{B}, \overline{C}))$, takže $\bar{v} \in \bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c})$, kde $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{b} \in \overline{B}$, $\bar{c} \in \overline{C}$. Protože platí $\bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c}) = (\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c} \in ((\overline{A}, \overline{B}), \overline{C})$, vidíme, že platí vztah $(\overline{A}, (\overline{B}, \overline{C})) \subset ((\overline{A}, \overline{B}), \overline{C})$. Odtud a z a) plyne snadno, že současně platí vztah $\supset$.

Podle první rovnosti ·*4* jest největší společné zjemnění rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$ totéž, jako největší společné zjemnění rozkladu $\overline{B}$ a rozkladu $\overline{A}$. Proto platí vedle vztahu $(\overline{A}, \overline{B}) \leqq \overline{A}$ také vztah $(\overline{A}, \overline{B}) \leqq \overline{B}$, takže $(\overline{A}, \overline{B})$ jest skutečně *společné* zjemnění rozkladu $\overline{A}$ a rozkladu $\overline{B}$. Z téhož důvodu mluvíme zpravidla o největším společném zjemnění rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$ nerozlišujíce jejich pořádek.

Když $\overline{Z}$ značí libovolné společné zjemnění rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$, takže

$$(\overline{Z}, \overline{A}) = \overline{Z}, \quad (\overline{Z}, \overline{B}) = \overline{Z},$$

pak podle třetí rovnosti ·*4* máme

$$(\overline{Z}, (\overline{A}, \overline{B})) = ((\overline{Z}, \overline{A}), \overline{B}) = (\overline{Z}, \overline{B}) = \overline{Z}$$

a vidíme, že $\bar{Z}$ jest zjemnění rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$. Každé společné zjemnění rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ jest tedy zjemněním rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$; tato vlastnost rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$ jest v jeho názvu vyjádřena přívlastkem *největší*.

$\cdot 5$. *Platí rovnosti*:

$$[\bar{A}, (\bar{A}, \bar{B})] = \bar{A}, \quad (\bar{A}, [\bar{A}, \bar{B}]) = \bar{A}.$$

Vskutku, ze vztahu $\bar{A} \geqq (\bar{A}, \bar{B})$ a z $\cdot 1$ plyne první rovnost a z $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}$ a z $\cdot 3$ druhá.

10. Modulární rozklady. Nechť $\bar{X} \geqq \bar{A}$ a $\bar{B}$ jsou libovolné rozklady na G.

$\cdot 1$. *Platí vztahy*

$$[\bar{X}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}], \quad (\bar{X}, \bar{B}) \geqq (\bar{A}, \bar{B}).$$

Důkaz. a) Nechť $\bar{r} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, $\bar{u} \in [\bar{X}, \bar{B}]$ a nechť $\bar{r} \cap \bar{u} \neq \emptyset$. Prvek $\bar{r}$ jest součtem jistých prvků rozkladu $\bar{A}$ a protože $\bar{X} \geqq \bar{A}$, platí totéž o prvku $\bar{u}$ a tedy existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{a} \subset \bar{r} \cap \bar{u}$. $\bar{r}$ jest součtem všech prvků $\bar{p} \in \bar{A}$, pro něž existuje řetězec v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$:

$$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\} \quad (\bar{a}_1 = \bar{a}, \bar{a}_\alpha = \bar{p}).$$

Podle předpokladu $\bar{X} \geqq \bar{A}$ jest každý prvek $\bar{a}_\beta$ tohoto řetězce částí jistého prvku $\bar{x}_\beta \in \bar{X}$ a zejména jest $\bar{a} \subset \bar{x}_1 \subset \bar{u}$, $\bar{p} \subset \bar{x}_\alpha$. Protože každé dva sousední prvky $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$, platí totéž o prvcích $\bar{x}_\beta, \bar{x}_{\beta+1}$ a tedy

$$\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\alpha\}$$

jest řetězec v $\{\bar{X}, \bar{B}\}$ od $\bar{x}_1$ do $\bar{x}_\alpha$. Odtud plyne $(\bar{p} \subset)\, \bar{x}_\alpha \subset \bar{u}$ a vychází $\bar{r} \subset \bar{u}$. První vztah jest tedy správný, podle $8 \cdot 1$.

b) Nechť $\bar{s}$ jest libovolný prvek rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$, takže $\bar{s} = \bar{a} \cap \bar{b}$, kde $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Protože platí $\bar{X} \geqq \bar{A}$, jest prvek $\bar{a}$ částí jistého prvku $\bar{x} \in \bar{X}$ a tedy $(\bar{v} =)\, \bar{x} \cap \bar{b} \supset \bar{a} \cap \bar{b}$. Odtud vidíme, že $\bar{v}$ jest prvkem rozkladu $(\bar{X}, \bar{B})$ a obsahuje prvek $\bar{s}$ a tím jest zjištěna správnost druhého vztahu.

$\cdot 2$. *Platí vztah*

$$(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \geqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})].$$

Vskutku, především podle $\cdot 1$ plyne ze vztahu $\bar{B} \geqq (\bar{X}, \bar{B})$ vztah $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$ a tedy platí rovnost

$$([\bar{A}, \bar{B}], [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]) = [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})].$$

Dále máme $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{X} \geqq (\bar{X}, \bar{B})$ a tedy také $\bar{X} \geqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$. Odtud pak plyne opět podle $\cdot 1$: $(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \geqq ([\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})], [\bar{A}, \bar{B}])$ a podle hořejší rovnosti jest rozklad na pravé straně roven rozkladu $[\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$.

Zde se naskýtá otázka, zda ve vztahu $\cdot 2$ neplatí vždycky znaménko rovnosti. Že *neplatí*, vyplývá z druhého příkladu na str. 13.

Když pro rozklady $\bar{X} \geqq \bar{A}$ a $\bar{B}$ platí rovnost

$$(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) = [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})],$$

nazývá se rozklad

$$\begin{array}{l} \bar{B} \ \textit{α-modulární vzhledem k } \bar{X}, \bar{A}, \\ \bar{A} \ \textit{β-modulární vzhledem k } \bar{X}, \bar{B}, \\ \bar{X} \ \textit{γ-modulární vzhledem k } \bar{A}, \bar{B}. \end{array}$$

·*3. Když* $\bar{X} = \bar{A}$ *anebo* $\bar{X} = \bar{G}_{\max}$, *pak rozklad* $\bar{B}$ *jest α-modulární vzhledem k* $\bar{X}, \bar{A}$.

Důkaz jest snadný.

11. Svazy rozkladů. Každý neprázdný systém rozkladů na G, $\mathbf{A}$ vyznačující se tím, že ze vztahů $\bar{A}, \bar{B} \in \mathbf{A}$ plyne $[\bar{A}, \bar{B}]$,· $(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathbf{A}$ jest svazem vzhledem k těmto operacím [], ().[2]) To vyplývá bezprostředně z vět 9·*2*·*4*·*5*. Zejména jest systém všech rozkladů množiny G takovým svazem. Tento t. zv. *největší* svaz rozkladů na G obsahuje podle 8·*3* největší prvek $\bar{G}_{\max}$ a nejmenší prvek $\bar{G}_{\min}$.

Teorie svazů rozkladů na množině jest ovšem podřazena obecné teorii svazů.[3]) Avšak tato obecná teorie, alespoň pokud není specialisována dalšími postuláty, zdaleka nevyčerpává vlastnosti svazů rozkladů, protože ke vztahům mezi rozklady jako prvky svazu, o nichž jedná, přistupují vztahy mezi prvky jednotlivých rozkladů.

II. Doplňkové rozklady.

12. Definice. Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ značí libovolné rozklady na G.

Podle definice nejmenšího společného zákrytu $[\bar{A}, \bar{B}]$ jest každý prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ součtem jistých prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ a současně jest součtem jistých prvků $\bar{b} \in \bar{B}$. Rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) nazýváme *doplňkový* k rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$) a o rozkladech $\bar{A}, \bar{B}$ pravíme, že jsou doplňkové, když každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ ležící v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ jsou incidentní. Když na př. $\bar{A}$ jest zákryt rozkladu $\bar{B}$, pak rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové.

Vztah mezi dvěma rozklady na G daný tím, že oba rozklady jsou doplňkové, jest zřejmě reflexivní a symetrický. Naproti tomu *není* transitivní.

---

[2]) Neprázdná množina G spolu se dvěma operacemi přiřazujícími ke každé uspořádané dvojici prvků $a, b \in G$ další dva prvky v G, t. zv. *spojení* $[a, b]$ a *průnik* (a, b) prvku a a prvku b, se nazývá *svaz*, když pro $a, b, c \in G$ platí tyto rovnosti:

$$\begin{array}{ll} [a, b] = [b, a], & (a, b) = (b, a), \\ [a, a] = a, & (a, a) = a, \\ [a, [b, c]] = [[a, b], c], & (a, (b, c)) = ((a, b), c), \\ (a, [a, b]) = a, & [a, (a, b)] = a. \end{array}$$

Jinými slovy, svaz jest dvojice soumístných komutativních, asociativních a jenom z idempotentních prvků se skládajících grupoidů, jejichž násobení souvisí podle hořejších vzorců v posledním řádku. Viz na př. Ø. Ore, *On the decomposition theorems of algebra* [C. R. du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936].

[3]) Na př. jsou názvy modulárních rozkladů (odst. 10) převzaty z obecné teorie svazů. Viz V. Kořínek, *Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden* [Věst. Král. čes. spol. nauk. Tř. matemat.-přírodověd. Ročník 1941].

Příklad. Nechť $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ jsou neprázdné disjunktní množiny. Jejich součet označme G. Označme dále

$$\bar{a}_1 = A_1 \vee A_2,\ \bar{a}_2 = A_3 \vee A_4,\ \bar{a}_3 = A_5 \vee A_6;$$
$$\bar{b}_1 = A_1 \vee A_3 \vee A_5,\ \bar{b}_2 = A_2 \vee A_4 \vee A_6;$$
$$\bar{c}_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3,\ \bar{c}_2 = A_4 \vee A_5 \vee A_6;$$

takže na G máme rozklady

$$\bar{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\},\ \bar{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\},\ \bar{C} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}.$$

Každý prvek $\bar{a}_\alpha$ jest incidentní s každým prvkem $\bar{b}_\beta$ a každý prvek $\bar{b}_\beta$ jest incidentní s každým prvkem $\bar{c}_\gamma$. Odtud plyne, že rozklad $\bar{A}$ jest doplňkový s $\bar{B}$ a rozklad $\bar{B}$ s $\bar{C}$. Dále jsou oba prvky $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ incidentní s prvkem $\bar{a}_2$ a tedy nejmenší společný zákryt rozkladů $\bar{A}, \bar{C}$ se skládá z jediného prvku G; dále vidíme, že na př. prvky $\bar{a}_1, \bar{c}_2$ incidentní nejsou. Odtud plyne, že rozklad $\bar{A}$ není doplňkový s $\bar{C}$.

13. Charakteristické vlastnosti. Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ značí libovolné rozklady na G.

·1. *Když každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ ležící v témže prvku nějakého společného zákrytu $\bar{C}$ rozkladů $\bar{A}$ $\bar{B}$ jsou incidentní, pak $\bar{C} = [\bar{A}, \bar{B}]$ a tedy rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové.*

Vskutku, nechť $\bar{C}$ značí nějaký společný zákryt rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ a nechť $\bar{c} \in \bar{C}$. Pak $\bar{c}$ jest součtem jistých prvků rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$. Nechť $\bar{u}, \bar{v}$ značí prvky rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ ležící v $\bar{c}$. Každý prvek $\bar{a}_1 \in \bar{A}$ ležící v $\bar{u}$ jest incidentní s některým prvkem $\bar{b} \in \bar{B}$, který pak nutně leží v $\bar{u}$ a tedy v $\bar{c}$. Mají-li rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ výše popsanou vlastnost, pak prvek $\bar{b}$ jest incidentní s každým prvkem $\bar{a}_2 \in \bar{A}$ ležícím ve $\bar{v}$ a tedy $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ jest řetězec v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_2$; odtud plyne $\bar{v} = \bar{u}$ a tedy $\bar{c} = \bar{u}$.

·2. *Rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové, když a jen když pro každé dva prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ ležící v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, platí rovnost $\bar{a}_1 \sqsubset \bar{B} = \bar{a}_2 \sqsubset \bar{B}$.*

Důkaz. a) Nechť rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové. Když některý prvek $\bar{b} \in \bar{B}$ jest incidentní s $\bar{a}_1$, pak leží v $\bar{u}$ a tedy jest incidentní s $\bar{a}_2$. Odtud vychází $\bar{a}_1 \sqsubset \bar{B} \subset \bar{a}_2 \sqsubset \bar{B}$ a podobně plyne $\bar{a}_2 \sqsubset \bar{B} \subset \bar{a}_1 \sqsubset \bar{B}$.

b) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Prvek $\bar{b}$ jest incidentní s některým prvkem $\bar{x} \in \bar{A}$ a tento prvek leží v $\bar{u}$. Tedy máme $\bar{b} \in \bar{x} \sqsubset \bar{B} = \bar{a} \sqsubset \bar{B}$ a odtud vychází, že prvky $\bar{a}, \bar{b}$ jsou incidentní.

14. Další vlastnosti. Nechť rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové.

·1. *Pro $\bar{a} \in \bar{A}$ máme $\bar{u} = \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$, kde $\bar{u}$ značí onen prvek v $[\bar{A}, \bar{B}]$, který obsahuje $\bar{a}$.*

Vskutku, každý prvek $u \in \bar{u}$ jest v některém prvku $\bar{b} \in \bar{B}$, který leží v $\bar{u}$. Protože rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové, jsou prvky $\bar{a}, \bar{b}$ incidentní a tedy $\bar{b} \in \bar{a} \sqsubset \bar{B}$. Odtud plyne $u \in \bar{b} \subset \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$ a vychází $\bar{u} \subset \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$. Každý prvek $a \in \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$ jest v některém prvku $\bar{b} \in \bar{B}$, který jest incidentní s $\bar{a}$. Tento prvek $\bar{b}$ jest částí prvku $\bar{u}$. Odtud plyne $a \in \bar{u}$ a vidíme, že $\mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B}) \subset \bar{u}$.

$\cdot 2$. *Když pro nějaký rozklad $\bar{C}$ množiny G platí vztahy $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{C} \geqq \bar{A}$, pak také rozklady $\bar{C}, \bar{B}$ jsou doplňkové.*

Vskutku, nechť $\bar{C}$ značí libovolný rozklad množiny G, pro nějž platí hořejší vztahy. Z nich plyne, podle **9**$\cdot 2$ a **10**$\cdot 1$, $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq [\bar{C}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$ a odtud vidíme, že platí rovnost $[\bar{C}, \bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$. Nechť prvky $\bar{c} \in \bar{C}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{C}, \bar{B}]$. Z rovnosti $[\bar{C}, \bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$ plyne, že prvky $\bar{c}, \bar{b}$ leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Protože platí vztahy $\bar{C} \geqq \bar{A}$, jest prvek $\bar{c}$ součtem některých prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ a protože rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové, jsou prvky $\bar{a}, \bar{b}$ incidentní; odtud vidíme, že prvky $\bar{c}, \bar{b}$ jsou incidentní.

$\cdot 3$. *Pro $\bar{X} \geqq \bar{A}$ jest rozklad $\bar{A}$ doplňkový také s $(\bar{X}, \bar{B})$.*

Důkaz. Nechť $\bar{u} \in [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$. Máme ukázati, že dva libovolné prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b}' \in (\bar{X}, \bar{B})$, které leží v $\bar{u}$, jsou incidentní. Podle **10**$\cdot 2$ jest $\bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$, kde $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ a podle definice $\bar{b}'$ jest $\bar{b}' = \bar{x}' \cap \bar{b}$, kde $\bar{x}' \in \bar{X}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Ze vztahů $\bar{x}' \cap \bar{b} \subset \bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$ plyne $\bar{x}' = \bar{x}$ a dále $\bar{b} \subset \bar{w}$. Mimoto máme $\bar{a} \subset \bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$. Ze vztahů $\bar{a}, \bar{b} \subset \bar{w}$ pak plyne $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, neboť rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové, a dále ze vztahu $\bar{a} \subset \bar{x} : \bar{a} \cap \bar{b} = (\bar{a} \cap \bar{x}) \cap \bar{b} = \bar{a} \cap (\bar{x} \cap \bar{b}) = \bar{a} \cap \bar{b}'$. Vychází tedy $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$ a tím jest důkaz proveden.

$\cdot 4$. *Pro $\bar{A} \geqq \bar{Z}$ jest rozklad $\bar{A}$ doplňkový také s $[\bar{Z}, \bar{B}]$.*

Důkaz. Nechť $\bar{u} \in [\bar{A}, [\bar{Z}, \bar{B}]]$. Máme ukázati, že libovolné dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b}' \in [\bar{Z}, \bar{B}]$, které leží v $\bar{u}$, jsou incidentní. Z rovnosti $[\bar{A}, [\bar{Z}, \bar{B}]] = [[\bar{A}, \bar{Z}], \bar{B}]$ plyne $[\bar{A}, [\bar{Z}, \bar{B}]] = [\bar{A}, \bar{B}]$, neboť $\bar{A} \geqq \bar{Z}$ a tedy $[\bar{A}, \bar{Z}] = \bar{A}$. Odtud vidíme, že $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Podle definice jest prvek $\bar{b}'$ součtem jistých prvků $\bar{b} \in \bar{B}$ a všechny tyto prvky leží v $\bar{u}$, neboť $\bar{b}'$ leží v $\bar{u}$. Protože rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové, jest každý prvek $\bar{b}$ a tedy i jejich součet $\bar{b}'$ incidentní s $\bar{a}$ a důkaz jest proveden.

Obsah vět $\cdot 3$ a $\cdot 4$ můžeme vyjádřiti také takto:

Když dva rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ na G jsou doplňkové, pak každý z nich, na př. $\bar{A}$, jest doplňkový

1. *s největším společným zjemněním rozkladu $\bar{B}$ a libovolného rozkladu ležícího na $\bar{A}$,*
2. *s nejmenším společným zákrytem rozkladu $\bar{B}$ a libovolného rozkladu ležícího pod $\bar{A}$.*

15. Modulárnost. Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ opět značí doplňkové rozklady na G.

$\cdot 1$. *Pro $\bar{X} \geqq \bar{A}$ jest rozklad $\bar{B}$ α-modulární vzhledem k $\bar{X}, \bar{A}$.*

Důkaz. Podle **10**$\cdot 2$ stačí dokázati platnost vztahu

$$(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \leqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})].$$

Nechť $\bar{u}' \in (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}])$, takže $\bar{u}' = \bar{x} \cap \bar{u}$, kde $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Prvek $\bar{u}$ jest součtem jistých prvků rozkladu $\bar{A}$, z nichž některé, $\bar{a}$, jsou incidentní s $\bar{x}$, kdežto ostatní, jsou-li jaké, jsou s $\bar{x}$ disjunktní. Protože platí $\bar{X} \geqq \bar{A}$, máme pro každý prvek $\bar{a}$: $\bar{x} \supset \bar{a}$ a odtud plyne dále $\bar{u}' = \Sigma \bar{a}$, kde součtový symbol se vztahuje na všechny prvky $\bar{a}$. K ukončení důkazu zbývá zjistiti, že pro každé dva prvky $\bar{a}$ existuje řetězec v $\{\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})\}$ od jednoho k druhému. Nechť tedy $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ jsou libovolné prvky $\bar{a}$, takže $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{x} \cap \bar{u}$. Protože rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové a $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{u}$, existuje prvek $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{b} \subset \bar{u}$, který jest s prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ incidentní: $\bar{a}_1 \cap \bar{b}, \bar{a}_2 \cap \bar{b} \neq \emptyset$; protože pak $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{x}$, máme $\bar{a}_1 \cap \bar{b} = \bar{a}_1 \cap (\bar{x} \cap \bar{b})$, $\bar{a}_2 \cap \bar{b} = \bar{a}_2 \cap (\bar{x} \cap \bar{b})$. Odtud vidíme, že prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ jsou incidentní s prvkem $\bar{x} \cap \bar{b} \in (\bar{X}, \bar{B})$ a tedy, že $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ jest řetězec v $\{\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})\}$ od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_2$.

Obsah věty *·1* můžeme vyjádřiti také tím, že *když dva rozklady na G jsou doplňkové, pak každý z nich jest α-modulární vzhledem k libovolnému zákrytu rozkladu druhého a tomuto druhému rozkladu.*

Věta *·1* se obrátiti nedá: *Když $\bar{A}, \bar{B}$ jsou libovolné rozklady na G a jeden z nich, na př. $\bar{B}$, jest α-modulární vzhledem ke každému zákrytu $\bar{X}$ rozkladu $\bar{A}$ a rozkladu $\bar{A}$, pak rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ nejsou nutně doplňkové.*

Příklad. Nechť A_1, A_2, A_3, A_4 jsou neprázdné disjunktní množiny; jejich součet označme G. Nechť dále

$$\bar{a}_1 = A_1 \vee A_2,\ \bar{a}_2 = A_3 \vee A_4,$$
$$\bar{b}_1 = A_1,\ \bar{b}_2 = A_2 \vee A_3,\ \bar{b}_3 = A_4,$$

takže na G máme rozklady

$$\bar{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}, \quad \bar{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}.$$

Zřejmě jest $[\bar{A}, \bar{B}] = \{G\}$. Odtud a z toho, že na př. prvky $\bar{a}_1$ a $\bar{b}_3$ nejsou incidentní vidíme, že rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ nejsou doplňkové.

Celkem existují jenom dva zákryty rozkladu $\bar{A}$: nejmenší zákryt $\bar{X}_1 = \bar{A}$ a největší zákryt $\bar{X}_2 = \bar{G}_{\max}$. Podle **10**·*3* jest rozklad $\bar{B}$ α-modulární vzhledem k $\bar{X}_1$ a $\bar{A}$ a rovněž vzhledem k $\bar{X}_2$ a $\bar{A}$.

Poznámka. Podle *·1* stačí k docílení rovnosti ve vztahu **10**·*2* předpoklad, že rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové. Naproti tomu nestačí předpokládati, že jsou doplňkové rozklady $\bar{X}, \bar{B}$.

Příklad. Nechť opět A_1, A_2, A_3, A_4 jsou neprázdné disjunktní množiny; jejich součet označme G. Nechť dále značí

$$\bar{x}_1 = A_1 \vee A_2,\ \bar{x}_2 = A_3 \vee A_4;$$
$$\bar{a}_1 = A_1 \vee A_2,\ \bar{a}_2 = A_3,\ \bar{a}_3 = A_4;$$
$$\bar{b}_1 = A_1 \vee A_3,\ \bar{b}_2 = A_2 \vee A_4,$$

takže na G máme rozklady

$$\bar{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}, \quad \bar{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}, \quad \bar{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}.$$

Zřejmě jest $\bar{X} \geq \bar{A}$. Rozklady $\bar{X}, \bar{B}$ jsou doplňkové, neboť každý prvek rozkladu jednoho jest incidentní s každým prvkem rozkladu druhého. Dále máme $[\bar{A}, \bar{B}] = \{G\}$, $(\bar{X}, \bar{B}) = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, takže

$$(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) = \bar{X}, \quad [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})] = \bar{A}.$$

Nechť $\overline{X}$ značí libovolný zákryt rozkladu $\overline{A}$ a $\overline{Y}$ libovolný zákryt rozkladu $\overline{B}$, takže $\overline{X} \geqq \overline{A}$, $\overline{Y} \geqq \overline{B}$.

Podle ·*1* platí rovnosti

$$(\mathring{A} =) \ [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})] = (\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]),$$
$$(\mathring{B} =) \ [\overline{B}, (\overline{Y}, \overline{A})] = (\overline{Y}, [\overline{B}, \overline{A}]),$$

takže máme vztahy

$$\overline{X} \geqq \mathring{A} \geqq \overline{A}, \quad \overline{Y} \geqq \mathring{B} \geqq \overline{B}.$$

Mimoto dokážeme tuto větu:

·*2. Platí rovnosti:*

$$(\overline{X}, \mathring{B}) = (\overline{Y}, \mathring{A}) = [(\overline{X}, \overline{B}), (\overline{Y}, \overline{A})].$$

Vskutku, protože jest $\overline{X} \geqq \overline{A}$ a rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ jsou doplňkové, jsou podle **14**·*3* doplňkovými také rozklady $\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})$. Odtud a ze vztahu $\overline{Y} \geqq (\overline{X}, \overline{B})$ plyne podle ·*1*: $(\overline{Y}, \mathring{A}) = (\overline{Y}, [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})]) = [(\overline{Y}, \overline{A}), (\overline{X}, \overline{B})]$. Podobně odvodíme, že jsou doplňkovými rozklady $\overline{B}, (\overline{Y}, \overline{A})$ a odtud a ze vztahu $\overline{X} \geqq (\overline{Y}, \overline{A})$ plyne druhá rovnost.

16. Lokální vlastnosti. Nechť opět $\overline{X} \geqq \overline{A}$, $\overline{Y} \geqq \overline{B}$ značí rozklady na G a rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ nechť jsou doplňkové. Symboly $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ nechť značí tytéž rozklady jako v **15**·*2*.

Nechť $g \in G$ značí libovolný prvek v G a nechť $\bar{x} \in \overline{X}$, $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{y} \in \overline{Y}$, $\bar{b} \in \overline{B}$ jsou ony prvky našich rozkladů, které obsahují prvek g.

Jest zřejmé, že $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ jsou rozklady v G.

·*1. Rozklady* $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ *jsou spřažené.*

Vskutku, nechť $\mathring{a} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, takže prvek $\mathring{a}$ leží v $\bar{x}$ a jest incidentní s $\bar{y}$. Podle **15**·*2* existuje jistý prvek $\mathring{b} \in \mathring{B}$ takový, že $\bar{x} \cap \mathring{b} = \bar{y} \cap \mathring{a}$; z této rovnosti plyne, že $\mathring{b}$ leží v $\bar{y}$ a jest incidentní s $\bar{x}$, takže $\mathring{b} \in (\bar{y} \cap \bar{x}) \sqsubset \mathring{B}$. Libovolný prvek $\mathring{z} \in (\bar{y} \cap \bar{x}) \sqsubset \mathring{B}$ jest incidentní s $\mathring{a}$, když a jen když jest incidentní s $\bar{y} \cap \mathring{a}$ a tedy s $\mathring{b}$; odtud plyne $\mathring{z} = \mathring{b}$. Podobně se zjistí, že každý prvek rozkladu $(\bar{y} \cap \bar{x}) \sqsubset \mathring{B}$ jest incidentní s jediným prvkem rozkladu $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$.

Označme dále

$$\overline{X}^g = \bar{x} \sqsubset \overline{A} \ (= \overline{A} \sqcap \bar{x}), \quad \overline{Y}^g = \bar{y} \sqsubset \overline{B} \ (= \overline{B} \sqcap \bar{y}),$$

takže $\overline{X}^g$ jest rozklad na $\bar{x}$ a $\bar{a}$ jest jeho prvkem a podobně $\overline{Y}^g$ jest rozklad na $\bar{y}$ a obsahuje $\bar{b}$ jako prvek.

·*2. Rozklady* $\overline{X}^g$, $\overline{Y}^g$ *jsou sdružené vzhledem k* $\bar{a}, \bar{b}$.

Důkaz. Máme ukázati, že platí rovnost

$$\mathrm{s}(\bar{b} \sqsubset \overline{X}^g \sqcap \bar{y}) = \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \overline{Y}^g \sqcap \bar{x}). \tag{1}$$

Nechť $\mathring{a}$ ($\mathring{b}$) značí onen prvek rozkladu $\mathring{A}$ ($\mathring{B}$), který obsahuje prvek g. Podle **14**·*3* jsou rozklady $\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})$ doplňkové a rozklad $\mathring{A}$ jest podle své definice jejich nejmenším společným zákrytem; odtud plyne podle **14**·*1*

$$\mathring{a} = \mathrm{s}((\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \overline{A}).$$

Protože $\bar{X} \geqq \bar{A}$, skládá se rozklad $(\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A}$ právě z oněch prvků rozkladu $\bar{A}$, které leží v $\bar{x}$ a jsou incidentní s $\bar{b}$, takže $(\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A} = \bar{b} \sqsubset \bar{X}^g$. Odtud plyne $\mathrm{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^g) = \mathring{a}$ a dále

$$\mathrm{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^g \sqcap \bar{y}) = \mathrm{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^g) \cap \bar{y} = \mathring{a} \cap \bar{y} \in (\bar{Y}, \mathring{A}),$$

při čemž poslední vztah jest odůvodněn tím, že $\mathring{a} \cap \bar{y} \supset \{g\} \neq \emptyset$. Odtud vidíme, že $\mathrm{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^g \sqcap \bar{y})$ jest prvkem rozkladu $(\bar{Y}, \mathring{A})$ a to tím, který obsahuje prvek g. Podobně zjistíme, že $\mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{Y}^g \sqcap \bar{x})$ jest prvkem rozkladu $(\bar{X}, \mathring{B})$, který obsahuje prvek g. Odtud a z **15**·*2* vychází, že platí rovnost (1).

17. Doplňkové rozklady grup. Příkladem doplňkových rozkladů jsou rozklady grup vytvořené invariantními podgrupami. Ukážeme, že skutečně rozklady každé grupy ve třídy vzhledem ke dvěma invariantním podgrupám jsou doplňkové.

Nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolnou grupu. Označme G její pole, t. j. množinu prvků z nichž se skládá, a A, B pole libovolných podgrup invariantních v $\mathfrak{G}$.

Dokážeme nejprve tuto pomocnou větu:

Nechť $g \in G$, $a \in A$, $b \in B$ značí libovolné prvky v G. Pak platí

$$gbA \cap gaB = gba(A \cap B).$$

Důkaz. Ze vztahů $gba(A \cap B) \subset gbaA = gbA$, $gba(A \cap B) = gb(A \cap \cap B)a \subset gbBa = gaB$ plyne především, že pravá strana hořejší rovnosti jest částí levé. Dále jest každý prvek x levé strany tvaru $gba' = gb'a$, kde $a' \in A$, $b' \in B$ a odtud plyne $(y =)\, a'a^{-1} = b^{-1}b' \in A \cap B$, takže $x = gba' = gbya \in \in gba(A \cap B)$; vidíme tedy, že současně levá strana naší rovnosti jest částí pravé.

Nechť dále značí G/A, G/B, G/AB rozklady grupy $\mathfrak{G}$ vytvořené příslušnými podgrupami. Všimněme si, že ze vztahů $A, B \subset AB$ plyne gA, $gB \subset gAB$ pro každý prvek $g \in G$, takže *rozklad G/AB jest společný zákryt rozkladů G/A, G/B.*

·*1. Libovolné dva prvky $\bar{a} \in G/A$, $\bar{b} \in G/B$ jsou incidentní, když a jen když leží v témže prvku rozkladu G/AB.*

Důkaz. a) Nechť libovolné prvky $\bar{a} \in G/A$, $\bar{b} \in G/B$ leží v témže prvku $gAB \in G/AB$, kde $g \in G$. Pak $\bar{a} = gbA$, $\bar{b} = gaB$, kde a, b jsou vhodné prvky v A, B, takže podle hořejší pomocné věty máme: $\bar{a} \cap \bar{b} = gba(A \cap B) \neq \emptyset$.

b) Nechť prvky $(\bar{a} =)\, gA \in G/A$, $(\bar{b} =)\, hB \in G/B$, kde $g, h \in G$, jsou incidentní. Pak existují prvky $a \in A$, $b \in B$ takové, že $ag = bh$ a máme $hg^{-1} = b^{-1}a \in AB$. Odtud plyne $hAB = gAB$ a protože $gA \subset gAB$, $hB \subset hAB$, vychází $\bar{a}, \bar{b} \subset gAB \in G/AB$.

·*2. Rozklady G/A, G/B jsou doplňkové.*

Vskutku, podle ·*1* a **13**·*1* jest G/AB nejmenší společný zákryt rozkladů G/A, G/B a tyto rozklady jsou doplňkové.

Poznámky. 1. Jak jsme právě viděli, *jest nejmenší společný zákryt obou rozkladů G/A, G/B rozklad G/AB.* Dále plyne z předcházejících úvah, že *jejich největší společné zjemnění jest rozklad $G/(A \cap B)$.* Vskutku, každý prvek tohoto zjemnění jest tvaru $\bar{a} \cap \bar{b}$, kde $\bar{a} \in G/A$, $\bar{b} \in G/B$. Podle ·*1* leží prvky $\bar{a}, \bar{b}$ v témže prvku rozkladu G/AB, takže $\bar{a} = gbA$, $\bar{b} = gaB$, kde $g \in G$, $a \in A$, $b \in B$. Podle pomocné věty pak máme $\bar{a} \cap \bar{b} = gba(A \cap B) \in G/(A \cap B)$. Naopak jest podle téže věty každý prvek $g(A \cap B) \in G/(A \cap B)$ průnikem obou prvků $gA \in G/A$, $gB \in G/B$ a tedy jest prvkem největšího společného zjemnění obou rozkladů G/A, G/B.

2. Pro libovolné invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ platí rovnost

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{B}),$$

vyjadřující, že systém všech invariantních podgrup v $\mathfrak{G}$, v němž spojení dvou podgrup jest definováno jejich součinem a průnik průnikem v obvyklém smyslu, tvoří modulární (Dedekindův) svaz [Ø. Ore, l. c. str. 301]. Odtud a z 1. plyne, že příslušné rozklady grupy $\mathfrak{G}$: $\bar{X} \geqq \bar{A}$ a $\bar{B}$ jsou vázány rovností

$$(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) = [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})],$$

takže rozklad $\bar{B}$ jest α-modulární vzhledem k $\bar{X}, \bar{A}$. Naše věta ·*2* tento výsledek zostřuje.

18. Zobrazení rozkladů. Nechť $\mathfrak{f}$ značí libovolné zobrazení množiny G na nějakou množinu G^*. Každý prvek $g \in G$ jest tedy v $\mathfrak{f}$ zobrazen na jistý prvek $g^* \in G^*$; g (g^*) jest *vzor* (*obraz*) prvku g^* (g) v zobrazení $\mathfrak{f}$. K zobrazení $\mathfrak{f}$ patří jistý rozklad $\bar{F}$ na G, jehož prvky se skládají ze všech vzorů vždy téhož prvku v G^*.

Zobrazení $\mathfrak{f}$ určuje jisté zobrazení $\bar{\mathfrak{f}}$ systému všech podmnožin v G na jistý systém podmnožin v G^*, t. zv. *rozšířené zobrazení.* Toto zobrazení $\bar{\mathfrak{f}}$ jest definováno tím, že pro $A \subset G$ jest $\bar{\mathfrak{f}}A \subset G^*$ množina obrazů v $\mathfrak{f}$ všech prvků v A. Zejména pro $\bar{a} \in \bar{F}$ se množina $\bar{\mathfrak{f}}\bar{a}$ skládá z jediného prvku v G^* a to z onoho, na nějž se v $\mathfrak{f}$ zobrazí jednotlivé prvky v G ležící v $\bar{a}$. Kvůli zjednodušení označení budeme v dalším užívati pro rozšířené zobrazení $\bar{\mathfrak{f}}$ rovněž označení $\mathfrak{f}$. Symbol $\mathfrak{f}$ můžeme tedy aplikovati na prvky v G, na př. $a \in G$, a pak výsledek $\mathfrak{f}a$ označuje obraz prvku a v původním zobrazení $\mathfrak{f}$, anebo jej můžeme aplikovati na podmnožiny v G, na př. $A \subset G$, a pak výsledek $\mathfrak{f}A$ označuje obraz podmnožiny A v rozšířeném zobrazení. Tohoto pravidla používáme dále i pro systémy podmnožin v G: Když A jest nějaký neprázdný systém podmnožin v G, pak označujeme systém obrazů v $\bar{\mathfrak{f}}$ jednotlivých prvků v A symbolem $\mathfrak{f}\mathsf{A}$.

Nechť A, B značí libovolné podmnožiny v G.

·*1. Rovnost $\mathfrak{f}A = \mathfrak{f}B$ platí, když a jen když každý prvek v $\bar{F}$, který jest incidentní s jednou množinou A, B, jest incidentní také s druhou.*

Důkaz. a) Nechť platí $\mathfrak{f}A = \mathfrak{f}B$. Když některý prvek $\bar{f} \in \bar{F}$ jest incidentní na př. s množinou A, pak existuje prvek $a \in A$ takový, že $\bar{f}$ jest množinou všech vzorů v $\mathfrak{f}$ prvku $\mathfrak{f}a$. Protože $\mathfrak{f}a \in \mathfrak{f}A = \mathfrak{f}B$, existuje prvek $b \in B$ takový, že $\mathfrak{f}b = \mathfrak{f}a$, takže $b \in \bar{f}$, a vidíme, že prvek $\bar{f}$ jest incidentní s B.

b) Nechť každý prvek v $\overline{F}$, který jest incidentní s jednou množinou A, B, jest incidentní i s druhou. Pak na př. pro $a^* \in \mathfrak{f}A$ jest onen prvek $\bar{f} \in \overline{F}$, který se skládá ze všech vzorů v $\mathfrak{f}$ prvku a^*, incidentní s A a tedy, podle předpokladu, i s B. Tedy existuje prvek $b \in B$ takový, že $a^* = \mathfrak{f}b \in \mathfrak{f}B$ a vychází $\mathfrak{f}A \subset \mathfrak{f}B$. Současně ovšem platí vztah $\mathfrak{f}B \subset \mathfrak{f}A$ a máme $\mathfrak{f}A = \mathfrak{f}B$.

Zřejmě můžeme předcházející větu vyjádřiti také tím, že *rovnost* $\mathfrak{f}A = \mathfrak{f}B$ *platí, když a jen když* $A \sqsubset \overline{F} = B \sqsubset \overline{F}$.

Nechť nyní $\bar{A}$ značí libovolný rozklad na G.

Systém $\mathfrak{f}\bar{A}$ podmnožin v G^* zřejmě pokrývá množinu G^*. Avšak tento systém není nutně rozkladem na G^*, neboť obrazy v $\mathfrak{f}$ dvou různých prvků v $\bar{A}$ mohou býti incidentní aniž by splývaly.

·2. $\mathfrak{f}\bar{A}$ *jest rozkladem na* G^* *když a jen když rozklady* $\bar{A}, \overline{F}$ *jsou doplňkové.*

Důkaz. a) Nechť $\mathfrak{f}\bar{A}$ jest rozkladem na G^*. Nechť prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{f} \in \overline{F}$ leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \overline{F}]$. Máme ukázati, že $\bar{a} \cap \bar{f} \neq \emptyset$. Nechť $\bar{b} \in \bar{A}$ jest libovolný prvek incidentní s $\bar{f}$. Pak $\bar{b} \subset \bar{u}$ a tedy existuje řetězec v $\{\bar{A}, \overline{F}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{b}$:

$$(\bar{a} =)\, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\, (= \bar{b}).$$

Podle definice řetězce jsou každé jeho dva sousední prvky $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1} (\beta < \alpha)$ incidentní vždy s jistým prvkem rozkladu $\overline{F}$ a tedy oba obrazy $\mathfrak{f}\bar{a}_\beta, \mathfrak{f}\bar{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní. Protože $\mathfrak{f}\bar{A}$ jest rozklad na G^*, jest $\mathfrak{f}\bar{a}_\beta = \mathfrak{f}\bar{a}_{\beta+1}$ a tedy také $\mathfrak{f}\bar{a} = \mathfrak{f}\bar{b}$. Odtud plyne podle ·*1*: $\bar{a} \sqsubset \overline{F} = \bar{b} \sqsubset \overline{F}$. Protože $\bar{f} \in \bar{b} \sqsubset \overline{F}$, máme tedy $\bar{f} \in \bar{a} \sqsubset \overline{F}$, takže $\bar{a} \cap \bar{f} \neq \emptyset$.

b) Nechť rozklady $\bar{A}, \overline{F}$ jsou doplňkové. Máme ukázati, že pro $\bar{a}$, $\bar{b} \in \bar{A}$ jsou množiny $\mathfrak{f}\bar{a}, \mathfrak{f}\bar{b}$ buď disjunktní anebo splývají. Nejsou-li množiny $\mathfrak{f}\bar{a}, \mathfrak{f}\bar{b}$ disjunktní, pak existují prvky $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ takové, že $\mathfrak{f}a = \mathfrak{f}b \in \mathfrak{f}\bar{a} \cap \mathfrak{f}\bar{b}$. Prvek $\bar{f} \in \overline{F}$, který se skládá ze všech vzorů v $\mathfrak{f}$ prvku $\mathfrak{f}a$, jest pak incidentní s oběma prvky $\bar{a}, \bar{b}$ a tedy tyto prvky leží v témže prvku rozkladu $[\bar{A}, \overline{F}]$. Protože rozklady $\bar{A}, \overline{F}$ jsou doplňkové, platí podle **13**·*2* rovnost $\bar{a} \sqsubset \overline{F} = \bar{b} \sqsubset \overline{F}$ a odtud podle ·*1* plyne $\mathfrak{f}\bar{a} = \mathfrak{f}\bar{b}$.

Nechť rozklady $\bar{A}, \overline{F}$ jsou doplňkové.

·3. *Pak pro* $\bar{a} \in \bar{A}$ *platí rovnost* $\mathfrak{f}\bar{a} = \mathfrak{f}\bar{u}$, *kde* $\bar{u}$ *značí onen prvek v* $[\bar{A}, \overline{F}]$ *který obsahuje* $\bar{a}$.

Vskutku, podle **14**·*1* máme $\bar{u} = \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \overline{F})$, takže $\bar{a} \sqsubset \overline{F} = \bar{u} \sqsubset \overline{F}$. Odtud plyne $\mathfrak{f}\bar{a} = \mathfrak{f}\bar{u}$, podle ·*1*.

Protože $[\bar{A}, \overline{F}]$ jest zákryt rozkladu $\overline{F}$, jsou rozklady $[\bar{A}, \overline{F}]$, $\overline{F}$ doplňkové a tedy $\mathfrak{f}[\bar{A}, \overline{F}]$ jest rozklad na G^*, podle ·*2*. Podle ·*3* máme $\mathfrak{f}\bar{A} = \mathfrak{f}[\bar{A}, \overline{F}]$, při čemž všechny prvky v $\bar{A}$ ležící v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \overline{F}]$ mají týž obraz $\mathfrak{f}\bar{u}$.

·4. *Obrazy v* $\mathfrak{f}$ *dvou různých prvků v* $[\bar{A}, \overline{F}]$ *jsou různé.*

Vskutku, když pro některé prvky $\bar{u}, \bar{v} \in [\bar{A}, \overline{F}]$ platí rovnost $\mathfrak{f}\bar{u} = \mathfrak{f}\bar{v}$, pak podle ·*1* máme $\bar{u} \sqsubset \overline{F} = \bar{v} \sqsubset \overline{F}$. Protože $[\bar{A}, \overline{F}]$ jest zákryt rozkladu $\overline{F}$, jest každý prvek $\bar{f} \in \bar{u} \sqsubset \bar{F}$ částí prvku $\bar{u}$ a z poslední rovnosti plyne, že jest částí také prvku $\bar{v}$. Odtud vychází rovnost $\bar{u} = \bar{v}$.

Podle ·*3* a ·*4* jest každý prvek $\in [\bar{A}, \bar{F}]$ součtem všech prvků v $\bar{A}$, jejichž obrazy v $\mathfrak{f}$ splývají. Rovněž z ·*3* a ·*4* plyne tato věta:

·*5. Když se nějaký rozklad $\bar{A}$ na G zobrazí v $\mathfrak{f}$ na nějaký rozklad $\bar{A}^*$ na G^*, pak jsou rozklady $[\bar{A}, \bar{F}]$, $\bar{A}^*$ ekvivalentní; a sice obdržíme prosté zobrazení rozkladu $[\bar{A}, \bar{F}]$ na rozklad $\bar{A}^*$, když ke každému prvku prvního rozkladu přiřadíme jeho obraz v $\mathfrak{f}$.*

Důsledkem této věty jest, že *každý zákryt rozkladu $\bar{F}$ jest ekvivalentní se svým obrazem v $\mathfrak{f}$* a sice jest zobrazení, které ke každému prvku zákrytu přiřazuje jeho obraz, prosté.[4])

Dokážeme ještě tuto větu:

·*6. Když $\bar{A} = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ jest libovolný rozklad na G, pak $\{\mathfrak{f}\bar{a}, \mathfrak{f}\bar{b}, \ldots\}$ jest rozklad na G^* když a jen když $\bar{A}$ jest zákrytem rozkladu $\bar{F}$.*

Důkaz. a) Nechť $\{\mathfrak{f}\bar{a}, \mathfrak{f}\bar{b}, \ldots\}$ jest rozklad na G^*. Podle ·*2* jsou rozklady $\bar{A}, \bar{F}$ doplňkové a podle ·*3* obsahuje každý prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{F}]$ jenom jeden prvek $\bar{x} \in \bar{A}$, takže $\bar{u} = \bar{x}$. Odtud plyne $[\bar{A}, \bar{F}] \subset \bar{A}$. Protože naopak jest každý prvek $\bar{x} \in \bar{A}$ částí některého prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{F}]$, máme $\bar{A} \subset [\bar{A}, \bar{F}]$ a vychází, že $\bar{A} = [\bar{A}, \bar{F}]$ jest zákryt rozkladu $\bar{F}$.

b) Nechť $\bar{A}$ jest zákryt rozkladu $\bar{F}$. Pak $[\bar{A}, \bar{F}] = \bar{A}$ a rozklady $\bar{A}, \bar{F}$ jsou doplňkové. Podle ·*2* jest $\mathfrak{f}\bar{A}$ rozklad na G^* a z poslední rovnosti plyne, že obrazy dvou různých prvků v $\bar{A}$ jsou různé. Tedy $\{\mathfrak{f}\bar{a}, \mathfrak{f}\bar{b}, \ldots\}$ jest rozklad na G^*.

19. Homomorfní zobrazení vytvořujících rozkladů grup. Připomeňme nejprve některé výsledky o grupoidech!

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a φ libovolné homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Pak rozklad $\bar{F}$ na $\mathfrak{G}$ patřící k φ, jest vytvořující. Pro $(\emptyset \neq) A, B, C \subset \mathfrak{G}$, $AB \subset C$, máme $\varphi A \,.\, \varphi B \subset \varphi C$ a odtud plyne: Když se nějaký vytvořující rozklad na $\mathfrak{G}$ zobrazí ve φ opět na rozklad, pak tento rozklad jest rovněž vytvořující. Když $\mathfrak{G}$ jest grupa, pak také $\mathfrak{G}^*$ jest grupa a obrazem jednotky v $\mathfrak{G}$ jest jednotka v $\mathfrak{G}^*$. Dále jest známo, že vytvořující rozklady na grupách jsou právě jenom rozklady vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami, při čemž vždycky onen prvek vytvořujícího rozkladu, který obsahuje jednotku grupy, jest polem invariantní podgrupy, která rozklad vytvořuje.[5]) Odtud plyne, že když $\mathfrak{G}$ jest grupa, pak rozklad $\bar{F}$ jest vytvořen invariantní podgrupou, jejíž pole se skládá ze všech prvků grupy $\mathfrak{G}$, které se ve φ zobrazí na jednotku grupy $\mathfrak{G}^*$.

Nechť nyní $\mathfrak{G}$ značí nějakou grupu a $\mathfrak{A}$ libovolnou invariantní podgrupu v $\mathfrak{G}$. Nechť dále φ, ψ značí homomorfní zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na nějaké

[4]) P. Dubreil, *Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme* [C. R. Acad. Sci., Paris, **215**, 239—241 (1942)].

[5]) V. O. Borůvka, *Úvod do teorie grup* [Praha (1944)], str. 65.

grupy $\varphi\mathfrak{G}, \psi\mathfrak{G}$ a dále $\mathfrak{N}_\varphi$, $\mathfrak{N}_\psi$ invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$, které vytvořují rozklady patřící k φ, ψ. Pole jednotlivých grup označíme $G, A, \varphi G, \psi G, N_\varphi$, N_ψ, takže zejména G/N_φ, G/N_ψ jsou rozklady patřící k zobrazení φ, ψ.

·1. Platí rovnost

$$\varphi(G/A) = \varphi G/\varphi A.$$

Vskutku, podle **17**·*2* jsou rozklady $G/A, G/N_\varphi$ doplňkové a tedy, podle **18**·*2*, jest $\varphi(G/A)$ rozklad na φG. Protože rozklad G/A jest vytvořující, platí totéž o rozkladu $\varphi(G/A)$. Prvek tohoto rozkladu obsahující jednotku grupy φG jest zřejmě φA a odtud plyne hořejší rovnost.

·2. Platí vztahy

$$\varphi G/\varphi N_\psi \cong G/N_\varphi N_\psi, \quad \psi G/\psi N_\varphi \cong G/N_\varphi N_\psi,$$

při čemž každému prvku v $G/N_\varphi N_\psi$ odpovídají jeho obrazy ve φ a ψ.

Vskutku, podle poznámky 1 na str. 15 jest $G/N_\varphi N_\psi$ nejmenší společný zákryt obou doplňkových rozkladů G/N_φ, G/N_ψ, jejichž obrazy ve φ, ψ jsou $\varphi G/\varphi N_\psi$, $\psi G/\psi N_\varphi$, podle ·*1*. Tvrzení plyne tedy z **18**·*5*.

·3. Když platí jedna z rovností $\varphi N_\psi = \varphi G, \psi N_\varphi = \psi G$, pak platí i druhá a každý prvek v G/N_φ jest incidentní s každým prvkem v G/N_ψ.

Vskutku, když na př. máme $\varphi N_\psi = \varphi G$, pak z prvního vztahu ·*2* plyne $N_\varphi N_\psi = G$, takže nejmenší společný zákryt rozkladů $G/N_\varphi, G/N_\psi$ obsahuje jediný prvek G a tedy každý prvek v G/N_φ jest incidentní s každým prvkem v G/N_ψ. Z druhého vztahu ·*2* pak vidíme, že jest $\psi N_\varphi = \psi G$.

Všimněme si, že když jest splněn předpoklad věty ·*3*, platí rovnost

$$\mathfrak{G}/(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi) = \mathfrak{N}_\varphi/(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi) \times \mathfrak{N}_\psi/(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi),$$

při čemž znaménko $\times$ značí přímý součin.

III. Řady rozkladů.

20. Základní pojmy. Nechť $\bar{A} \geqq \bar{B}$ značí rozklady na G. *Řadou rozkladů od $\bar{A}$ do $\bar{B}$* rozumíme uspořádanou konečnou množinu rozkladů na G, z nichž první jest $\bar{A}$ a poslední $\bar{B}$, vyznačující se tím, že každý následující rozklad jest zjemněním předcházejícího:

$$(\bar{A} =) \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha \; (= \bar{B}).$$

Takovou řadu značíme stručněji $(\bar{A})$. $\bar{A}, \bar{B}$ jsou *koncové* rozklady řady $(\bar{A})$; počet rozkladů v řadě $(\bar{A})$, α, jest *délka* řady $(\bar{A})$. Jednotlivé rozklady v řadě $(\bar{A})$ jsou *členy* řady $(\bar{A})$.

Nechť $((\bar{A}) \quad) \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ značí nějakou řadu rozkladů od $\bar{A}$ do $\bar{B}$.

Libovolný člen řady $(\bar{A})$ se nazývá *podstatný*, když jest to buď první člen $\bar{A}_1$, anebo jest *vlastním* zjemněním rozkladu předcházejícího; jinak jest *nepodstatný*. Když v $(\bar{A})$ existuje alespoň jeden nepodstatný člen $\bar{A}_\gamma$, pravíme, že řada $(\bar{A})$ jest *s opakováním*. V tomto případě obdržíme z $(\bar{A})$ opět řadu od $\bar{A}$ do $\bar{B}$, když nepodstatný člen $\bar{A}_\gamma$ vynecháme. Pravíme pak, že jsme řadu $(\bar{A})$ *zkrátili*. Zkrácená řada tedy existuje když a jen když řada $(\bar{A})$ jest s opakováním. Když všechny členy řady $(\bar{A})$ jsou podstatné, pravíme, že řada jest *bez opakování*. Počet podstatných členů v řadě $(\bar{A})$ jest *redukovaná délka* α' řady $(\bar{A})$. Zřejmě jest $1 \leqq \alpha' \leqq \alpha$ a jest $\alpha' = \alpha$, když a jen když řada $(\bar{A})$ jest bez opakování. Když řada $(\bar{A})$ jest s opakováním, pak ji můžeme vynecháním všech nepodstatných členů *redukovati*, t. j. zkrátiti na řadu $(\bar{A}')$ bez opakování od $\bar{A}$ do $\bar{B}$. Délka redukované řady $(\bar{A}')$ jest ovšem redukovaná délka řady $(\bar{A})$. Naopak můžeme vždycky řadu $(\bar{A})$ *prodloužiti* a sice tím, že mezi její libovolné členy $\bar{A}_\gamma, \bar{A}_{\gamma+1}$ po př. před první člen $\bar{A}_1$ anebo za poslední člen $\bar{A}_\alpha$ vsuneme rozklad $\bar{A}_\gamma$ po př. $\bar{A}_1$ anebo $\bar{A}_\alpha$, anebo libovolný konečný počet stejných takových rozkladů. Zřejmě vznikne každé prodloužení (zkrácení) řady $(\bar{A})$ tím, že do $(\bar{A})$ (z $(\bar{A})$) postupně vsuneme (vynecháme) vždy jediný rozklad $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$. Zřejmě má každá zkrácená a každá prodloužená řada tutéž redukovanou délku jako původní řada $(\bar{A})$.

Když $\alpha_1 < \ldots < \alpha_\beta$ značí přirozená čísla $\leqq \alpha$, při čemž $\beta \geqq 1$, pak zřejmě

$$\bar{A}_{\alpha_1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta}$$

jest řada rozkladů na G, t. zv. *částečná řada* anebo *část* řady $(\bar{A})$.

Všimněme si dále, že když A jest libovolná neprázdná podmnožina v G, pak

$$A \sqcap \bar{A}_{\alpha_1} \geqq \ldots \geqq A \sqcap \bar{A}_{\alpha_\beta}$$

jest řada rozkladů na A.

21. Lokální řetězce. Nechť $((\bar{A}) \equiv)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ značí nějakou řadu rozkladů na G délky $\alpha \geqq 1$.

Nechť $a \in G$ jest libovolný prvek v G a nechť $\bar{a}_\gamma$, pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, značí onen prvek rozkladu $\bar{A}_\gamma$, který obsahuje a; mimoto nechť značí $\bar{a}_0 = G$. Zřejmě jest

$$\bar{a}_0 \supset \ldots \supset \bar{a}_\alpha.$$

Dále jest

$$(\bar{A}^a_{\gamma-1} \equiv)\ \ \bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\gamma$$

rozklad na $\bar{a}_{\gamma-1}$ a tento rozklad obsahuje $\bar{a}_\gamma$ jako prvek. Odtud plyne, že

$$\bar{A}^a_0 \rightarrow \ldots \rightarrow \bar{A}^a_{\alpha-1}$$

jest řetězec rozkladů od $\bar{a}_0$ do $\bar{a}_\alpha$. Tento řetězec se nazývá *lokální řetězec* řady $(\bar{A})$ příslušný k prvku a, stručněji: lokální řetězec prvku a; označení $[\bar{A}^a]$.

Všimněme si, že $\bar{A}^a_0 = \bar{A}_1$ a že současně platí rovnost $\bar{A}^a_{\gamma-1} = \bar{a}_{\gamma-1} \sqcap \bar{A}_\gamma$.

1. *Lokální řetězec $[\bar{A}^a]$ jest elementární řetězec od $\bar{a}_0$ do $\bar{a}_\alpha$ nad rozkladem $\bar{A}_\alpha$.*

Důkaz. Máme ukázati, že $\bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\gamma$ jest zákryt rozkladu $\bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\alpha$. Avšak tento vztah plyne bezprostředně z toho, že rozklad $\bar{A}_\gamma$ jest zákrytem rozkladu $\bar{A}_\alpha$.

Podle definice lokálního řetězce jest ke každému členu $\bar{A}_\gamma$ řady $(\bar{A})$ jednojednoznačně přiřazen jistý člen lokálního řetězce $[\bar{A}^a]$ a sice rozklad $\bar{A}^a_{\gamma-1}$. Odtud především vidíme, že *délka lokálního řetězce* $[\bar{A}^a]$ *jest* α. Když $\bar{A}_{\gamma+1}$ jest nepodstatný člen řady $(\bar{A})$, pak $\bar{a}_{\gamma+1} = \bar{a}_\gamma$ a tedy $\bar{A}^a_\gamma$ jest nepodstatný rozklad lokálního řetězce $[\bar{A}^a]$. Odtud plyne, že *redukovaná délka lokálního řetězce* $[\bar{A}^a]$ *jest* $\leqq \alpha'$, při čemž α' značí redukovanou délku řady $(\bar{A})$. Když tedy některý lokální řetězec řady $(\bar{A})$ jest bez opakování, pak totéž platí o řadě $(\bar{A})$.

22. Zjemnění řad. Nechť $((\bar{A}) \equiv)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ značí libovolnou řadu rozkladů na G délky $\alpha \geqq 1$.

Zjemněním řady $(\bar{A})$ rozumíme řadu rozkladů na G vyznačující se tím, že řada $(\bar{A})$ jest její částí. Každé zjemnění řady $(\bar{A})$ jest tedy tvaru

$$\begin{gathered}\bar{A}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{1,\beta_1-1} \geqq \bar{A}_{1,\beta_1} \geqq \bar{A}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{2,\beta_2-1} \geqq \bar{A}_{2,\beta_2} \geqq \ldots \\ \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha,\beta_\alpha} \geqq \bar{A}_{\alpha+1,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1},\end{gathered} \tag{1}$$

při čemž $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$ a $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+1}$ jsou přirozená čísla; v případě, že některé z nich $\beta_\delta = 1$, nečtou se členy $\bar{A}_{\delta,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\delta,\beta_\delta-1}$. Z této definice vidíme, že každé zjemnění řady $(\bar{A})$ obdržíme, když mezi některé dva sousední členy $\bar{A}_\gamma, \bar{A}_{\gamma+1}$, eventuálně před první člen $\bar{A}_1$ a za poslední $\bar{A}_\alpha$ řady $(\bar{A})$ vsuneme nějakou řadu rozkladů na G. Zejména jest tedy každé prodloužení řady $(\bar{A})$ jejím zjemněním.

Nechť $(\mathring{A})$ značí libovolné zjemnění řady $(\bar{A})$, při čemž označení jeho jednotlivých členů volíme stejně jako v (1). Zejména tedy máme $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma$, pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$. Nechť $a \in G$ značí libovolný prvek v G a nechť $\bar{a}_{\mu,\nu}$, pro $\mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\nu = 1, \ldots, \beta_\mu$, značí onen prvek rozkladu $\bar{A}_{\mu,\nu}$, který obsahuje a; zejména tedy máme $\bar{a}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{a}_\gamma$, při čemž $\bar{a}_\gamma$ opět značí prvek rozkladu $\bar{A}_\gamma$ obsahující a. Lokální řetězec $[\mathring{A}^a]$ zjemnění $(\mathring{A})$ příslušný k prvku a jest

$$\begin{gathered}\bar{A}^a_{1,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{1,\beta_1-1} \to \bar{A}^a_{2,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{2,\beta_2-1} \to \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha,\beta_\alpha-1} \to \bar{A}^a_{\alpha+1,0} \to \ldots \\ \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-2},\end{gathered}$$

kde ovšem značí $\bar{A}^a_{\mu,\nu-1} = \bar{a}_{\mu,\nu-1} \sqsubset \bar{A}_{\mu,\nu}$, $\bar{a}_{\mu,0} = \bar{a}_{\mu-1}$, $\bar{a}_0 = G$. Vidíme tedy, že lokální řetězec $[\mathring{A}^a]$ obdržíme, když každý člen $\bar{A}^a_{\gamma-1}$ $(\equiv \bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\gamma)$ lokálního řetězce $[\bar{A}^a]$ řady $(\bar{A})$ příslušného k prvku a, nahradíme řetězcem

$$\bar{A}^a_{\gamma,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{\gamma,\beta_\gamma-1} \tag{2}$$

a v případě $\beta_{\alpha+1} > 1$ přidáme vzadu řetězec $\bar{A}^a_{\alpha+1,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-2}$ ležící na $\bar{a}_\alpha$. Avšak (2) jest lokální řetězec řady $\bar{a}_{\gamma-1} \sqcap \bar{A}_{\gamma,1} \geqq \ldots \geqq \bar{a}_{\gamma-1} \sqcap \sqcap \bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma}$ a tedy, podle **21**·*1*, jest to elementární řetězec od $\bar{a}_{\gamma-1}$ do $\bar{a}_\gamma$ nad rozkladem $\bar{a}_{\gamma-1} \sqcap \bar{A}_\gamma$ $(= \bar{A}^a_{\gamma-1})$. Odtud plyne, že

$$\bar{A}^a_{1,1} \to \ldots \to \bar{A}^a_{1,\beta_1-1} \to \bar{A}^a_{2,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{2,\beta_2-1} \to \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha,\beta_\alpha-1}$$

jest zjemnění lokálního řetězce $[\bar{A}^a]$. Vychází tedy, že *lokální řetězec libovolného zjemnění řady* $(\bar{A})$ *příslušný k libovolnému prvku* $a \in G$ *jest zjemnění lokálního řetězce řady* $(\bar{A})$ *příslušného k* a, *eventuálně rozšířené přidáním vhodného řetězce na konci lokálního řetězce řady* $(\bar{A})$.

23. Zobrazení řad rozkladů. Nechť

$$((\bar{A}) \quad) \; \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha,$$
$$((\bar{B}) =) \; \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\beta$$

značí libovolné řady rozkladů na G o délkách $\alpha, \beta \geqq 1$. Zobrazením řady $(\bar{A})$ do (na) řady (řadu) $(\bar{B})$ rozumíme ovšem zobrazení množiny členů řady $(\bar{A})$ do (na) množiny (množinu) členů řady $(\bar{B})$. Každým zobrazením řady $(\bar{A})$ do řady $(\bar{B})$ jest tedy ke každému členu $\bar{A}_\gamma$ řady $(\bar{A})$ jednoznačně přiřazen jistý člen $\bar{B}_\delta$ řady $(\bar{B})$.

Nechť $\mathfrak{f}$ značí libovolné zobrazení řady $(\bar{A})$ do řady $(\bar{B})$. Nechť

$$([\bar{A}^a] \quad) \; \bar{A}_0^a \rightarrow \ldots \rightarrow \bar{A}_{\alpha-1}^a,$$
$$([\bar{B}^a] =) \; \bar{B}_0^a \rightarrow \ldots \rightarrow \bar{B}_{\beta-1}^a$$

jsou lokální řetězce řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ příslušné k libovolnému prvku $a \in G$. Zobrazení $\mathfrak{f}$ indukuje jisté zobrazení řetězce $[\bar{A}^a]$ do řetězce $[\bar{B}^a]$ a sice zobrazení, které k libovolnému členu $\bar{A}_{\gamma-1}^a$ řetězce $[\bar{A}^a]$ přiřazuje člen $\bar{B}_{\delta-1}^a$ řetězce $[\bar{B}^a]$, při čemž $\bar{B}_\delta = \mathfrak{f}\bar{A}_\gamma$. Toto zobrazení nazýváme *lokální zobrazení* příslušné k prvku a indukované zobrazením $\mathfrak{f}$, stručněji: lokální zobrazení $\mathfrak{f}$.

Když $\mathfrak{f}$ jest zobrazení *na* řadu $(\bar{B})$, pak ovšem lokální zobrazení $\mathfrak{f}$ jest zobrazení *na* řetězec $[\bar{B}^a]$; když zejména $\mathfrak{f}$ jest prosté zobrazení, pak také lokální zobrazení $\mathfrak{f}$ jest prosté.

24. Spřažené řady rozkladů. Nechť opět

$$((\bar{A}) =) \; \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha,$$
$$((\bar{B}) =) \; \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\beta$$

značí libovolné řady rozkladů na G.

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ se nazývají *spřažené,* když existuje prosté zobrazení $\mathfrak{f}$ řady $(\bar{A})$ na řadu $(\bar{B})$, t. zv. *první zobrazení*, vyznačující se tím, že oba rozklady, které si v lokálním zobrazení $\mathfrak{f}$, příslušném k libovolnému prvku $a \in G$, odpovídají, jsou spřažené.

Nechť řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou spřažené.

Označme $\mathfrak{f}$ první zobrazení řady $(\bar{A})$ na $(\bar{B})$ a nechť $[\bar{A}^a]$, $[\bar{B}^a]$ jsou lokální řetězce příslušné k libovolnému prvku $a \in G$. Lokální zobrazení $\mathfrak{f}$ přiřazuje ke každému rozkladu $\bar{A}_{\gamma-1}^a$ $(= \bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\gamma)$ lokálního řetězce $[\bar{A}^a]$ jednojednoznačně jistý rozklad $\bar{B}_{\delta-1}^a$ $(= \bar{b}_{\delta-1} \sqsubset \bar{B}_\delta)$ lokálního řetězce $[\bar{B}^a]$ a oba rozklady $\bar{A}_{\gamma-1}^a$, $\bar{B}_{\delta-1}^a$ jsou spřažené, t. j. tedy každý prvek rozkladu jednoho jest incidentní právě s jedním prvkem druhého.

Všimněme si důsledku těchto skutečností! Nechť $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_{\gamma-1}^a$, $\bar{b}_\delta \in \bar{B}_{\delta-1}^a$ jsou ony prvky rozkladů $\bar{A}_{\gamma-1}^a$, $\bar{B}_{\delta-1}^a$, které obsahují prvek a; pro $\gamma < \alpha$,

$\delta < \beta$ jsou ovšem $\bar{a}_\gamma, \bar{b}_\delta$ právě ony prvky rozkladů $\bar{A}^a_{\gamma-1}, \bar{B}^a_{\delta-1}$, na nichž leží následující rozklady $\bar{A}^a_\gamma, \bar{B}^a_\delta$ lokálních řetězců $[\bar{A}^a]$, $[\bar{B}^a]$.

·*1. Prvek $\bar{a}_\gamma$ jest incidentní právě jenom s prvkem $\bar{b}_\delta$ a prvek $\bar{b}_\delta$ právě jenom s prvkem $\bar{a}_\gamma$.*

Tato věta plyne bezprostředně z toho, že prvky $\bar{a}_\gamma, \bar{b}_\delta$ obsahují prvek a a že rozklady $\bar{A}^a_{\gamma-1}, \bar{B}^a_{\delta-1}$ jsou spřažené.

·*2. Rozklady $\bar{A}^a_{\gamma-1}, \bar{B}^a_{\delta-1}$ jsou ekvivalentní množiny.*

Vskutku, zřejmě obdržíme prosté zobrazení rozkladu $\bar{A}^a_{\gamma-1}$ na $\bar{B}^a_{\delta-1}$, když ke každému prvku prvního rozkladu přiřadíme s ním incidentní prvek druhého. — Všimněme si, že v tomto zobrazení si zejména odpovídají, podle ·*1*, prvky $\bar{a}_\gamma, \bar{b}_\delta$.

·*3. Když $\bar{A}^a_{\gamma-1}$ jest nepodstatný člen řetězce $[\bar{A}^a]$, pak $\bar{B}^a_{\delta-1}$ jest nepodstatný člen řetězce $[\bar{B}^a]$.*

Vskutku, když $\bar{A}^a_{\gamma-1}$ jest nepodstatný člen řetězce $[\bar{A}^a]$, pak se skládá z jediného prvku $\bar{a}_\gamma$. Z ·*2* plyne, že pak i rozklad $\bar{B}^a_{\delta-1}$ se skládá z jediného prvku $\bar{b}_\delta$ a tedy jest nepodstatným členem řetězce $[\bar{B}^a]$.

·*4. Lokální řetězce $[\bar{A}^a]$, $[\bar{B}^a]$ mají stejnou délku a stejnou redukovanou délku.*

Vskutku, že mají stejnou délku plyne z toho, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ mají stejnou délku, neboť první zobrazení jest prosté. Že mají stejnou redukovanou délku, plyne z věty ·*3*, neboť počet nepodstatných a tedy i podstatných členů v obou řetězcích jest stejný.

Vedle předcházejících vět, které popisují lokální vztahy mezi spřaženými řadami $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, platí o těchto řadách jisté věty globálního rázu. Viděli jsme již, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ mají stejnou délku.

·*5. V prvním zobrazení odpovídá libovolnému nepodstatnému členu řady $(\bar{A})$ buď první člen $\bar{B}_1$ řady $(\bar{B})$, a pak $\bar{B}_1 = \bar{G}_{\max}$, anebo rovněž nepodstatný člen řady $(\bar{B})$.*

Vskutku, nechť $\bar{A}_\gamma$ jest nepodstatný člen řady $(\bar{A})$, takže $\gamma > 1$, a nechť $\bar{B}_\delta$ jest onen člen řady $(\bar{B})$, který mu odpovídá v prvním zobrazení $\mathfrak{f}$. Nechť $\bar{B}_\delta$ jest podstatný člen řady $(\bar{B})$. Když $\delta > 1$, pak existuje prvek $a \in G$ vyznačující se tím, že člen $(\bar{B}^a_{\delta-1} -)\ \bar{b}_{\delta-1} \sqsubset \bar{B}_\delta$ lokálního řetězce $[\bar{B}^a]$ jest podstatný. Protože $\bar{A}_\gamma$ jest nepodstatný člen řady $(\bar{A})$, jest $(\bar{A}^a_{\gamma-1} -)$ $\bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\gamma$ nepodstatný člen lokálního řetězce $[\bar{A}^a]$. Avšak v lokálním zobrazení $\mathfrak{f}$ si rozklady $\bar{A}^a_{\gamma-1}, \bar{B}^a_{\delta-1}$ odpovídají a máme spor s větou ·*3*. Vidíme tedy, že $\delta = 1$, t. j. k rozkladu $\bar{A}_\gamma$ jest v prvním zobrazení $\mathfrak{f}$ přiřazen první člen $\bar{B}_1$ řady $(\bar{B})$. Pro $a \in G$ jest tedy $\bar{B}^a_{\delta-1} = \bar{B}_1$ a odtud podle ·*3* plyne $\bar{B}_1 = \bar{G}_{\max}$.

·*6. Když v prvním zobrazení odpovídá prvnímu členu řady $(\bar{A})$ první člen řady $(\bar{B})$, pak řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ mají stejnou redukovanou délku.*

Vskutku, pak podle ·*5* v prvním zobrazení odpovídá každému nepodstatnému členu řady $(\bar{A})$ nepodstatný člen řady $(\bar{B})$ a tedy obě řady mají stejnou redukovanou délku.

25. Doplňkové řady rozkladů. Nechť opět

$$((\bar{A}) \equiv)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha,$$
$$((\bar{B}) \equiv)\ \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\beta$$

jsou libovolné řady rozkladů na G.

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ se nazývají *doplňkové*, když každý rozklad jedné řady jest doplňkový s každým rozkladem řady druhé.

Nechť řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou doplňkové.

·*1. Každé dva lokální řetězce řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ příslušné k témuž prvku jsou sdružené, mají-li stejné konce.*

Důkaz plyne z věty **16**·*2*.

·*2. Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ mají spřažená zjemnění,* která jsou dána konstrukcí uvedenou v části a) následujícího důkazu *a tato zjemnění mají stejnou redukovanou délku.*

Důkaz. a) Označme

$$[\bar{A}_1, \bar{B}_1] = \bar{U}, \quad (\bar{A}_\alpha, \bar{B}_\beta) = \bar{V},$$
$$\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = \bar{G}_{\max}, \quad \bar{A}_{\alpha+1} = \bar{B}_{\beta+1} = \bar{V},$$

a nechť $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$. Protože platí

$$\bar{A}_{\gamma-1} \geqq \bar{A}_\gamma, \quad \bar{B}_{\delta-1} \geqq \bar{B}_\delta$$

a rozklady $\bar{A}_\gamma$, $\bar{B}_\delta$ jsou doplňkové, máme, podle **15**·*1*:

$$(\mathring{A}_{\gamma,\nu} \equiv)\ [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu)] = (\bar{A}_{\gamma-1}, [\bar{A}_\gamma, \bar{B}_\nu]),$$
$$(\mathring{B}_{\delta,\mu} \equiv)\ [\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_\mu)] = (\bar{B}_{\delta-1}, [\bar{B}_\delta, \bar{A}_\mu]).$$

Odtud plynou zejména vztahy

$$\bar{A}_{\gamma-1} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu}, \quad \mathring{A}_{\gamma,\beta+1} = \bar{A}_\gamma,$$
$$\bar{B}_{\delta-1} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu}, \quad \mathring{B}_{\delta,\alpha+1} = \bar{B}_\delta.$$

Pro $\nu \leqq \beta$ jest $\bar{B}_\nu \geqq \bar{B}_{\nu+1}$; odtud plyne podle **10**·*1*: $(\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu) \geqq (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu+1})$ a dále, podle téže věty: $[\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu)] \geqq [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu+1})]$. Podobně odvodíme pro $\mu \leqq \alpha$: $[\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_\mu)] \geqq [\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_{\mu+1})]$. Vidíme tedy, že pro $\nu \leqq \beta$, $\mu \leqq \alpha$ platí vztahy

$$\mathring{A}_{\gamma,\nu} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu+1}, \quad \mathring{B}_{\delta,\mu} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu+1},$$

takže

$$\mathring{A}_{\gamma,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{\gamma,\beta+1},$$
$$\mathring{B}_{\delta,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{\delta,\alpha+1},$$

jsou řady rozkladů od $\mathring{A}_{\gamma,1}$ do $\bar{A}_\gamma$ a od $\mathring{B}_{\delta,1}$ do $\bar{B}_\delta$. Vychází tedy, že

$$((\mathring{A}) \equiv)\ \bar{U} = \mathring{A}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{1,\beta+1} \geqq \mathring{A}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{2,\beta+1} \geqq \ldots$$
$$\ldots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \bar{V},$$
$$((\mathring{B}) \equiv)\ \bar{U} = \mathring{B}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{1,\alpha+1} \geqq \mathring{B}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{2,\alpha+1} \geqq \ldots$$
$$\ldots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,\alpha+1} = \bar{V}$$

jsou zjemnění řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.$(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ jsou obě zjemnění, o něž jde.

b) Nyní ukážeme, že řady $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ jsou spřažené. Za tím účelem definujeme především mezi řadami $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ první zobrazení tím, že k rozkladu $\mathring{A}_{\gamma,\delta}$ přiřadíme rozklad $\mathring{B}_{\delta,\gamma}$.

Nechť a značí libovolný prvek v G a nechť $\mathring{a}_{\gamma,\delta} \in \mathring{A}_{\gamma,\delta}$, $\mathring{b}_{\delta,\gamma} \in \mathring{B}_{\delta,\gamma}$ jsou ony prvky, které obsahují prvek a; podobně nechť $\bar{a}_{\gamma-1} \in \bar{A}_{\gamma-1}$, $\bar{b}_{\delta-1} \in \bar{B}_{\delta-1}$ značí prvky obsahující a. Máme ukázati, že rozklady

$$\mathring{a}_{\gamma,\delta-1} \sqsubset \mathring{A}_{\gamma,\delta}, \quad \mathring{b}_{\delta,\gamma-1} \sqsubset \mathring{B}_{\delta,\gamma}$$

jsou spřažené. Při tom ovšem značí $\mathring{a}_{\gamma,0} = \bar{a}_{\gamma-1}$, $\mathring{b}_{\delta,0} = \bar{b}_{\delta-1}$. Podle **14**·*3* jsou rozklady $\bar{A}_\gamma$, $(\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\delta-1})$ doplňkové a tedy, podle **14**·*1* jest prvek $\mathring{a}_{\gamma,\delta-1} \in$ $\in [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\delta-1})]$ součtem všech prvků rozkladu $\bar{A}_\gamma$, které jsou incidentní s prvkem $\bar{a}_{\gamma-1} \cap \bar{b}_{\delta-1} \in (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\delta-1})$. Libovolný prvek $\mathring{x}_{\gamma,\delta} \in \mathring{A}_{\gamma,\delta}$ jest také součtem některých prvků rozkladu $\bar{A}_\gamma$ a tedy jest incidentní s $\mathring{a}_{\gamma,\delta-1}$, když a jen když jest incidentní s $\bar{a}_{\gamma-1} \cap \bar{b}_{\delta-1}$. Odtud plyne rovnost

$$\mathring{a}_{\gamma,\delta-1} \sqsubset \mathring{A}_{\gamma,\delta} = (\bar{a}_{\gamma-1} \cap \bar{b}_{\delta-1}) \sqsubset \mathring{A}_{\gamma,\delta}$$

a podobně obdržíme

$$\mathring{b}_{\delta,\gamma-1} \sqsubset \mathring{B}_{\delta,\gamma} = (\bar{b}_{\delta-1} \cap \bar{a}_{\gamma-1}) \sqsubset \mathring{B}_{\delta,\gamma}.$$

Podle **16**·*1* jsou pravé strany těchto rovností spřažené rozklady.

c) V prvním zobrazení řady $(\mathring{A})$ na $(\mathring{B})$, které jsme výše definovali, odpovídá prvnímu členu v $(\mathring{A})$ první člen v $(\mathring{B})$. Odtud plyne podle **24**·*6*, že řady $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ mají stejnou redukovanou délku.

Hořejší konstrukce spřažených zjemnění $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ jest provedena podle vzoru Zassenhausovy konstrukce isomorfních zjemnění řetězců invariantních podgrup.[6])

Všimněme si, že jsme při této konstrukci použili jenom operací [] a (), které jsme aplikovali na členy řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

26. Řady rozkladů ve svazu. Nechť $\boldsymbol{A}$ značí nějaký svaz rozkladů na G se svazovými operacemi [] a ().

O libovolné řadě rozkladů na G pravíme, že *patří* do svazu $\boldsymbol{A}$, když každý její člen jest prvkem tohoto svazu.

Libovolná řada rozkladů na G patřící do svazu $\boldsymbol{A}$ se nazývá *hlavní* řadou svazu $\boldsymbol{A}$, když každé její zjemnění, které patří do svazu $\boldsymbol{A}$, jest její prodloužení.

·*1. Když svaz* $\boldsymbol{A}$ *obsahuje největší (nejmenší) prvek, pak každá hlavní řada patřící do* $\boldsymbol{A}$ *jím začíná (končí).*

Vskutku, nechť $\boldsymbol{A}$ obsahuje na př. největší prvek $\bar{A}_{\max}$, takže pro $\bar{X} \in \boldsymbol{A}$ jest $\bar{X} \leqq \bar{A}_{\max}$, a nechť $((\bar{A}) \quad) \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ značí libovolnou hlavní řadu svazu $\boldsymbol{A}$. Pak $\bar{A}_{\max} \geqq \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ jest zjemnění řady $(\bar{A})$ patřící do svazu $\boldsymbol{A}$. Protože $(\bar{A})$ jest hlavní řada svazu $\boldsymbol{A}$, jest toto zjemnění prodloužení řady $(\bar{A})$ a tedy $\bar{A}_{\max} = \bar{A}_1$.

[6]) H. Zassenhaus, *Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier* [Abh. Hamb. Univ., 10, 106—108, (1934)].

·2. *Všechny doplňkové hlavní řady svazu A mají stejnou redukovanou délku.*

Vskutku, nechť $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ značí libovolné doplňkové hlavní řady svazu A; označme α', β' jejich redukované délky. Pak především každé zjemnění řady $(\bar{A})$ $((\bar{B}))$, které patří do svazu A, má redukovanou délku α' (β'). Dále existují, podle 25·2, spřažená zjemnění $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, která mají stejnou redukovanou délku; tato zjemnění patří do svazu A, neboť se při jejich konstrukci použilo jenom operací $[]$ a $()$, které se aplikovaly na členy řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$. Odtud plyne $\alpha' = \beta'$.

KNIHTISKÁRNA PROMETHEUS, PRAHA VIII.