Otakar Borůvka

Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

Math. Nachr. 38, 1968, H 5/6, 261-266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500126

Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

Herrn WILLI RINOW zum 60. Geburtstag am 28. Februar 1967 gewidmet

Von O. BORŮVKA in Brno

(Eingegangen am 24. 1. 1967)

1. Einleitung

In der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen (Diffgen) 2. Ordnung im reellen Gebiet spielt die KUMMERsche Diffg

$$(\mathrm{Qq}) \qquad -\{X, t\} + Q(X)\, X'^2 = q(t)$$

eine hervorragende Rolle. Die Koeffizienten Q, q sind stetige Funktionen in offenen Intervallen J, j.

Man ordnet der Diffg (Qq) die linearen Diffgen 2. Ordnung

$$(\mathrm{Q}) \qquad \ddot{Y} = Q(T)\, Y, \qquad y'' = q(t) y \qquad (\mathrm{q})$$

zu. Die Bedeutung der Diffg (Qq) besteht darin, daß die Integrale Y der Diffg (Q) mittels Lösungen X von (Qq) in Lösungen der Diffg (q) transformiert werden, und zwar im Sinne der Formel:

$$y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}.$$

Die Funktionen Q, q werden gelegentlich als die Träger der Diffg (Qq) bzw. der Diffgen (Q), (q) bezeichnet.

Durch die Diffg (Qq) sind offenbar die Diffgen (QQ), (qq) eindeutig bestimmt und umgekehrt. Wir nennen sie die mit (Qq) *assoziierte erste* bzw. *zweite* (KUMMERsche) *Diffg*.

Eine Diffg (Qq) nennen wir vom *oszillatorischen Typus*, wenn die Intervalle J, j mit dem Intervall $(-\infty, \infty)$ zusammenfallen, also $J = j = (-\infty, \infty)$ ist, und die Diffgen (Q), (q) oszillatorisch sind (d. h. ihre Integrale in beiden Richtungen unendlich oftmal verschwinden).

Die Diffgen (Qq) vom oszillatorischen Typus sind dadurch charakterisiert, daß ihre (breitesten, d. h. im ganzen Intervall j definierten) Integrale sowie die zu ihnen inversen Funktionen von beiden Seiten unbeschränkt sind.

Für eine Diffg (Qq) vom oszillatorischen Typus definiert man im Intervall j vermöge linearer Abbildungen des Raumes r der Integrale der Diffg (q) auf den Raum R der Integrale von (Q) und vermöge geeigneter Zuordnung von Nullstellen je zwei entsprechender Integrale $y \in r$, $Y \in R$ gewisse Funktionen, die sogenannten allgemeinen Dispersionen der Diffg (Qq) (oder auch der Diffgen (q), (Q)). Diese sind genau die Integrale der Diffg (Qq) ([5]).

Die (ersten) Phasen aller linearen oszillatorischen Diffgen (q) im Intervall $j\,(= (-\infty, \infty))$ bilden bei Einführung der vermöge Zusammensetzung von Funktionen definierten Multiplikation eine Gruppe, die sogenannte Phasengruppe $\mathfrak{G}$ der linearen Diffgen 2. Ordnung ([4]). Wegen der oben erwähnten charakteristischen Eigenschaft der Diffgen (Qq) vom oszillatorischen Typus fällt die von den allgemeinen Dispersionen aller Diffgen (Qq) vom oszillatorischen Typus gebildete Menge mit der Phasengruppe $\mathfrak{G}$ zusammen. Die Struktureigenschaften dieser letzteren können mit Erfolg zur Ausfindung qualitativer Eigenschaften von allgemeinen Dispersionen angewendet werden.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir unter Anwendung dieser Methode die allgemeinen Dispersionen einer Diffg (Qq) vermöge derjenigen der mit ihr assoziierten Diffgen (QQ), (qq) charakterisieren.

2. Satz über konjugierte Untergruppen

Wir beginnen unsere Ausführungen mit einem gruppentheoretischen Satz.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine (abstrakte) Gruppe. Ferner sei $\mathfrak{E}\ (\subset \mathfrak{G})$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ ihr Normalisator in $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten beliebige Elemente $a, A \in \mathfrak{G}$ und die mit $\mathfrak{E}$ in bezug auf a und A konjugierten Untergruppen in $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{g}_a = a^{-1}\,\mathfrak{E}\,a, \quad \mathfrak{g}_A = A^{-1}\,\mathfrak{E}\,A.$$

Ferner sei $\mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a$ bzw. $\mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A$ die links- bzw. rechtsseitige Restklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathfrak{g}_a$ bzw. $\mathfrak{g}_A$ ([3]).

Zunächst ist es leicht einzusehen, daß der Komplex in $\mathfrak{G}$:

$$(1)\qquad K(A, a) = A^{-1}\,\mathfrak{E}\,a$$

in beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A$ als Element enthalten ist, also

$$K(A, a) \in \mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a \frown \mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A\,.$$

Dies geht unmittelbar aus

$$K(A, a) = (A^{-1}a)\,\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_A\,(A^{-1}a)$$

hervor.

Wir beweisen nun den

Satz. *Dann und nur dann haben die Zerlegungen* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A$ *genau das Element* $K(A, a)$ *gemeinsam,*

$$\{K(A,a)\} = \mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a \frown \mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A, \tag{2}$$

wenn $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ *ist.*

Beweis. Es sei

$$L \in \mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a \frown \mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A,$$

also

$$L = x\,\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_A\,x, \tag{3}$$

wobei $x \in \mathfrak{G}$ ein geeignetes Element von $\mathfrak{G}$ ist.

Aus (3) folgt

$$A^{-1}(Ax)\,\mathfrak{g}_a = A^{-1}\,\mathfrak{E}(Ax)$$

und ferner

$$(Ax)\,\mathfrak{g}_a = \mathfrak{E}(Ax).$$

Wir setzen $Ax = z$. Sodann haben wir:

$$z\,\mathfrak{g}_a = \mathfrak{E}\,z,$$

$$(z\,a^{-1})\,\mathfrak{E}\,a = \mathfrak{E}\,z,$$

$$(z\,a^{-1})\,\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(z\,a^{-1}).$$

Bezeichnen wir $z\,a^{-1}$ mit n, so ergibt die letzte Formel:

$$n \in \mathfrak{N}.$$

Nun haben wir: $z = na$, $Ax = na$ und folglich

$$x = A^{-1}n\,a.$$

Es kommt also

$$L = A^{-1}(n\,\mathfrak{E})\,a = A^{\;1}(\mathfrak{E}\,n)\,a \tag{4}$$

heraus.

Wir sehen: Jedes den beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A$ gemeinsame Element L hat die Form (4), wobei $n \in \mathfrak{N}$ ist.

Umgekehrt gilt für den mit einem beliebigen Element $n \in \mathfrak{N}$ im Sinne der Formeln (4) gebildeten Komplex L:

$$L = (A^{-1}\,n\,a)\,\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_A(A^{-1}\,n\,a) \in \mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a \frown \mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A.$$

a. Es sei $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Wir betrachten ein beliebiges den beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A$ gemeinsames Element L. Sodann haben wir Formeln wie (4) mit $n \in \mathfrak{N}$. Aus der Voraussetzung folgt $n\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\,n = \mathfrak{E}$, also: $L = K(A, a)$.

b. Es gelte die Formel (2). Wir betrachten ein beliebiges Element $n \in \mathfrak{N}$ und den im Sinne er Formeln (4) gebildeten Komplex L. Aus der Voraussetzung folgt: $L - K(A, a)$, also $A^{-1}(n\,\mathfrak{E})\,a = A^{-1}\,\mathfrak{E}\,a$, und aus dieser letzteren Beziehung haben wir: $n \in \mathfrak{E}$. Folglich ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$.

Damit ist der Beweis beendet.

Wir sehen: Wenn der Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ mit der Untergruppe $\mathfrak{E}$ zusammenfällt, so ist der Komplex $K(A, a)$ [(1)] durch die Untergruppen $\mathfrak{g}_a$ und $\mathfrak{g}_A$ als das einzige den beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\,\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{G}/_r\,\mathfrak{g}_A$ gemeinsame Element eindeutig bestimmt.

Ferner erhalten wir aus dem obigen Satz die für unsere weiteren Ausführungen wichtige

Folgerung. *Es sei* $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. *Unter dieser Voraussetzung ist ein Element* $x \in \mathfrak{G}$ *dann und nur dann in dem Komplex* $K(A, a)$ *enthalten, also*

$$(5) \qquad x \qquad A^{\ 1} e\, a, \qquad e \in \mathfrak{E},$$

wenn es die Gruppe $\mathfrak{g}_A$ *in die Gruppe* $\mathfrak{g}_a$ *transformiert:*

$$(6) \qquad x^{\ 1}\, \mathfrak{g}_A\, x \qquad \mathfrak{g}_a .$$

In der Tat, zunächst folgt aus (5) unmittelbar die Beziehung (6). Ferner haben wir aus (6): $\mathfrak{g}_A\, x \quad x\, \mathfrak{g}_a$, und nach dem obigen Satz fällt dieser Komplex mit $(K(A, a) \quad)\ A^{\ 1}\, \mathfrak{E}\, a$ zusammen. Daraus folgt (5).

3. Eine Struktureigenschaft der Phasengruppe

Es sei nun $\mathfrak{G}$ die Phasengruppe der linearen Diffgen 2. Ordnung. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht also aus allen im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ definierten und von unten und oben unbeschränkten Phasenfunktionen $\alpha(t)$ ($\alpha(t) \in C_3$, $\alpha'(t) \neq 0$ für $t \in j$), wobei die Multiplikation vermöge Zusammensetzung von Funktionen erklärt ist. Bekanntlich ist jedes Element $\alpha(t) \in \mathfrak{G}$ eine (erste) Phase der linearen (oszillatorischen) Diffg $y'' - q(t)y$ (q) mit dem Träger

$$(7) \qquad q(t) \qquad -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) .$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht also aus Phasen aller linearen oszillatorischen Diffgen (q) im Intervall j.

Es sei $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$ die Fundamentaluntergruppe von $\mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ wird also von allen Phasen der Diffg (-1) (d. h. $y'' = -y$) gebildet. Bekanntlich ([4]) hat die rechtsseitige Restklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathfrak{E}$ die folgende Eigenschaft: Die Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ und die Menge aller (stetigen) Träger q oszillatorischer Diffgen (q) im Intervall j sind mengentheoretisch äquivalent; und zwar erhält man eine schlichte Abbildung von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ auf die genannte Menge, so daß man jedem Element $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ den vermöge einer beliebigen in $\bar{a}$ enthaltenen Phasenfunktion $\alpha(t)$ $(\in \bar{a})$ im Sinne der Formel (7) gebildeten Träger q zuordnet.

Es sei nun $\mathfrak{N}$ der Normalisator von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$.

Satz. *Der Normalisator* $\mathfrak{N}$ *fällt mit* $\mathfrak{E}$ *zusammen*: $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$.

Beweis. Es seien $\nu \in \mathfrak{N}$, $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ beliebige Elemente von $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{E}$. Dann gibt es ein Element $\varepsilon \in \mathfrak{E}$, so daß

$$\nu\,\varepsilon = \bar{\varepsilon}\,\nu \tag{8}$$

ist. Es sei q_ν der Träger mit der Phase ν (d. h. der Träger der Diffg (q_ν), von der ν eine Phase ist). Die Phasenfunktion $\bar{\varepsilon}\nu$ liegt offenbar in demselben Element von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ wie ν; daraus folgt

$$q_{\bar{\varepsilon}\nu}(t) = q_\nu(t)\,. \tag{9}$$

Ferner haben wir im Hinblick auf (7) (s. [1], S. 330):

$$\begin{aligned} q_{\nu\varepsilon}(t) = -\{\nu\varepsilon, t\} - [\nu\varepsilon(t)]'^2 &= [-\{\nu, \varepsilon(t)\} - \nu'^2(\varepsilon)]\,\varepsilon'^2(t) \\ &+ [-\{\varepsilon, t\} - \varepsilon'^2(t)] + \varepsilon'^2(t) \end{aligned}$$

und folglich

$$q_{\nu\varepsilon}(t) = [1 + q_\nu(\varepsilon)]\,\varepsilon'^2(t) - 1\,. \tag{10}$$

Aus (10), (8), (9) erhalten wir:

$$[1 + q_\nu(\varepsilon)]\,\varepsilon'^2(t) = 1 + q_\nu(t)\,. \tag{11}$$

Es sei t_0 eine beliebige feste Zahl. Sodann gibt es (s. [2], S. 238) zu beliebigen Zahlen x, $x'\,(\neq 0)$ stets Phasenfunktionen $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ mit den Anfangswerten $\varepsilon(t_0) = x$, $\varepsilon'(t_0) = x'$.

Wir wenden die Formel (11) für $t = t_0$ und zunächst für $\varepsilon(t_0) = x$, $\varepsilon'(t_0) = 1$ und dann für $\varepsilon(t_0) = 0$, $\varepsilon'(t_0) = 2$ an. Wir erhalten zunächst $q_\nu(x) = q_\nu(t_0)$, woraus wir schließen, daß die Funktion q_ν eine Konstante $(= q_\nu(t_0))$ ist. Ferner erhalten wir die Beziehung $q_\nu(t) = -1$. Aus dieser letzteren folgt $\nu \in \mathfrak{E}$, womit der Beweis beendet ist.

4. Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen der Diffg (Qq)

Wir betrachten nun eine Kummersche Diffg (Qq) vom oszillatorischen Typus. Zu ihr gehören, wie wir bereits erwähnt haben, die mit ihr assoziierten Diffgen (QQ), (qq).

Die von allen Integralen der Diffg (Qq) gebildete Menge, also die Menge der allgemeinen Dispersionen der Diffg (Qq), bezeichnen wir mit I (Qq). Die Integralmengen von (QQ), (qq) werden also mit I (QQ), I (qq) bezeichnet.

Wir übernehmen die obige Bedeutung (Abschnitt 3) von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$.

Es seien A, α beliebige Phasen der Träger Q, q. Dann haben wir ([6])

$$(K(A,\alpha) =) \quad I(\mathrm{Qq}) = A^{-1}\mathfrak{E}\,\alpha,$$

und folglich auch

$$(\mathfrak{g}_A =) I(\mathrm{QQ}) = A^{-1}\mathfrak{E}A, \quad (\mathfrak{g}_a =) I(\mathrm{qq}) = \alpha^{-1}\mathfrak{E}\,\alpha.$$

Wir bemerken, daß die Integralmengen $I(\mathrm{Qq})$, $I(\mathrm{QQ})$, $I(\mathrm{qq})$ von der Wahl der Phasen A, α der Träger Q, q nicht abhängen.

Wir wenden nun das obige Resultat (Folgerung aus dem Satz von Abschnitt 2) an und erhalten den folgenden

Satz. *Eine Phasenfunktion ξ ist dann und nur dann eine allgemeine Dispersion der Diffg* (Qq), *wenn sie die allgemeinen Dispersionen der mit* (Qq) *assoziierten ersten Diffg* (QQ) *in die der zweiten* (qq) *transformiert*:

$$\xi^{-1} I(\mathrm{QQ})\,\xi = I(\mathrm{qq}).$$

Bemerkung. Aus $\xi^{-1} I(\mathrm{QQ})\,\xi = I(\mathrm{qq})$ folgt $(\xi^{-1})^{-1} I(\mathrm{qq})\,\xi^{-1} = I(\mathrm{QQ})$, und der Satz ergibt das bekannte ([1]) Resultat: Die zu einer allgemeinen Dispersion der Diffg (Qq) inverse Funktion ist eine allgemeine Dispersion der Diffg (qQ). – Die in dem Satz enthaltene notwendige Bedingung ist bekannt ([7]).

Literatur

[1] O. Borůvka, Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app. **41**, 325–342 (1956).

[2] —, Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Ibid. **49**, 229–251 (1960).

[3] —, Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. Berlin 1960. Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[4] —, Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale. Bul. Inst. Polit. din Iassi **9**, 11–20 (1963).

[5] —, Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Annal. Şti. Univ. din Iassi, 11_B, 217–238 (1965).

[6] —, Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. Berlin 1967. Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[7] E. Barvínek, Über die Vertauschbarkeit der Dispersionen und Lösungen der Differentialgleichung

$$\sqrt{|X'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)'' + q(X)\,X'^2 = Q(t).$$

Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr. 393 (1958) (russ.).