Otakar Borůvka
Sur les correspondences analytiques entre deux plans projectifs. II

Spisy přír. fak. MU, č. 85, 1927, 34 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500138

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1927 | ČÍS. 85

SUR LES CORRESPONDANCES ANALYTIQUES ENTRE DEUX PLANS PROJECTIFS

(DEUXIÈME PARTIE)

PAR

OTAKAR BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

SUR LES CORRESPONDANCES ANALYTIQUES ENTRE DEUX PLANS PROJECTIFS II.

Dans le présent Mémoire je me propose d'établir quelques résultats de la géométrie projective des correspondances analytiques entre deux plans. Je vais d'abord faire quelques remarques générales*.

Une correspondance analytique entre deux plans projectifs (A), (B) étant donnée, on peut trouver (d'une infinité de manières) un système de formes différentielles à deux variables qui constituent pour la correspondance un système complet d'invariants différentiels par rapport au groupe projectif. En formant de tels systèmes on est amené à introduire une forme cubique différentielle Ψ dont la signification est intrinsèque. L'équation $\Psi = 0$ définit au point considéré des directions, que j'appele les directions caractéristiques et dont l'interprétation géométrique est la suivante: *Pour qu'a un point d'inflexion d'une courbe quelconque du plan* (A) *corresponde dans la correspondance considérée un point d'inflexion de la courbe correspondante du plan* (B) *il faut et il suffit que la direction de cette courbe à ce point soit une direction caractéristique.* En tenant compte du nombre des directions caractéristiques au point considéré, on peut donc diviser les correspondances en quatre espèces: Une correspondance est dite *de la première espèce,* si elle admet au point considéré trois directions caractéristiques et trois seulement: elle est dite *de la deuxième espèce,* s'il existe au point considéré et dans un voisinage de ce point, deux directions caractéristiques et deux seulement; elle est dite *de la troisième espèce,* si l'on a au point considéré et dans un voisinage de ce point une direction caractéristique et une seule; enfin, une correspondance admettant au point considéré et dans un voisinage de ce point une infinité de directions caractéristiques est une correspondance projective.

Dans la suite je m'occupe d'abord des *correspondances de la première espèce.* Je me demande, s'il existe des correspondances de la première espèce, dont un système complet d'invariants différentiels par rapport au groupe projectif ne contient que des différentielles exactes. Je trouve qu'il en existe et *qu'elles dépendent au moins d'une fonction arbitraire d'un argument*; je donne les équations finies d'un type de telles correspondances qui admettent cette généralité.

Je m'occupe ensuite des correspondances dont les courbes caractéristiques (c'est à dire les courbes dont la direction à chaque point est

* Voir la première partie de mon Mémoire „Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs“ (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, No 72, 1926).

caractéristique) sont des droites. Il est évident que ces correspondances, si elles existent, jouissent de la propriété de faire correspondre à trois droites (et trois seulement) passant par un point trois droites passant par le point correspondant et grâce à cette propriété la question sur l'existence et sur la construction géométrique de telles correspondances devient intéressante. Malheuresement, je ne possède pas une réponse complète sur la question de la généralité de telles correspondances. Je trouve bien une famille générale des correspondances cherchées, dépendante effectivement de *cinq constantes arbitraires et caractérisée par la propriété que les droites caractéristiques dans les deux plans enveloppent des courbes algébriques de la troisième classe* et je donne leur construction géométrique; mais les calculs que j'ai fait n'excluent pas encore la possibilité d'existence d'autres correspondances du type considéré. Cependant, pour répondre à la question s'il en existe, on est amené, au moins par la méthode que j'applique, à faire des calculs que je n'ai pas pu faire effectivement à cause de leur longeur.

Quant aux *correspondances de la deuxième espèce*, je trouve que *les correspondances générales* de cette espèce *dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments*. Je m'occupe ensuite des correspondances dont les courbes caractéristiques sont des droites. Le calcul montre qu'on a deux types de telles correspondances; *les correspondances qui admettent la plus grande généralité dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument, les autres d'une fonction d'un argument*. La construction géométrique dans tous les deux cas est simple.

Dans le cas *des correspondances de la troisième espèce* je démontre que *les correspondances générales de la troisième espèce, dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument*. Je démontre ensuite qu'il existe deux types des correspondances de cette espèce dont les courbes caractéristiques sont des droites, *les correspondances générales dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument* et je donne leur construction géométrique.

La méthode que j'applique pour trouver les résultats indiqués consiste, en général, dans la formation et discussion des systèmes d'équations différentielles qui définissent les correspondances cherchées aux couples de transformations projectives près. Pour former de tels systèmes je fais usage de la méthode des systèmes de référence mobiles sous la forme employée par *M. E. Cartan*. Cette méthode, combinée avec la théorie des systèmes d'équations de Pfaff en involutiom, donnée également par M. E. Cartan, s'a montrée très utile dans des recherches sur de pareilles questions générales.

J'adresse à M. E. Cartan et à M. E. Čech mes affectueux remercîments pour des précieux conseils qu'ils m'ont donnés au sujet de ce travail.

1. Notions fondamentales de la théorie des systèmes d'équations de Pfaff.

1. Dans la suite nous aurons souvent à considérer des systèmes d'équations de Pfaff. Nous allons rappeler les résultats principaux de la théorie de tels systèmes et spécialement la définition et les propriétés essentielles des systèmes en involution*, pour faciliter la lecture de ce Mémoire.

2. Considérons un système de s équations de Pfaff indépendantes à n ($> s$) variables dont on regarde s comme fonctions inconnues de $n - s$ variables indépendantes. Un tel système est dit *complètement intégrable* s'il admet toujours une solution (et une seule) telle que pour des valeurs numériques données des variables indépendantes les fonctions inconnues prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies.

*Pour qu'un système d'équations de Pfaff soit complètement intégrable il faut et il suffit que les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système s'annulent quand on suppose les différentielles liées par les équations du système*** (*Théorème de Frobenius*).

3. Dans l'espace à n dimensions *un élément linéaire* E_1, c'est à dire l'ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point, est dit *intégral* par rapport à un système d'équations de Pfaff, si ses coordonnées satisfont aux équations du système. Deux éléments linéaires intégraux issus du même point, E_1, E_1' sont dits *en involution* par rapport au système considéré, si leurs coordonnées annulent tous les covariants bilinéaires des premiers membres du système.

Un élément plan E_p à p dimensions, c'est à dire l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane à p dimensions passant par ce point, est dit *intégral* par rapport à un système d'équations de Pfaff, lorsque tous ses éléments linéaires sont intégraux et deux à deux en involution.

4. Considérons un système de s équations de Pfaff indépendantes à n variables dont p indépendantes et $s + q$ ($q = n - s - p \geq 0$) dépendantes. Un tel système est dit *en involution* si par un point arbitraire de l'espace il passe au moins un élément linéaire intégral E_1 (par rapport à ce système); si par un élement intégral arbitraire E_1 il passe au moins

* A ce sujet, le lecteur trouvera des explications detaillées dans le Mémoire fondamental de M. E. Cartan, »Sur la structure des groupes infinis de transformations« (Annales de l'École Normale sup., 3[e] série, t XXI, chap. I, 1904, p. 153).

** Voir p. exemple E. Goursat, »Leçons sur le problème de Pfaff« (Paris 1922) p. 267.

un élément intégral à deux dimensions E_2; si par un élément intégral arbitraire à deux dimensions il passe au moins un élément intégral à trois dimensions E_3 et ainsi de suite; si par un élément intégral arbitraire à $p-1$ dimensions E_{p-1} il passe au moins un élément intégral à p dimensions E_p.

Le degré d'indétermination des intégrales d'un système en involution se déduit d'une manière très simple des degrés d'indétermination des éléments intégraux E_{i+1} qui passent par un élément arbitraire E_i $(i=1, 2, .. \, p-1)$.

5. Dans la suite nous n'aurons à considérer que des systèmes de Pfaff pour lesquels $p=2$, les intégrales étant assujetties à n'établir aucune relation linéaire entre deux expressions de Pfaff données ω_1, ω_2 indépendantes entre elles et indépendantes des premiers membres des équations du système.

Soient

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_s = 0 \tag{1}$$

les équations d'un tel système. Les premiers membres de ces équations et les deux formes données ω_1, ω_2 forment $s+2$ formes linéairement indépendantes; on peut leur en adjoindre $q=n-s-2$ autres indépendantes entre elles et indépendantes des premières, soit

$$\varpi_1, \varpi_2, \ldots \varpi_q.$$

Supposons que nous ayons, en tenant compte des équations du système

$$\Theta_k' = \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} [\omega_i \varpi_\rho]. \tag{2}$$

Pour donner des conditions nécessaires et suffisantes d'involution, désignons par ξ_1, ξ_2; ξ'_1, ξ'_2 quatre indéterminées et formons au moyen des coefficients $a_{i\rho k}$ la matrice à q colonnes et à $2s$ lignes

$$\begin{array}{llll}
a_{111}\xi_1 + a_{211}\xi_2, & a_{121}\xi_1 + a_{221}\xi_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{1q1}\xi_1 + a_{2q1}\xi_2, \\
a_{112}\xi_1 + a_{212}\xi_2, & a_{122}\xi_1 + a_{222}\xi_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{1q2}\xi_1 + a_{2q2}\xi_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{11s}\xi_1 + a_{21s}\xi_2, & a_{12s}\xi_1 + a_{22s}\xi_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{1qs}\xi_1 + a_{2qs}\xi_2; \\
a_{111}\xi'_1 + a_{211}\xi'_2, & a_{121}\xi'_1 + a_{221}\xi'_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{1q1}\xi'_1 + a_{2q1}\xi'_2, \\
a_{112}\xi'_1 + a_{212}\xi'_2, & a_{122}\xi'_1 + a_{222}\xi'_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{1q2}\xi'_1 + a_{2q2}\xi'_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots. \\
a_{11s}\xi'_1 + a_{21s}\xi'_2, & a_{12s}\xi'_1 + a_{22s}\xi'_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{1qs}\xi'_1 + a_{2qs}\xi'_2,
\end{array} \tag{3}$$

et cherchons les rangs des deux matrices en prenant successivement dans (3) les s et $2s$ premières lignes. Soient s_1 et s_1+s_2 ces deux rangs.

Cherchons ensuite le nombre des paramètres dont dépend l'élément intégral E_2, le plus général qui n'établit aucune relation linéaire entre ω_1, ω_2; c'est à dire le nombre des variables $x_{\rho i}$ qui dans les équations

$$\sum_{\rho=1}^{q} (a_{1\rho k}\, x_{\rho 2} - a_{2\rho k}\, x_{\rho 1}) = 0, \qquad (k = 1, 2, .. \, s) \tag{4}$$

peuvent être prises arbitrairement. *Ce nombre est au plus égal à $2q - s_1$. Pour que le système soit en involution, il faut et il suffit qu'il soit exactement égal à ce nombre limite $2q - s_1$.*

L'intégrale générale dépend alors de $q - s_1$ fonctions arbitraires de deux arguments et de s_1 fonctions arbitraires d'un argument.

Si le système étudié est en involution, la question d'existence et d'indétermination des intégrales est résolue. Si non, on le peut prolonger et on peut appliquer la méthode indiquée à ce système prolongé. On est sûr, d'après un théorème générale de M. E. Cartan que, en répétant ce procédé suffisamment de fois, on retombe soit à un système en involution soit à un système d'équations incompatibles.

2. Remarques générales sur la formation des systèmes d'équations différentielles qui définissent des correspondances.

1. Dans la suite nous aurons souvent à déterminer des correspondances analytiques auxquelles on a imposé a priori des certaines propriétés géométriques. A ce sujet nous allons faire quelques remarques générales qui nous seront utiles dans la suite.

2. Pour déterminer des correspondances auxquelles on a imposé a priori des certaines propriétés geométriques, considérons avec les points correspondants A et B les points A_1, A_2 dans le plan (A) et les points B_1, B_2 dans le plan (B) et envisageons d'abord les coordonnées des points A_1, A_2; B_1, B_2 et les facteurs des points A, B comme des paramètres indépendantes. Avec ces paramètres nous pouvons former un système de formes différentielles indépendantes ω_{ik}, τ_{ik} au moyen des formules

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, & dB &= \tau_{00} B + \tau_1 B_1 + \tau_2 B_2, \\ dA_1 &= \omega_{10} A + \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2, & dB_1 &= \tau_{10} B + \tau_{11} B_1 + \tau_{12} B_2, \\ dA_2 &= \omega_{20} A + \omega_{21} A_1 + \omega_{22} A_2, & dB_2 &= \tau_{20} B + \tau_{21} B_1 + \tau_{22} B_2, \end{aligned} \tag{5}$$

et nous pouvons exprimer les covariants bilinéaires de ces formes par les formules $(\omega_{01} = \omega_1,\ \omega_{02} = \omega_2)$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{kj}' &= [\omega_{ko}\,\omega_{oj}] + [\omega_{k1}\,\omega_{1j}] + [\omega_{k2}\,\omega_{2j}], \\ \tau_{kj}' &= [\tau_{ko}\,\tau_{oj}] + [\tau_{k1}\,\tau_{1j}] + [\tau_{k2}\,\tau_{2j}]. \end{aligned}\right. \quad (k,j = 0,1,2). \tag{6}$$

Si nous exprimons les propriétés importées aux correspondances cherchées par des relations entre les formes ω_{ik}, τ_{ik}, nous sommes amenés à un système d'équations de Pfaff qui définit, en général, les correspondances cherchées, aux couples des transformations projectives près. Dans ces équations on a à regarder comme variables indépendantes les variables qui déterminent la position du point A; les intégrales du système considéré sont donc assujeties à la condition de n'établir aucune relation linéaire entre les formes ω_1 et ω_2. Quant aux autres variables qui figurent dans les équations considérées, il se peut, qu'il en existe surabondantes;

on pourra alors profiter de cette circonstance pour simplifier le système considéré. Pour résoudre la question d'existence et du degré de l'indétermination des correspondances cherchées on n'a qu'à appliquer au système considéré la théorie des systèmes de Pfaff en involution, comme elle vient d'être rappelée, sans se préoccuper des variables surabondantes qui, au fond, s'éliminent automatiquement*.

3. Sur les correspondances de la première espèce dont un système complet d'invariants différentiels ne contient que des différentielles exactes.

1. Une correspondance entre deux plans projectifs étant donnée, on peut (d'une infinité de manières), par une normalisation des systèmes de référence, trouver un système des formes différentielles à deux variables ω_{ik}, τ_{ik}, qui constituent, pour la correspondance, un système complet d'invariants différentiels par rapport au groupe projectif. On peut se demander, s'il y a des correspondances, dont au moins un système complet d'invariants différentiels ne contient que des différentielles exactes et spécialement, s'il y en a de générales, c'est à dire de la première espèce. Leur existence étant établie, la normalisation des systèmes de référence étant fixée, on peut se proposer, plus généralement, de trouver toutes les correspondances jouissant de la propriété indiquée.

2. Considérons le système complet d'invariants différentiels d'une correspondance générale de la première espèce, qui est fourni par les formules.

$$\tau_1 = \omega_1; \quad \tau_2 = \omega_2;$$

$$\tau_{10} = \omega_{10} - g\omega_2; \; \tau_{11} = \omega_{11}; \; \tau_{12} = \omega_{12} - \omega_1; \; \tau_{20} = \omega_{20} - g\omega_1;$$

$$\tau_{21} = \omega_{21} - \omega_2; \; \tau_{22} = \omega_{22}; \; \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0; \; \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= p_1\omega_1 + q_2\omega_2, \\
\omega_{12} &= (\tfrac{1}{2}\overline{g+1} + p)\,\omega_1 + 3q_1\omega_2, \\
\omega_{21} &= 3q_2\omega_1 + (\tfrac{1}{2}\overline{g+1} - p)\,\omega_2, \\
\omega_{22} &= q_1\omega_1 + p_2\omega_2, \\
\omega_{10} &= w_1\omega_1 + v_2\omega_2, \\
\omega_{20} &= v_1\omega_1 + w_2\omega_2, \\
dg &= (w_2 + 3g\,\overline{p_1 - q_1})\,\omega_1 + (w_1 + 3g\,\overline{p_2 - q_2})\,\omega_2,
\end{aligned} \tag{6}$$

les fonctions g, p_1,.. étant assujeties à remplir les relations

$$\begin{aligned}
&[dp_1\omega_1] + [dq_2\omega_2] + (v_2 + 10q_1q_2 + p_1\overline{p_2 - 2q_2} + p^2 - \tfrac{1}{4}\overline{g+1}^2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dq_1\omega_1] + [dp_2\omega_2] - (v_1 + 10q_1q_2 + p_2\overline{p_1 - 2q_1} + p^2 - \tfrac{1}{4}\overline{g+1}^2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dp\,\omega_1] + 3[dq_1\omega_2] - \tfrac{3}{2}(w_1 + g\,\overline{p_2 - q_2} - 4q_1\overline{q_1 - p_1})[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&3[dq_2\omega_1] - [dp\,\omega_2] + \tfrac{3}{2}(w_2 + g\,\overline{p_1 - q_1} - 4q_2\overline{q_2 - p_2})[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dw_1\omega_1] + [dv_2\omega_2] + (w_1q_2 + 2p_2 + 3q_1v_1 - p_1v_2 - w_2p + \tfrac{1}{2}\overline{g+1})[\omega_1\omega_2] = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

---

* Voir E. Cartan „Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien" (Bull. de la Soc. math. de France, 47, 1919; 48, 1920); chap. III.

$$[dv_1\omega_1]+[dw_2\omega_2]-(w_2\overline{q_1+2p_1}+3\overline{q_2v_2-p_2v_1}+w_1\overline{p-\tfrac{1}{2}\overline{g+1}})[\omega_1\omega_2]=0,$$
$$[dw_2\omega_1]+[dw_1\omega_2]+3g\{[d(p_1-q_1)\omega_1]+[d(p_2-q_2)\omega_2]\}+ \qquad (7)$$
$$+4(w_2\overline{p_2-q_2}-w_1\overline{p_1-q_1})[\omega_1\omega_2]=0^*.$$

En posant $\beta=\frac{1}{2}\overline{g+1}$, pour que toutes les formes ω_{ik}, τ_{ik} soient des différentielles exactes il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{gathered} p_1=q_1;\ p_2=q_2;\ v_1=v_2;\ w_1=w_2=0; \\ \beta=\text{const.},\ v_1+9q_1q_2+p^2-\beta^2=0. \end{gathered} \qquad (8)$$

Supposons, qu'il existe des correspondances satisfaisant à ces conditions. Les formules (7) ont alors la forme

$$\begin{aligned} &[dq_1\omega_1]+[dp_2\omega_2]=0, \\ &[dp\omega_1]+3[dq_1\omega_2]=0, \\ &3[dq_2\omega_1]-[dp\omega_2]=0, \\ &[dv\omega_1]-[dv\omega_2]=0, \end{aligned} \qquad (9)$$

où on a écrit v au lieu de v_1. On en tire d'abord que v est une constante, que nous désignerons α et quant aux premières trois relations, on voit qu'on les peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &[(\omega_1-\omega_2)(dp+3\overline{q_2-q_1})]=0, \\ &[(\omega_1-\varepsilon\omega_2)(dp+3\overline{\varepsilon q_2-\varepsilon^2 q_1})]=0, \quad (\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}) \\ &[(\omega_1-\varepsilon^2\omega_2)(dp+3\overline{\varepsilon^2 q_2-\varepsilon q_1})]=0. \end{aligned} \qquad (10)$$

De ces formules on déduit immédiatement, en posant

$$\begin{gathered} V_1=p+3\overline{q_2-q_1};\ V_2=p+3\overline{\varepsilon q_2-\varepsilon^2 q_1};\ V_3=p+3\overline{\varepsilon^2 q_2-\varepsilon q_1}; \\ \omega_1=dx;\ \omega_2=dy;\ x-y=v_1;\ x-\varepsilon y=v_2;\ x-\varepsilon^2 y=v_3, \end{gathered} \qquad (11)$$

que V_1 ne dépend que de v_1, V_2 ne dépend que de v_2 et V_3 ne que de v_3. De plus, la dernière des relations (8) donne que V_1, V_2, V_3 sont liés par une relation quadratique

$$V_1V_2+V_1V_3+V_2V_3-3(\beta^2-\alpha). \qquad (12)$$

Inversement, on voit qu'on peut satisfaire aux conditions (8), (9) en prenant par exemple pour V_1, V_2, V_3 des constantes liées par la relation (12). Il existe donc des correspondances de la première espèce dont un système complet d'invariants différentiels ne contient que des différentielles exactes et elles dépendent au moins de quatre constantes arbitraires. Mais nous allons montrer qu'il existe de telles corespondances plus générales.

3. En effet, cherchons la solution la plus générale de l'équation fonctionnelle (12). Posons pour la commodité de l'écriture $k=3(\beta^2-\alpha)$. Prenons v_1, v_2 pour variables indépendantes et dérivons la relation (12) par rapport à ces deux variables. Nous obtiendrons ainsi

* Voir la première partie de mon Mémoire „Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs" p. 18.

d'où résulte

$$\begin{aligned}&V_1'(V_2+V_3)-\varepsilon V_3'(V_1+V_2)=0,\\&V_2'(V_1+V_3)-\varepsilon^2 V_3'(V_1+V_2)=0,\\&V_2'(V_1+V_3)-\varepsilon V_1'(V_2+V_3)=0.\end{aligned}\tag{13}$$

Multiplions la première de ces relations par V_1+V_3, la deuxième par V_2+V_3 et la dernière par V_1+V_2. Nous aurons, en tenant compte de la relation (12) elle même

$$\begin{aligned}&V_1'(V_3^2+k)-\varepsilon V_3'(V_1^2+k)=0,\\&V_2'(V_3^2+k)-\varepsilon^2 V_3'(V_2^2+k)=0,\\&V_2'(V_1^2+k)-\varepsilon V_1'(V_2^2+k)=0.\end{aligned}\tag{14}$$

Cela étant, plusieurs cas sont à distinguer:

1°. Au moins une des fonctions V_1, V_2, V_3 satisfait identiquement à l'équation quadratique $X^2+k=0$. Nous la désignerons par U et les deux autres par V, W. On peut écrire la relation (12) sous la forme suivante

$$V(U+W)+UW=k.\tag{15}$$

Multiplions cette équation par $U+V$. Nous obtiendrons, en tenant compte de l'hypothèse $U^2+k=0$,

$$(UW-k)(U+V)=0,$$

et puis, en multipliant cette équation par U

$$k(W+U)(U+V)=0.\tag{16}$$

Donc, en supposant la relation (12) remplite par les fonctions U, V, W on voit qu'on a nécessairement

$$V=-U \text{ ou bien } W=-U,\tag{17}$$

de sorte, qu'au moins une des fonctions V, W est la seconde racine de l'équation $X^2+k=0$.

Inversement, on vérifie facilement que, deux quelconques des fonctions V_1, V_2, V_3 étant les deux racines de cette équation, la troisième étant arbitraire, l'équation (12) est remplite.

2°. Considérons maintenant le deuxième cas possible, où aucune des fonctions V_1, V_2, V_3 au point considéré $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ et par suite dans un certain voisinage de ce point ne remplit pas l'équation $X^2+k=0$. On peut supposer $v_1^{(0)}=v_2^{(0)}=0$. Dans ce cas on peut mettre les équations (14) sous la forme

$$\frac{V_1'}{V_1^2+k}=\varepsilon^2\frac{V_2'}{V_2^2+k}=\varepsilon\frac{V_3'}{V_3^2+k},\tag{18}$$

d'où on conclût immédiatement que les membres de ces équations sont constants et ont une valeur commune C. On peut donc écrire

$$\frac{V_1'}{V_1^2+k}=C;\ \frac{V_2'}{V_2^2+k}=\varepsilon C;\ \frac{V_3'}{V_3^2+k}=\varepsilon^2 C.\tag{19}$$

Cela posé, deux cas et deux seulement sont possibles:

2·1°: $k \neq 0$. Dans ce cas on trouve facilement en intégrant les équations (19) que, si les fonctions V_1 V_2, V_3 satisfont à l'équation (12) elles ont nécéssairement la forme

$$\begin{gathered} V_1 = \sqrt{k}\operatorname{tg}\sqrt{k}(Cv_1 + k_1);\ V_2 = \sqrt{k}\operatorname{tg}\sqrt{k}(\varepsilon Cv_2 + k_2); \\ V_3 = \sqrt{k}\operatorname{tg}\sqrt{k}(\varepsilon^2 Cv_3 + k_3), \end{gathered} \tag{20}$$

k_1, k_2, k_3 étant des costantes, dont on peut supposer que les parties réelles de $k_1\sqrt{k}$, $k_2\sqrt{k}$, $k_3\sqrt{k}$ sont comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et on a

$$k_1 + k_2 + k_3 = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{21}$$

Inversement, on vérifie facilement que, les fonctions V_1, V_2, V_3 ayant la forme (20) et les constantes k_1, k_2, k_3 étant liées par la relation (21), l'équation (12) est remplite identiquement.

2·2°: $k = 0$. Dans ce cas ou trouve par l'intégration des équations (19) que, si les fonctions V_1, V_2, V_3 satisfont à l'équation (12), elles ont nécéssairement la forme

$$V_1 = \frac{1}{Cv_1 + k_1};\quad V_2 = \frac{1}{\varepsilon Cv_2 + k_2},\quad V_3 = \frac{1}{\varepsilon^2 Cv_3 + k_3}, \tag{22}$$

k_1, k_2, k_3 étant des constantes liées par la relation

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0. \tag{23}$$

Inversement, on vérifie facilement que la réciproque est vraie.

En définitive, on voit *qu'il existe des correspondances de la première espèce dont un système complet d'invariants différentiels ne contient que des différentielles exactes et qu'elles dépendent au moins d'une fonction arbitraire d'un argument.*

4. Cela étant, nous allons chercher les équations finies de telles correspondances. Pour cela, considérons les systémes d'équations aux dérivées partielles, définissant les correspondances considérées. En se servant de la notation originale, on peut écrire ces systèmes sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial x} = -2q_1 A + A_1, && \frac{\partial A}{\partial y} = -2q_2 A + A_2,\\
&\frac{\partial A_1}{\partial x} = q_1 A_1 + (\beta + p) A_2, && \frac{\partial A_1}{\partial y} = \alpha A + q_2 A_1 + 3q_1 A_2,\\
&\frac{\partial A_2}{\partial x} = \alpha A + 3q_2 A_1 + q_1 A_2, && \frac{\partial A_2}{\partial y} = (\beta - p) A_1 + q_2 A_2;\\
&\frac{\partial B}{\partial x} = -2q_1 B + B_1, && \frac{\partial B}{\partial y} = -2q_2 B + B_2,\\
&\frac{\partial B_1}{\partial x} = q_1 B_1 + (\beta - 1 + p) B_2, && \frac{\partial B_1}{\partial y} = (\alpha - 2\beta + 1) B + q_2 B_1 + 3q_1 B_2,\\
&\frac{\partial B_2}{\partial x} = (\alpha - 2\beta + 1) B + 3q_2 B_1 + q_1 B_2, && \frac{\partial B_2}{\partial y} = (\beta - 1 - p) B_1 + q_2 B_2,
\end{aligned} \tag{24}$$

les p, q_1, q_2 étant définis par les formules (11). On a donc

$$p=\tfrac{1}{3}(V_1+V_2+V_3);\quad q_1=-\tfrac{1}{9}(V_1+\varepsilon V_2+\varepsilon^2 V_3);\quad q_2=\tfrac{1}{9}(V_1+\varepsilon^2 V_2+\varepsilon V_3). \tag{25}$$

Cela posé, on sait que, k étant donné, une et une seule des fonctions V_1, V_2, V_3 peut être arbitraire, les deux autres étant les deux racines de l'équation $X^2+k=0$. On a donc, pour construire des correspondances considérées trois possibilités et trois seulement en prenant une fonction arbitraire dépendante de $x-y$ ou $x-\varepsilon y$ ou enfin de $x-\varepsilon^2 y$.

5. Pour étudier ces trois cas possibles en même temps, désignons par ε, ε_1, ε_2 les trois racines distinctes de l'équation $x^3-1=0$ et remarquons qu'on peut toujours écrire la fonction V_k qui a été prise arbitrairement sous la forme $3\varepsilon^2 W(x-\varepsilon y)$. On peut donc écrire les formules (25) dans tous les cas

$$p=\varepsilon^2 W(x-\varepsilon y);\quad q_1=-\tfrac{1}{9}(3W+\overline{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\sqrt{-k});\quad q_2=\tfrac{1}{9}(3\varepsilon W+\overline{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}\sqrt{-k}). \tag{26}$$

De plus, on peut supposer qu'on a écrit dans les équations (24) $\varepsilon^2\beta$ au lieu de β et on peut considérer α comme une fonction de β et de k. On peut donc prendre k arbitrairement. Si l'on pose

$$\sqrt{-k}=\frac{9}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\beta-\gamma),$$

γ étant une constante arbitraire, on aura

$$\alpha=\varepsilon(2\beta-3\gamma)(3\gamma-4\beta),$$
$$p=\varepsilon^2 W(x-\varepsilon y);\quad q_1=\gamma-\beta-\tfrac{1}{3}W;\quad q_2=\varepsilon(\gamma-\beta+\tfrac{1}{3}W), \tag{27}$$

et les expressions $\varepsilon^2\beta+p$ et $\varepsilon^2(\beta-p)$, qui interviennent dans les coefficients du premier des systèmes (24) s'écriront

$$\varepsilon^2(\beta+W);\quad \varepsilon^2(\beta-W).$$

Quant au deuxième des systèmes (24), on voit qu'on peut écrire

$$\begin{gathered} q_1=\overline{\gamma-\varepsilon}-\overline{\beta-\varepsilon}-\tfrac{1}{3}W;\quad q_2=\varepsilon(\overline{\gamma-\varepsilon}-\overline{\beta-\varepsilon}+\tfrac{1}{3}W);\\ \alpha-2\varepsilon^2\beta+1=\varepsilon(2\overline{\beta-\varepsilon}-3\overline{\gamma-\varepsilon})(3\overline{\gamma-\varepsilon}-4\overline{\beta-\varepsilon}),\\ \varepsilon^2\beta-1+p=\varepsilon^2(\overline{\beta-\varepsilon}+W);\quad \varepsilon^2\beta-1-p=\varepsilon^2(\overline{\beta-\varepsilon}-W). \end{gathered} \tag{28}$$

Cela étant, faisons un changement de la variable y, en écrivant y au lieu de εy et dans les systèmes (24) posons εA_2 au lieu de A_2 et εB_2 au lieu de B_2. De plus, posons pour la commodité d'écriture β' au lieu de $\beta-\varepsilon$ et γ' au lieu de $\gamma-\varepsilon$; les systèmes (24) seront, en définitive, de la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x} &= -2\left(\gamma-\beta-\tfrac{1}{3}W\right)A + A_1, \\
\frac{\partial A_1}{\partial x} &= \qquad\qquad \left(\gamma-\beta-\tfrac{1}{3}W\right)A_1 + (\beta+W)A_2 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= (2\beta-3\gamma)(3\gamma-4\beta)A + (3\gamma-3\beta+W)A_1 + \left(\gamma-\beta-\tfrac{1}{3}W\right)A_2, \\
\frac{\partial A}{\partial y} &= -2\left(\gamma-\beta+\tfrac{1}{3}W\right)A \qquad\qquad + A_2, \\
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= (2\beta-3\gamma)(3\gamma-4\beta)A + \left(\gamma-\beta+\tfrac{1}{3}W\right)A_1 + (3\gamma-3\beta-W)A_2, \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= \qquad\qquad (\beta-W)A_1 + \left(\gamma-\beta+\tfrac{1}{3}W\right)A_2; \\
\frac{\partial B}{\partial x} &= -2\left(\gamma'-\beta'-\tfrac{1}{3}W\right)B + B_1, \qquad\qquad (28) \\
\frac{\partial B_1}{\partial x} &= \qquad\qquad \left(\gamma'-\beta'-\tfrac{1}{3}W\right)B_1 + (\beta'+W)B_2, \\
\frac{\partial B_2}{\partial x} &= (2\beta'-3\gamma')(3\gamma'-4\beta')B + (3\gamma'-3\beta'+W)B_1 + \left(\gamma'-\beta'-\tfrac{1}{3}W\right)B_2, \\
\frac{\partial B}{\partial y} &= -2\left(\gamma'-\beta'+\tfrac{1}{3}W\right)B \qquad\qquad + B_2, \\
\frac{\partial B_1}{\partial y} &= (2\beta'-3\gamma')(3\gamma'-4\beta')B + \left(\gamma'-\beta'+\tfrac{1}{3}W\right)B_1 + (3\gamma'-3\beta'-W)B_2, \\
\frac{\partial B_2}{\partial y} &= \qquad\qquad (\beta'-W)B_1 + \left(\gamma'-\beta'+\tfrac{1}{3}W\right)B_2.
\end{aligned}
$$

On voit donc que les systèmes pour les fonctions A_i et B_i ont exactement la même forme. Donc, pour avoir les équations finies des correspondances considérées, il suffit de trouver l'intégrale générale du premier des systèmes (28); on aura en même temps l'intégrale générale du deuxième de ces systèmes.

6. On voit d'abord que les coefficients de ce système ne dépendent que de $x-y$. Or, d'après une methode* on peut simplifier de tels systèmes en introduissant au lieu A, A_1, A_2 trois combinaisons linéaires de ces fonctions, indépendantes et convenablement choisies. Nous nous n'occuperons ici que des correspondances générales, pour lesquelles est $\gamma \neq 0$.

Dans ce cas, si l'on introduit les combinaisons linéaires des fonctions A, A_1, A_2 définies par les formules

$$
\begin{aligned}
U &= (2\beta-3\gamma)A + A_1, \\
U_1 &= (2\beta-3\gamma)A \qquad + A_2, \qquad\qquad (29) \\
U_2 &= (4\beta-3\gamma)A + A_1 + A_2,
\end{aligned}
$$

* Voir mon Mémoire „Sur certaines types des surfaces qui sont projectivement applicables sur elles mêmes“ (Publ. de la faculté des Sciences de l'Université Masaryk No. 43, 1924).

on peut exprimer A, A_1, A_2 au moyen des fonctions U, U_1, U_2 par les formules

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3\gamma}(-U - U_1 + U_2), \\ A_1 &= \frac{1}{3\gamma}(2\beta U + \overline{2\beta - 3\gamma}\, U_1 - \overline{2\beta - 3\gamma}\, U_2), \\ A_2 &= \frac{1}{3\gamma}(\overline{2\beta - 3\gamma}\, U + 2\beta U_1 - \overline{2\beta - 3\gamma}\, U_2), \end{aligned} \tag{30}$$

et si l'on exprime que les fonctions A, A_1, A_2 sont définies par le système (28), on trouve pour les fonctions U, U_1, U_2 un système d'équations différentielles qui, écrit comme un système d'équations aux différentielles totales a la forme

$$\begin{aligned} & dU - (\overline{\beta - 2\gamma - \tfrac{1}{3}W}\, U + \overline{\beta + W}\, U_1)\, dx - (\overline{\gamma - \beta + \tfrac{1}{3}W}\, U - \overline{W + \beta}\, U_1)\, dy = 0, \\ & dU_1 - (\overline{W - \beta}\, U + \overline{\gamma - \beta - \tfrac{1}{3}W}\, U_1)\, dx - (\overline{\beta - W}\, U + \tfrac{1}{3}\overline{W + \beta - 2\gamma}\, U_1)\, dy = 0. \\ & \frac{dU_2}{U_2} - (\tfrac{2}{3}W + \gamma)\, dx - (\gamma - \tfrac{2}{3}W)\, dy = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Le système dérivé* de ce système est

$$\begin{aligned} & 2\,dU + (U - 3\,U_1)\frac{dU_2}{U_2} + (3\gamma - 2\beta)(U + U_1)\, dx + \\ & \quad + (\overline{2\beta - 3\gamma}\, U + \overline{2\beta + 3\gamma}\, U_1)\, dy = 0, \\ & 2\,dU_1 + (U_1 - 3\,U)\frac{dU_2}{U_2} + (\overline{2\beta + 3\gamma}\, U + \overline{2\beta - 3\gamma}\, U_1)\, dx + \\ & \quad + (3\gamma - 2\beta)(U + U_1)\, dy = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

et on voit qu'il ne contient pas la fonction W. De plus, si l'on pose pour la commodité de l'écriture $2\beta - 3\gamma = a$, $2\beta + 3\gamma = b$, on peut le remplacer par le système équivalent

$$\begin{aligned} & 2d(U + U_1) - 2(U + U_1)\frac{dU_2}{U_2} - (a - b)\, U dx - (a - b)\, U_1 dy = 0, \\ & 2d(U - U_1) + 4(U - U_1)\frac{dU_2}{U_2} - (\overline{a + b}\, U + 2aU_1)\, dx + \\ & \quad + (2aU + \overline{a + b}\, U_1)\, dy = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

et on trouve facilement que les fonctions

$$e^{-\frac{a-b}{4}(x+y)}\frac{U + U_1}{U_2}; \qquad e^{\frac{a-b}{4}(x+y)}(U - U_1)\, U_2^2 \tag{34}$$

sont des intégrales premières de la première resp. de la deuxième équation de ce système.

---

* Voir p. e. E. Cartan, „Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles“ (Journ. de Crelle, 1915).

Il est donc naturel de faire un changement des variables en posant

$$X = e^{-\frac{a-b}{4}(x+y)} \frac{U+U_1}{U_2}; \quad X_1 = e^{\frac{a-b}{4}(x+y)} (U-U_1)\, U_2^2,$$

ou bien (35)

$$U+U_1 = e^{\frac{a-b}{4}(x+y)} X U_2; \quad U-U_1 = e^{-\frac{a-b}{4}(x+y)} X_1 U_2^{-2},$$

par lequel les équations (33) obtiendront la forme

$$\begin{aligned} dX &= \frac{a-b}{4} e^{-\frac{a-b}{2}(x+y)} X_1 U_2^{-3}\, d(x-y), \\ dX_1 &= \frac{3a+b}{4} e^{\frac{a-b}{2}(x+y)} X U_2^3\, d(x-y). \end{aligned} \tag{36}$$

Le système (31) peut donc être remplacé par les équations (36) et par l'équation

$$\frac{dU_2}{U_2} - (\tfrac{2}{3}W + \gamma)\, dx - (\gamma - \tfrac{2}{3}W)\, dy = 0. \tag{37}$$

De cette dernière on tire immédiatement

$$U_2 = c_2\, e^{\gamma(x+y) + \frac{2}{3}\int W(x-y)\, d(x-y)}, \tag{38}$$

et si l'on pose

$$X_2 = e^{\frac{a-b}{2}(x+y)} U_2^3 = c_2\, e^{2\int W(x-y)\, d(x-y)}, \tag{39}$$

le système (36) s'écrira

$$\begin{aligned} X' &= \mu X_2^{-1} X_1; \\ X_1' &= \nu X_2 X; \end{aligned} \qquad (\mu = -\tfrac{3}{2}\gamma,\ \nu = -\tfrac{1}{2}\overline{3\gamma - 4\beta}). \tag{40}$$

Considérons le cas général $\nu \neq 0$. La solution du système (40) dépend évidemment de la fonction X_2 qui à son tour, d'après (39), peut être arbitraire. Or, $P(x-y)$ étant une fonction analytique arbitraire, dont la dérivée au point considéré $x_0 - y_0$ ne s'annule pas, on peut choisir la fonction W de manière que la fonction $X_1 = P$ satisfait au système (40). En effet, si l'on détermine la fonction W de l'équation différentielle

$$P'' - 2WP' - \mu\nu P = 0, \tag{41}$$

qui entraîne

$$X_2 = c_2 P' e^{-\mu\nu\int_{t_0} \frac{P}{P'}dt}, \qquad (x-y=t) \tag{42}$$

on voit que les fonctions

$$X = \frac{1}{\nu c_2} e^{\mu\nu\int_{t_0} \frac{P}{P'}dt}; \qquad X_1 = P, \tag{43}$$

donnent une solution particulière du système (40). Inversement, la fonction W étant donnée, si l'on prend pour la fonction P une intégrale de l'équation différentielle (41), dont la dérivée au point considéré ne s'annule pas, on peut mettre la fonction X_2 sous la forme (42), et les fonctions X, X_1, définies par les formules (43), donnent bien une solution particulière du systéme.

Pour avoir la solution générale de ce système, on n'a que faire un changement simple des variables, en se servant de la solution particulière (43). On obtient par un calcul, que j'omets, en désignant par k, k_1 des constantes arbitraires, la solution générale sous la forme

$$X = ke^{\mu\nu\int_{t_0} \frac{P}{P'} dt} + k_1 e^{\mu\nu\int_{t_0} \frac{P}{P'} dt} \int_{t_0} \frac{1}{P'} e^{-\mu\nu\int_{t_0} \frac{P}{P'} dt} dt, \tag{44}$$

et une autre formule pour X_1 qui est inutile à écrire. En se servant des formules (30), (35) on voit qu'on peut écrire les coordonées inhomogènes du point A sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= u^{\mu} e^{\mu\nu\int_{t_0}^{t} \frac{P}{P'} dt}; \\ x_2 &= x_1 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{P'} e^{-\mu\nu\int_{t_0}^{t} \frac{P}{P'} dt} dt. \end{aligned} \qquad (e^{x+y} = u; \quad \mu\nu \neq 0) \tag{45}$$

Pour avoir, dans le cas général, les coordonnées inhomogènes du point B, qui dans la correspondance considérée correspond au point A, on n'a, d'après les formules (28), que suivre exactement la même marche qui a conduit aux formules (45). On sera amené à un système d'équations différentielles ordinaires, analogue à celui, qui est donné par les formules (40)

$$\begin{aligned} Y' &= \mu' X_2^{-1} Y_1, \\ Y_1' &= \nu' X_2 Y, \end{aligned} \qquad (\mu' = \mu + \tfrac{3}{2}\varepsilon; \quad \nu' = \nu + \tfrac{1}{2}\varepsilon; \quad \mu \neq 0) \tag{46}$$

et puis, en supposant $\nu' \neq 0$ et en prenant pour Q une intégrale de l'équation différentielle

$$Q'' - 2WQ' - \mu'\nu' Q = 0, \tag{47}$$

dont la dérivée au point considéré $x_0 - y_0$ ne s'annule pas, on obtiendra les équations cherchées sous la forme

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u^{\mu'} e^{\mu'\nu'\int_{t_0}^{t} \frac{Q}{Q'} dt}; \\ \xi_2 &= \xi_1 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{Q'} e^{-\mu'\nu'\int_{t_0}^{t} \frac{Q}{Q'} dt} dt. \end{aligned} \qquad (\mu' = \mu + \tfrac{3}{2}\varepsilon; \; \nu' = \nu - \tfrac{1}{2}\varepsilon; \; \mu'\nu' \neq 0.) \tag{48}$$

En définitive, *les formules* (45) *et* (48) *donnent les équations finies des correspondances considérées dans le cas général*, les fonctions P, Q

qui y figurent étant les intégrales des équations différentielles (41), (47) dont les dérivées au point considéré ne s'annulent pas.

4. Sur les correspondances de la première espèce dont les courbes caractéristiques sont des droites.

1. Remarquons d'abord que ces correspondances, si elles existent, jouissent de la propriété de faire correspondre à trois droites (et trois seulement) passant par le point A trois droites passant par le point correspondant B. Supposons qu'il existe de telles correspondances et soient $\omega_1^3-\omega_2^3=0$ les équations de trois droites en question du plan (A) et $\tau_1^3-\tau_2^3=0$ les équations des trois droites correspondantes du plan (B). Cette supposition se traduit par les formules

$$\begin{aligned}\tau_1&=m\omega_1,\\ \tau_2&=m\omega_2,\end{aligned}\tag{49}$$

qui expriment la correspondance et par

$$\begin{aligned}&\omega_{12}=a\omega_1-b\omega_2, &&\tau_{12}=\alpha\tau_1-\beta\tau_2\\ &\omega_{22}-\omega_{11}=b\omega_1-c\omega_2; &&\tau_{22}-\tau_{11}=\beta\tau_1-\gamma\tau_2,\\ &-\omega_{21}=c\omega_1-a\omega_2, &&-\tau_{21}=\gamma\tau_1-\alpha\tau_2,\end{aligned}\tag{50}$$

qui expriment que les expressions $(A,\ dA,\ d^2A)$, $(B,\ dB,\ d^2B)$ s'annulent avec $\omega_1^3-\omega_2^3$, $\tau_1^3-\tau_2^3$. Supposons de plus qu'on a $(A\,A_1\,A_2)=$ $=(B\,B_1\,B_2)=1$ ou bien

$$\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}=0,\quad \tau_{00}+\tau_{11}+\tau_{22}=0.\tag{51}$$

Les équations (49), (50), (51) conduisent aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{gathered}[\omega_1(\frac{dm}{m}+\omega_{00}-\tau_{00}-\omega_{11}+\tau_{11})]+[\omega_2(\tau_{21}-\omega_{21})]=0,\\ [\omega_1(\tau_{12}-\omega_{12})]+[\omega_2(\frac{dm}{m}+\omega_{00}-\tau_{00}-\omega_{22}+\tau_{22})]=0,\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&[\omega_1(da-3a\omega_{11})]-[\omega_2(db-3b\omega_{11}+\omega_{10})]-(ac+4b^2)[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[\omega_1(dc-3c\omega_{11}+\omega_{20})]-[\omega_2(da-3a\omega_{11})]-(4ab+c^2)[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[\omega_1(db-3b\omega_{11}+\omega_{10})]-[\omega_2(dc-3c\omega_{11}+\omega_{20})]-(2a^2+bc)[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[\tau_1(d\alpha-3\alpha\tau_{11})]-[\tau_2(d\beta-3\beta\tau_{11}+\tau_{10})]-(\alpha\gamma+4\beta^2)[\tau_1\tau_2]=0,\\ &[\tau_1(d\gamma-3\gamma\tau_{11}+\tau_{20})]-[\tau_2(d\alpha-3\alpha\tau_{11})]-(4\alpha\beta+\gamma^2)[\tau_1\tau_2]=0,\\ &[\tau_1(d\beta-3\beta\tau_{11}+\tau_{10})]-[\tau_2(d\gamma-3\gamma\tau_{11}+\tau_{20})]-(2\alpha^2+\beta\gamma)[\tau_1\tau_2]=0.\end{aligned}\tag{52}$$

On en voit immédiatement qu'on peut profiter de l'indétermination des systèmes de référence pour annuler b, c, β, γ. Quant aux fonctions a et α on voit que plusieurs cas sont a distinguer:

2. *Cas général* $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$. Dans ce cas on peut supposer $\alpha=a=1$

et les correspondances cherchées, si elles existent, sont fournies par le système de Pfaff

$$
\begin{aligned}
&\tau_1 = m\omega_1, \\
&\tau_2 = m\omega_2, \\
\omega_{12} = \omega_1, \qquad & \tau_{12} = \tau_1, \\
\omega_{11} - \omega_{22} = 0, \qquad & \tau_{11} - \tau_{22} = 0, \\
\omega_{21} = \omega_2, \qquad & \tau_{21} = \tau_2, \\
\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0; \qquad & \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0,
\end{aligned}
\tag{53}
$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1 (\frac{dm}{m} + 3\,\overline{\tau_{11} - \omega_{11}})] = 0, \\
&[\omega_2 (\frac{dm}{m} + 3\,\overline{\tau_{11} - \omega_{11}})] = 0, \\
3[\omega_1\omega_{11}] + [\omega_2\omega_{10}] = 0; \qquad & 3[\tau_1\tau_{11}] + [\tau_2\tau_{10}] = 0; \\
[\omega_1\omega_{20}] + 3[\omega_2\omega_{11}] = 0; \qquad & [\tau_1\tau_{20}] + 3[\tau_2\tau_{11}] = 0; \\
[\omega_1\omega_{10}] - [\omega_2\omega_{20}] - 2[\omega_1\omega_2] = 0; \qquad & [\tau_1\tau_{10}] - [\tau_2\tau_{20}] - 2[\tau_1\tau_2] = 0.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

La forme cubique fondamentale Ψ qui est définie par ces équations étant $(m-1)(\omega_1{}^3 - \omega_2{}^3)$, *pour que ce système définisse une correspondance de la première espèce il faut et il suffit que m soit différent de 1.*

Le système (53) n'est pas en involution; on le voit aisément, en appliquant la méthode indiquée au N° 1. Posons d'après (54)

$$
\begin{aligned}
&\frac{dm}{m} = 3\,\overline{\omega_{11} - \tau_{11}}, \\
\omega_{11} = h\omega_1 + k\omega_2, \qquad & \tau_{11} = h'\tau_1 + k'\tau_2, \\
\omega_{10} = 3k\omega_1 + (1+p)\,\omega_2, \qquad & \tau_{10} = 3k'\tau_1 + (1+p')\,\tau_2, \\
\omega_{20} = (1-p)\,\omega_1 + 3h\,\omega_2, \qquad & \tau_{20} = (1-p')\,\tau_1 + 3h'\tau_2,
\end{aligned}
\tag{55}
$$

et faisons deux remarques qui nous seront utiles dans la suite.

D'abord en tenant compte des équations précédentes on trouve facilement

$$
\begin{aligned}
&d(A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A) = \\
&\quad = (\omega_{11} + \varepsilon^2\omega_1 + \varepsilon\omega_2)(A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A) + (3k - 3\varepsilon^2 h - \varepsilon p)(\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2)A, \\
&d(B_1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B) = \\
&\quad = (\tau_{11} + \varepsilon^2\tau_1 + \varepsilon\tau_2)(B_1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B) + (3k' - 3\varepsilon^2 h' - \varepsilon p')(\tau_1 - \varepsilon^2\tau_2)B;
\end{aligned}
\tag{56}
$$

le point $A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A$ $(B_1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B)$ est donc le point de contact de la droite $\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2 = 0$ $(\tau_1 - \varepsilon^2\tau_2 = 0)$ avec son enveloppe, quand le point A (B) décrit une courbe quelconque, diverse de cette droite.

Remarquons alors, en second lieu, que la condition d'intégrabilité de la première des équations (55) donne

$$
p' = \frac{p}{m^2}. \tag{57}
$$

Cela étant, nous allons distinguer deux cas, qui peuvent se présenter: $p=0$ ou bien $p\neq 0$. Nous indiquerons plus tard une propriété géométrique des correspondances considérées qui caractérise ces deux cas.

3. *Cas* $p=0$. Dans ce cas les équations (55) ont la forme.

$$\frac{dm}{m}=3\,\overline{\omega_{11}-\tau_{11}},$$

$$\begin{aligned} \omega_{11}&=h\omega_1+k\omega_2, & \tau_{11}&=h'\tau_1+k'\tau_2 \\ \omega_{10}&=3k\omega_1+\omega_2, & \tau_{10}&=3k'\tau_1+\tau_2, \\ \omega_{20}&=\omega_1+3h\omega_2, & \tau_{20}&=\tau_1+3h'\tau_2, \end{aligned} \tag{58}$$

et elles conduisent aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{aligned} &[dh\omega_1]+[dk\omega_2]=0, & &[dh'\tau_1]+[dk'\tau_2]=0, \\ &[dk\omega_1]+3(2k^2-h)[\omega_1\omega_2]=0, & &[dk'\tau_1]+3(2k'^2-h')[\tau_1\tau_2]=0, \\ &[dh\omega_2]-3(2h^2-k)[\omega_1\omega_2]=0, & &[dh'\tau_2]-3(2h'^2-k')[\tau_1\tau_2]=0. \end{aligned} \tag{59}$$

On peut donc poser

$$\begin{aligned} dh&=3(2h^2-k)\,\omega_1+l\omega_2, & dh'&=3(2h'^2-k')\,\tau_1+l'\tau_2, \\ dk&=l\omega_1+3(2k^2-h)\,\omega_2, & dk'&=l'\tau_1+3(2k'^2-h')\,\tau_2, \end{aligned} \tag{60}$$

l, l' étant des variables nouvelles. Les conditions d'intégrabilité de ces équations ont la forme

$$\begin{aligned} &[dl\omega_1]-3(3h^2-3k+6hk^2-5kl)[\omega_1\omega_2]=0, \\ &[dl\omega_2]+3(3k^2-3h+6h^2k-5hl)[\omega_1\omega_2]=0, \\ &[dl'\tau_1]-3(3h'^2-3k'+6h'k'^2-5k'l')[\tau_1\tau_2]=0, \\ &[dl'\tau_2]+3(3k'^2-3h'+6h'^2k'-5h'l')[\tau_1\tau_2]=0. \end{aligned} \tag{61}$$

On a donc

$$\begin{aligned} dl&=3(5hl-6kh^2+3h-3k^2)\,\omega_1+3(5kl-6hk^2+3k-3h^2)\,\omega_2, \\ dl'&=3(5h'l'-6k'h'^2+3h'-3k'^2)\,\tau_1+3(5k'l'-6h'k'^2+3k'-3h'^2)\,\tau_2, \end{aligned} \tag{62}$$

et si l'on calcule les conditions d'intégrabilité de ces équations, on trouve qu'elles sont identiquement verifiées en tenant compte des équations du système. Par suite, le système composé des équations de Pfaff (53), (58), (60), (62) est complétement intégrable. *Il existe donc des correspondances considérées et elles dépendent effectivement de cinq constantes arbitraires.*

4. On peut vérifier ce résultat et en même temps donner la classification detaillée de ces correspondances en procédant de la manière suivante. On trouve d'abord, par un calcul facile, que la forme ω_{11} (τ_{11}) est une différentielle exacte que nous désignerons par $\dfrac{1}{3}\dfrac{d\nu}{\nu}$ $\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{d\nu'}{\nu'}\right)$. De plus, on s'assure facilement que ν (ν') est un facteur intégrant de ω_1 et ω_2 (τ_1, τ_2); nous posons

$$\begin{aligned} 3\nu\omega_1&=dx, & 3\nu'\tau_1&=dx', \\ 3\nu\omega_2&=dy, & 3\nu'\tau_2&=dy'. \end{aligned} \tag{63}$$

La première des équations (58) donne alors, c étant une constante arbitraire ($\neq 0$)

$$m = c \frac{\nu}{\nu'}, \tag{64}$$

et les équations $\tau_1 = m\omega_1$, $\tau_2 = m\omega_2$ montrent qu'on a

$$dx' = c\,dx; \quad dy' = c\,dy. \tag{65}$$

On déduit alors des équations (58)

$$\begin{aligned} h &= \nu_x, & h' &= \nu'_x, \\ k &= \nu_y, & k' &= \nu'_y, \end{aligned} \tag{66}$$

et les formules (60) donnent

$$\begin{aligned} \nu\nu_{xx} &= 2\nu_x^2 - \nu_y, & \nu'\nu'_{x'x'} &= 2\nu'^2_{x'} - \nu'_{y'}, \\ \nu\nu_{yy} &= 2\nu_y^2 - \nu_x, & \nu'\nu'_{y'y'} &= 2\nu'^2_{y'} - \nu'_{x'}. \end{aligned} \tag{67}$$

On voit donc que, si l'on pose $\nu = -\frac{1}{6\varphi}$, $\nu' = -\frac{1}{6\varphi'}$, les fonctions φ, φ' se déterminent par l'intégration du système du second ordre

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= 6\varphi\varphi_y, \\ \varphi_{yy} &= 6\varphi\varphi_x. \end{aligned} \tag{68}$$

Ce système n'est pas autre que celui qui se présent dans la recherche des surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes. Sa solution générale a été donnée par M. E. Čech* et conduit à six cas différents, qui généralement dépendent de deux constantes arbitraires. En combinant ces solutions deux à deux on obtiendra tous les types des correspondances cherchées et on voit que l'indétermination de telles correspondances dépend de cinq constantes arbitraires.

5. Nous allons démontrer une propriété géométrique des correspondances considérées, qui les caractérise complètement.

Théorème. Dans le cas considéré $p = 0$, et dans ce cas seulement, les droites correspondantes dans les deux plans enveloppent des courbes algébriques de la troisième classe.

Pour démontrer ce théorème faisons d'abord la remarque suivante: A, A_1, A_2 étant la solution générale du système, définissant les points A, A_1, A_2, on a les formules de la forme

$$A_k = c_1 A_k^{(1)} + c_2 A_k^{(2)} + c_3 A_k^{(3)}, \qquad (k = 0, 1, 2)$$

les $A_k^{(i)}$ n'étant pas autres que les coordonnées du point A_k rapportées à un système de référence fixe et c_1, c_2, c_3 étant des constantes arbitraires. Dans la même système de référence fixe on peut regarder c_1, c_2, c_3 comme coordonnées d'une droite; les fonctions A_k seront alors les coordonnées de la même droite rapportée à un système mobile.

* E. Čech, Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes (Publ. de la faculté des Sciences de l'Université Masaryk N° 11 (1922) p. 9).

Cela étant rappelé, admettons pour le moment le théorème et soit

$$F \equiv a_{000}A^3 + a_{111}A_1^3 + a_{222}A_2^3 + a_{001}A^2A_1 + a_{002}A^2A_2 + a_{011}AA_1^2 + \\ + a_{112}A_1^2A_2 + a_{022}AA_2^2 + a_{122}A_1A_2^2 + a_{012}AA_1A_2 = 0 \tag{69}$$

l'équation de la courbe de la troisième classe en question du plan (A) rapportée au système mobile. On peut simplifier cette équation en se rappelant que le point $A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A$ est le point de contact de la droite $\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2 = 0$ avec son enveloppe, quand le point A décrit une courbe quelconque, diverse de cette droite. On connait donc trois tangentes de la courbe F à savoir le droites, qui sont définies par les points A_1, $A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A$. Ces droites ont par rapport au système mobile les coordonnées

$$A : A_1 : A_2 = 0 : -\varepsilon : 1.$$

On a donc les conditions

$$a_{111} = a_{222}; \quad a_{112} = a_{122} = 0.$$

Mais on sait de plus que les trois points $A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A$ dont les équations par rapport au système mobile sont $A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A = 0$ sont les points de contact de la droite $0 : -\varepsilon : 1$ avec la courbe F. On en déduit sans difficulté trois autres conditions

$$a_{012} = -3a_{111}; \quad a_{011} = a_{022} = 0.$$

On voit donc que la courbe de la troisième classe dans le plan (A), si elle existe, est représentée en coordonnées mobiles par une forme cubique du type

$$F \equiv A_1^3 + A_2^3 - 3AA_1A_2 + (\alpha A + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) A^2. \tag{70}$$

Il s'agit de savoir si l'on peut déterminer les trois fonctions α, α_1, α_2 de manière que la courbe représentée par la forme F soit fixe. Pour cela il faut et il suffit que dF soit proportionnelle à F. Or, on trouve par un calcul facile

$$\begin{aligned} dF = {} & 3\omega_{11}(A_1^3 + A_2^3) + 2(\alpha_2\omega_1 + \alpha_1\omega_2) AA_1A_2 + \\ & + (d\alpha - 6\alpha\omega_{11} + \alpha_1\omega_{10} + \alpha_2\omega_{20}) A^3 + \\ & + (d\alpha_1 - 3\alpha_1\omega_{11} + 3\alpha\omega_1 + \alpha_2\omega_2 - 3\omega_{20}) A^2A_1 + \\ & + (d\alpha_2 - 3\alpha_2\omega_{11} + 3\alpha\omega_2 + \alpha_1\omega_1 - 3\omega_{10}) A^2A_2 + \\ & + (3\omega_{10} - 3\omega_2 + 2\alpha_1\omega_1) AA_1^2 + (3\omega_{20} - 3\omega_1 + 2\alpha_2\omega_2) AA_2^2. \end{aligned} \tag{71}$$

Pour que cette expression soit proportionnelle à F il faut d'abord qu'on ait

$$\begin{aligned} 3\omega_{10} - 3\omega_2 + 2\alpha_1\omega_1 = 0, \\ 3\omega_{20} - 3\omega_1 + 2\alpha_2\omega_2 = 0, \end{aligned} \tag{72}$$

ce que ne peut avoir lieu que dans le cas considéré $p = 0$.

Dans ce cas on doit avoir

$$\alpha_1 = -\frac{9}{2}k, \quad \alpha_2 = -\frac{9}{2}h. \tag{73}$$

Si l'on prend encore

$$\alpha = \frac{3}{2}\, l - 9hk + 1, \tag{74}$$

on vérifie facilement que la formule

$$dF = 4\omega_{11} F \tag{75}$$

a lieu en vertu des équations du système. Par suite, la courbe du plan (A), representée par la forme cubique

$$F \equiv A_1^3 + A_2^3 - 3\, A A_1 A_2 + \left(\overline{\tfrac{3}{2}\, l - 9\, hk + 1}\, A - \tfrac{9}{2}\, kA_1 - \tfrac{9}{2}\, hA_2\right) A^2 \tag{76}$$

est fixe.

On démontre par un calcul analogue que la forme

$$F' \equiv B_1^3 + B_2^3 - 3\, B B_1 B_2 + \left(\overline{\tfrac{3}{2} l' - 9h'k' + 1}\, B - \tfrac{9}{2}\, k' B_1 - \tfrac{9}{2}\, h' B_2\right) B^2 \tag{77}$$

représente, en coordonnées mobiles, une courbe de la troisième classe, enveloppée par les trois familles de droites correspondantes du plan (B).

Le théorème est donc complétement demontré.

6. Pour construire les correspondances considérées il suffit de prendre dans le plan (A) une courbe arbitraire de la troisième classe F et de la même manière dans le plan (B) une courbe arbitraire de la troisième classe F' *. Chacune de ces courbes dépend déjà d'une constante arbitraire. Il est connu qu'on peut représenter les tangentes à $F\,(F')$ au moyen d'un paramètre $u\,(v)$ de manière que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ $(v_1 + v_2 + v_3 = 0)$ soit la conditions pour trois tangentes passant par un point fixe. Si, par exemple, le genre de F est égal à *un* les coordonnées de la tangente à F sont des fonctions elliptiques de u. Pour faire correspondre à un point A le point correspondant B il suffit de tracer du point A à la courbe F les trois tangentes et aux trois valeurs correspondantes u_1, u_2, u_3 du paramètre u qui satisfont à la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \tag{78}$$

de faire correspondre les trois tangentes de la courbe F' qui correspondent aux paramètres

$$\begin{aligned} v_1 &= au_1 + a_1, \\ v_2 &= au_2 + a_2, \\ v_3 &= au_3 + a_3, \end{aligned} \tag{79}$$

les a étant des constantes arbitraires à condition $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ près. Le point l'intersection de ces trois tangentes est le point B.

7. *Cas* $p \neq 0$. Dans ce cas général la méthode que j'applique pour déterminer de telles correspondances, si elles existent, conduit aux calculs très longs que je n'ai pas pu faire effectivement. Je me borne donc

---

* Il est vrai que la forme cubique ne peut pas représenter une courbe dégénérée en trois faisceaux dont les centres soient situés sur une droite; cependant. il ne faut point excluer cette possibilité qui se présentera, comme nous allons voir, si $a\,\alpha = 0$.

à l'indication d'une propriété des fonctions p, p', pour élucider un peu la nature du problème.

D'après la condition d'intégrabilité (57) on a

$$\begin{aligned} \sqrt{p'}\tau_1 &= \sqrt{p}\,\omega_1, \\ \sqrt{p'}\tau_2 &= \sqrt{p}\,\omega_2, \end{aligned} \tag{80}$$

Posons

$$\begin{aligned} &\sqrt{p} = e^{-V}; && \sqrt{p'} = e^{-V'}, \\ &\omega_1 = e^{V}\Theta_1, && \tau_1 = e^{V'}\Theta_1, \\ &\omega_2 = e^{V}\Theta_2, && \tau_2 = e^{V'}\Theta_2; \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} &dV = V_1\Theta_1 + V_2\Theta_2, && dV' = V'_1\Theta_1 + V'_2\Theta_2, \\ &\Theta_1' = a[\Theta_1\Theta_2]; && \Theta_2' = -b[\Theta_1\Theta_2]. \end{aligned} \tag{82}$$

On aura alors

$$\begin{aligned} &h = \tfrac{1}{3}(b - V_1)\,e^{-V}; && h' = \tfrac{1}{3}(b - V'_1)\,e^{-V'}; \\ &k = \tfrac{1}{3}(a - V_2)\,e^{-V}; && k' = \tfrac{1}{3}(a - V'_2)\,e^{-V'}; \end{aligned} \tag{83}$$

de sorte que les équations (55) prendront la forme

$$\begin{aligned} &3\,\omega_{11} + dV = 3\,\tau_{11} + dV'; \\ &\omega_{11} = \tfrac{1}{3}(b - V_1)\,\Theta_1 + \tfrac{1}{3}(a - V_2)\,\Theta_2; && \tau_{11} = \tfrac{1}{3}(b - V'_1)\,\Theta_1 + \tfrac{1}{3}(a - V'_2)\,\Theta_2; \\ &\omega_{10} = (a - V_2)\,\Theta_1 + 2\,\mathrm{Cos}\,V\Theta_2; && \tau_{10} = (a - V'_2)\,\Theta_1 + 2\,\mathrm{Cos}\,V'\Theta_2; \\ &\omega_{20} = 2\,\mathrm{Sin}\,V\Theta_1 + (b - V_1)\,\Theta_2. && \tau_{20} = 2\,\mathrm{Sin}\,V'\Theta_1 + (b - V'_1)\,\Theta_2. \end{aligned} \tag{84}$$

Ces équations entraînent les conditions intégrabilité

$$\begin{aligned} &a_1 - b_2 + 3 = 0; \\ &V_{11} = -V_1^2 + 3\,b\,V_1 - 3\,e^{V}V_2 + 3\,ae^{V} - 2\,ae^{-V} - 2\,b^2 + b_1, \\ &V_{22} = -V_2^2 + 3\,a\,V_2 - 3\,e^{V}V_1 + 3\,be^{V} + 2\,be^{-V} - 2\,a^2 + a_2, \end{aligned} \tag{85}$$

et deux autres de la même forme pour la fonction V'. Dans ces formules les a_1, b_2, $V_{11}, \ldots$ sont définis d'une manière analogue comme V_1, V_2. Ces équations entraînent des nouvelles conditions d'intégrabilité et celles-ci conduisent à leur tour de nouveau aux relations nouvelles et ainsi de suite. On obtient ainsi les formules

$$\begin{aligned} V_{12} &= -V_1V_2 + \tfrac{7}{2}\,aV_1 + \tfrac{5}{2}\,bV_2 + \tfrac{9}{8}\,e^{2V} + \alpha e^{-V} + \beta, \\ V_{21} &= -V_1V_2 + \tfrac{5}{2}\,aV_1 + \tfrac{7}{2}\,bV_2 + \tfrac{9}{8}\,e^{2V} + \alpha e^{-V} + \beta, \\ V_1^2 &= (\tfrac{7}{2}\,b - \tfrac{1}{2}\,a_2 + \tfrac{1}{4}\,a^2 e^{-V})\,V_1 + \\ &\quad + (\tfrac{15}{8}\,e^{V} - \tfrac{3}{4}\,b_2 - \tfrac{1}{2}\,ab + \tfrac{17}{8}\,e^{-V})\,V_2 - \tfrac{39}{16}\,ae^{V} - \gamma^{(1)}e^{-V} + \varepsilon^{(1)}e^{-2V} - \tfrac{5}{2}\,b^2, \\ V_2^2 &= (\tfrac{15}{8}\,e^{V} - \tfrac{3}{4}\,a_1 - \tfrac{1}{2}\,ab - \tfrac{17}{8}\,e^{-V})\,V_1 + \\ &\quad + (\tfrac{7}{2}\,a - \tfrac{1}{2}\,b_1 + \tfrac{1}{4}\,b^2 e^{-V})\,V_2 - \tfrac{39}{16}\,be^{V} - \gamma^{(2)}e^{-V} + \varepsilon^{(2)}e^{-2V} - \tfrac{5}{2}\,a^2, \\ aV_1V_2 &= (-\tfrac{9}{8}\,be^{V} - \tfrac{5}{4}\,a_2 + \tfrac{15}{8}\,a^2 + \zeta^{(1)}e^{-V})\,V_1 + \\ &\quad + (-\tfrac{9}{16}\,e^{2V} - \tfrac{3}{16}\,a_1 + b_2 + \tfrac{7}{4}\,ab - \tfrac{145}{8} + \eta^{(2)}e^{-V})\,V_2 + \tfrac{9}{32}\,ae^{2V} + \\ &\quad + (-\tfrac{3}{4}\,b_1 + \tfrac{39}{16}\,b^2)\,e^{V} + \vartheta^{(1)} + \varkappa^{(1)}e^{-V} + \lambda^{(1)}e^{-2V}, \\ bV_1V_2 &= (-\tfrac{9}{16}\,e^{2V} - \tfrac{3}{16}\,a_1 + b_2 + \tfrac{7}{4}\,ab + \tfrac{145}{8} + \eta^{(1)}e^{-V})\,V_1 + \\ &\quad + (-\tfrac{9}{8}\,ae^{V} - \tfrac{5}{4}\,b_1 + \tfrac{15}{8}\,b^2 + \zeta^{(2)}e^{-V})\,V_2 + \tfrac{9}{32}\,be^{2V} + (-\tfrac{3}{4}\,a_2 + \tfrac{39}{16}\,a^2)\,e^{V} + \\ &\quad + \vartheta^{(2)} + \varkappa^{(2)}e^{-V} + \lambda^{(2)}e^{-2V}, \end{aligned} \tag{86}$$

$$V_1 V_2 = (\tfrac{23}{26} a - \tfrac{2}{13} b_1 + \tfrac{1}{13} b^2 e^{-V} + \mu^{(1)} e^{-2V}) V_1 +$$
$$+ (\tfrac{23}{26} b - \tfrac{2}{13} a_2 + \tfrac{1}{13} a^2 e^{-V} + \mu^{(2} e^{-V}) V_2 - \tfrac{45}{208} e^{2V} - \tfrac{19}{52} ab + \varrho e^{-V} +$$
$$+ \sigma e^{-2V} + \tau e^{-3V},$$
....

Dans ces formules α, β, $\gamma^{(1}$, $\gamma^{2)}$, ... sont des polynômes aux a, b, a_1, b_1, ... aux coefficients numériques. La dernière de ces équations conduit alors à deux relations entre V_1, V_2 et la compatibilité de ces relations, avec celles, que l'on obtient en combinant les dernières trois équations exige que la fonction e^V soit une racine au moins d'une équation algébrique, dont les coefficients sont des polynomes aux a, b, a_1, ... Donc, *l'existence des correspondances considérées étant supposée, les fonctions e^V, $e^{V'}$ sont deux racines distinctes au moins d'une équation algébrique, dont les coefficients sont des polynomes aux a, b, a_1, ...*

8. *Cas $a = 0$, $\alpha \neq 0$.* Dans ce cas les formules (52) montreut qu'on peut encore supposer $\alpha = 1$. On est donc amené a étudier le système de Pfaff suivant

$$\begin{array}{ll} & \tau_1 = m\omega_1, \\ & \tau_2 = m\omega_2, \\ \omega_{12} = 0, & \tau_{12} = \tau_1, \\ \omega_{11} - \omega_{22} = 0, & \tau_{11} - \tau_{22} = 0, \\ \omega_{21} = 0, & \tau_{21} = \tau_2, \\ \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0; & \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0, \end{array} \tag{87}$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$\begin{array}{ll} & [\omega_1(\frac{dm}{m} + 3\overline{\tau_{11} - \omega_{11}})] = 0, \\ & [\omega_2(\frac{dm}{m} + 3\overline{\tau_{11} - \omega_{11}})] = 0, \\ [\omega_1\omega_{20}] = [\omega_2\omega_{10}] = 0, & 3[\tau_1\tau_{11}] + [\tau_2\tau_{10}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{10}] - [\omega_2\omega_{20}] = 0, & [\tau_1\tau_{20}] + 3[\tau_2\tau_{11}] = 0, \\ & [\tau_1\tau_{10}] - [\tau_2\tau_{20}] - 2[\tau_1\tau_2] = 0. \end{array} \tag{88}$$

La forme cubique Ψ qui se déduit de ces équations a la forme $\tau_1^3 - \tau_2^3$; les formules qui viennent d'être écrites ne peuvent donc définir qu'une correspondance de la première espèce.

Le système n'est pas en involution. On le peut simplifier en supposant $m = 1$, ce qu'est legitime, d'après (88). On aura ensuite

$$\begin{array}{ll} \tau_1 = \omega_1, & \tau_2 = \omega_2, \\ \omega_{12} = 0, & \tau_{12} = \tau_1, \\ \omega_{11} - \omega_{22} = 0, & \tau_{11} - \tau_{22} = 0, \\ \omega_{21} = 0, & \tau_{21} = \tau_2, \\ & \tau_{11} = \omega_{11}, \\ \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0, & \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0, \end{array} \tag{89}$$

et les relations quadratiques extérieures, qui en dérivent, prendront la forme

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1\omega_{20}] = [\omega_2\omega_{10}] = 0, && 3[\tau_1\tau_{11}] + [\tau_2\tau_{10}] = 0, \\
&[\omega_1\omega_{10}] - [\omega_2\omega_{20}] = 0, && [\tau_1\tau_{20}] + 3[\tau_2\tau_{11}] = 0, \\
&[\omega_1(\tau_{10} - \omega_{10})] - [\omega_1\omega_2] = 0, && [\tau_1\tau_{10}] - [\tau_2\tau_{20}] - 2[\tau_1\tau_2] = 0.
\end{aligned} \tag{90}
$$

Posons, d'après ces formules

$$
\begin{aligned}
&\omega_{10} = p\omega_2, && \tau_{11} = h'\tau_1 + k'\tau_2, \\
&\omega_{20} = -p\omega_1, && \tau_{10} = 3k'\tau_1 + (1+p)\tau_2, \\
& && \tau_{20} = (1-p)\tau_1 + 3h'\tau_2.
\end{aligned} \tag{91}
$$

Or, quand à la fonction p qui figure dans ces formules, les premières deux équations donnent

$$dp = 6p\omega_{11}$$

et la condition d'intégrabilité de cette équation montre immédiatement qu'on a

$$p = 0. \tag{92}$$

Les dernières trois des équations (91) conduisent alors aux équations

$$
\begin{aligned}
dh' &= 3(2h'^2 - k')\tau_1 + l'\tau_2, \\
dk' &= l'\tau_1 + 3(2k'^2 - h')\tau_2,
\end{aligned} \tag{93}
$$

$$dl' = 3(5h'l' - 6k'h'^2 + 3h' - 3k'^2)\tau_1 + 3(5k'l' - 6h'k'^2 + 3k' - 3h'^2)\tau_2,$$

et on trouve, que le système d'équations (89), (91), (94) est complètement intégrable.

Il existe donc des correspondances considérées et elles dépendent d'une constante arbitraire.

En tenant compte des formules (89), (91), (93) et des calculs qui ont été faits plus haut, on conclût immédiatement que *les droites caracteristiques du plan (B) enveloppent une courbe algébrique de la troisième classe.* Quant aux *droites caractéristiques du plan (A)* il est facile de voir qu'elles *passent par trois points fixes* (à savoir par les points $A_1 + A_2$, $A_1 + \varepsilon A_2$, $A_1 + \varepsilon^2 A_2$) *situés sur une ligne droite.*

Donc, la construction géométrique des correspondances en question est la même que dans le cas $a\alpha \neq 0$, $p = 0$ déjà discuté; seulement, la courbe F dégénère maintenant en trois faisceaux dont les centres sont situé sur une droite.

9. *Cas* $a \neq 0$, $\alpha = 0$. Dans ce cas on obtient évidemment les correspondances inverses aux précédentes.

10. *Cas* $a = \alpha = 0$. Dans ce cas des correspondances en question ne sont pas de la première espèce.

5. Sur la généralité des correspondances de la deuxième espèce.

1. Une correspondance entre deux plans projectifs étant donnée, on peut choisir les systèmes de référence dans les deux plans de manière qu'on ait

$$\begin{aligned}
&\tau_1=\omega_1; \quad \tau_2=\omega_2;\\
&\tau_{21}-\omega_{21}=a\omega_1+b\omega_2,\\
&\tau_{11}-\omega_{11}-\tau_{00}+\omega_{00}=c\omega_1+a\omega_2,\\
&\tau_{22}-\omega_{22}-\tau_{00}+\omega_{00}=\alpha\omega_1+\gamma\omega_2,\\
&\tau_{12}-\omega_{12}=\beta\omega_1+a\omega_2,\\
&\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}=0; \quad \tau_{00}+\tau_{11}+\tau_{22}=0.
\end{aligned} \tag{94}$$

Avec ces notations la forme cubique fondamentale, qui donne, dans un point, les directions caractéristiques est représentée par l'expression

$$\Psi=\beta\omega_1^3-(c-2\alpha)\,\omega_1^2\omega_2+(\gamma-2a)\,\omega_1\omega_2^2-b\omega_2^3. \tag{95}$$

Or, la correspondance étant de la deuxième espèce, ont peut supposer $b=\beta=\gamma-2a=0$; $2\alpha-c=3$, de sorte que, si l'on pose $a=p$, $\alpha=q+1$, le système (94) s'écrira

$$\begin{aligned}
&\tau_1=\omega_1, \quad \tau_2=\omega_2;\\
&\tau_{22}-\omega_{22}=\omega_1+p\omega_2,\\
&\tau_{21}-\omega_{21}=p\omega_1,\\
&\tau_{11}-\omega_{11}=(q-1)\,\omega_1,\\
&\tau_{12}-\omega_{12}=(q+1)\,\omega_1,\\
&\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}=0; \quad \tau_{00}+\tau_{11}+\tau_{22}=0.
\end{aligned} \tag{96}$$

Inversement, ce système définit les correspondances générales de la deuxième espèce. Il conduit aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{aligned}
&[\omega_1(\omega_{11}-\omega_{00}-p\overline{q+1}\,\omega_2)]+\\
&\quad+[\omega_2(2\,\omega_{21}-p^2\omega_2)-[\omega_2(dp-\overline{p\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{20}-\omega_{20}}-q\omega_{21})]=0,\\
&[\omega_1(2\,\omega_{21}-p^2\omega_2)]+[\omega_1(dp-p\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{20}-\omega_{20}}-q\omega_{21})]=0,\\
&[\omega_1(dq-q\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{10}-\omega_{10}}-p\omega_{12})]+\\
&\quad+[\omega_2(dp-p\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{20}-\omega_{20}}-q\omega_{21})]=0,\\
&[\omega_1(3\,\omega_{12}-\overline{q^2-q-2}\,\omega_2)]+\\
&\quad+[\omega_2(\omega_{11}-\omega_{00}-p\overline{q+1}\,\omega_2)]-[\omega_2(dq-q\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{10}-\omega_{10}}-p\omega_{12})]=0.
\end{aligned} \tag{97}$$

Dans ces formules figurent outre ω_1, ω_2 cinq expressions de Pfaff nouvelles, indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2 et des équations du système. On voit de plus, que la forme de ces formules est la même, comme elle a été supposée au n° 1 les a_{ipk} étant les constantes. En appliquant la méthode indiquée, on trouve sans difficulté que le système (96) est en involution et que sa solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Les correspondances générales de la deuxième espèce dépendent donc d'une fonction arbitraire de deux arguments.

6. Sur les correspondances de la deuxième espèce dont les courbes caractéristiques sont des droites.

1. Une correspondance de la deuxième espèce étant définie par un système d'équations de Pfaff de la forme (96), les équations des courbes caractéristiques sont

$$\omega_1{}^2\omega_2=0. \tag{98}$$

Pour que ces courbes soient des droites, il faut et il suffit que l'expression $(A,\ dA,\ d^2A)$ s'annule en tenant compte de ces équations. Ceci s'exprime par les formules

$$\omega_{12}=h\omega_2;\quad \omega_{21}=k\omega_1. \tag{99}$$

Donc, les correspondances de la deuxième espèce dont les courbes caractéristiques sont des droites, si elles existent, sont fournies par le système d'équations de Pfaff

$$\begin{aligned}
&\tau_1=\omega_1,\quad \tau_2=\omega_2;\\
&\tau_{22}-\omega_{22}=\omega_1+p\omega_2,\\
&\tau_{21}-\omega_{21}=p\omega_1,\\
&\tau_{11}-\omega_{11}=(q-1)\,\omega_1,\\
&\tau_{12}-\omega_{12}=(q+1)\,\omega_1,\\
&\omega_{12}=h\omega_2,\quad \omega_{21}=k\omega_1,\\
&\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}=0;\quad \tau_{00}+\tau_{11}+\tau_{22}=0.
\end{aligned} \tag{100}$$

Ce système conduit aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{aligned}
&[\omega_1(dp-p\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{20}-\omega_{20}}-qk\omega_1-p^2\omega_2)]=0,\\
&[\omega_1(\omega_{11}-\omega_{00}-\overline{2k+pq+1}\,\omega_2)]-\\
&\quad-[\omega_2(dp-p\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{20}-\omega_{20}}-qk\omega_1-p^2\omega_2)]=0,\\
&[\omega_2(\omega_{11}-\omega_{00}-\overline{2k+pq+1}\,\omega_2)]-\\
&\quad-[\omega_2(dq-q\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{10}-\omega_{10}}-hp\omega_2-\overline{q^2-q-3h-2}\,\omega_1)]=0,\\
&[\omega_1(dq-q\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{10}-\omega_{10}}-hp\omega_2-\overline{q^2-q-3h-2}\,\omega_1)]+\\
&\quad+[\omega_2(dp-p\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\tau_{20}-\omega_{20}}-qk\omega_1-p^2\omega_2)]=0,\\
&[\omega_2(dh-h\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}-\omega_{10}+h^2\omega_1)]=0,\\
&[\omega_1(dk-k\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-\omega_{20}-k^2\omega_2)]=0.
\end{aligned} \tag{101}$$

On en voit immédiatement qu'on peut profiter de l'indétermination des systèmes de référence pour annuler les coefficients p, $q+1$, h, k On est donc amené à un système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
&\tau_1=\omega_1,\quad \tau_2=\omega_2;\\
&\tau_{00}=\omega_{00}+\omega_1,\\
&\tau_{22}=\omega_{22}+\omega_1,\\
&\tau_{21}=\omega_{21}=0,\\
&\tau_{12}=\omega_{12}=0;\\
&\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}=0;\quad \tau_{00}+\tau_{11}+\tau_{22}=0,
\end{aligned} \tag{102}$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$\begin{aligned} &[\omega_1(\omega_{20}-\tau_{20})]=0; \quad [\omega_2(\omega_{10}-\tau_{10})]=0; \\ &[\omega_1\omega_{20}]=0; \qquad [\omega_2\omega_{10}]=0; \\ &[\omega_1(\tau_{10}-\omega_{10})]+2[\omega_2(\tau_{20}-\omega_{20})]=0; \\ &[\omega_1(\omega_{11}-\omega_{00})]+[\omega_2(\tau_{20}-\omega_{20})]=0. \end{aligned} \tag{103}$$

Ce système n'est manifestement pas en involution. Or si l'on pose en particulier, d'après la première de équations (103)

$$\tau_{20}-\omega_{20}=a\omega_1, \tag{104}$$

on obtient une relation quadratique extérieure

$$[\omega_1(da+3a\omega_{00})]=0, \tag{105}$$

qui montre qu'on a deux cas à distinguer: $a=0$ on bien $a \neq 0$.

2. *Cas* $a=0$. Dans ce cas on déduit facilement à l'aide des équations un système de Pfaff simple

$$\tau_1=\omega_1;\ \tau_2=\omega_2;\ \tau_{00}=\omega_{00}+\omega_1;\ \tau_{22}=\omega_{22}+\omega_1;\ \tau_{21}=\omega_{21}=\tau_{12}=\omega_{12}=0;$$
$$\tau_{20}=\omega_{20};\ \tau_{10}=\omega_{10}, \tag{106}$$

dont les conditions d'intégrabilité s'écriront

$$[\omega_1\omega_{20}]=[\omega_1(\omega_{11}-\omega_{00})]=0. \tag{107}$$

On ent voit immédiatement *qu'il existe des correspondances considérées et qu'elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

3. Pour donner la construction géométrique de ces correspondances, considérons le système d'équations différentielles auquel conduisent les équations (106)

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A+\omega_1A_1+\omega_2A_2, & dB &= (\omega_{00}+\omega_1)B+\omega_1B_1+\omega_2B_2, \\ dA_1 &= \omega_{11}A_1, & dB_1 &= (\omega_{11}-2\omega_1)B_1, \\ dA_2 &= \omega_{20}A+\omega_{22}A_2. & dB_2 &= \omega_{20}B+(\omega_{22}+\omega_1)B_2. \end{aligned} \tag{108}$$

On en voit que le point A_1 (B_1) est fixe et que le point A_2 (B_2) est situé sur une courbe, dout la tangente, en ce point, passe, par le point A (B). De plus, si l'on considére les droites $[AA_1]$, $[A_2A_1]$ d'une part et $[BB_1]$, $[B_2B_1]$ on démontre sans aucune espèce des difficultés qu'il existe, entre ces droites une correspondance projective.

Donc, pour construire à un point A le point correspondant B, on trace du point A une tangente à une courbe située dans le plan (A); A_2 étant le point de contact sur cette courbe, la correspondance projective entre les faisceaux de droites en A_1, B_1 fait correspondre aux droites $[AA_1]$, $[A_2A_1]$ deux droites passant par B_1; soit B_2 un point d'intersection d'une de ces droites avec une courbe située dans le plan (B); la tangente tracée au point B_2 à cette courbe et l'autre droite passant par B_1 déterminent le point B. L'indétermination de la solution montre que les deux courbes que décrivent les points A_2, B_2 peuvent être, en général, arbitraires.

4. *Cas* $a \neq 0$. On peut supposer, d'après (105), $a = 1$. Les conditions d'intégrabilité du système en question seront alors

$$\begin{aligned} &[\omega_1 (\tau_{10} - \omega_{10})] - 2 [\omega_1 \omega_2] = 0; \\ &[\omega_1 (\omega_{11} - \omega_{00})] - [\omega_1 \omega_2] = 0; \\ &[\omega_2 (\tau_{10} - \omega_{10})] = [\omega_1 \omega_{20}] = [\omega_2 \omega_{10}] = [\omega_1 \omega_{00}] = 0; \end{aligned} \tag{109}$$

elles permettent de poser

$$\begin{aligned} \tau_{10} - \omega_{10} &= 2\omega_2; \\ \omega_{11} &= (\alpha + 1)\, \omega_1 + \omega_2; \\ -\omega_{00} &= (\beta + 1)\, \omega_1; \\ \omega_{20} &= (\gamma + 1)\, \omega_1; \\ \omega_{10} &= \delta \omega_2. \end{aligned} \tag{110}$$

Or, en formant les covariants bilinéaires de ces équations, on déduit facilement une relation finie entre les variables, $\delta = 2\beta$, et les relations quadratiques extérieures

$$\begin{aligned} &[\omega_1 d\alpha] - 2\alpha\, [\omega_1 \omega_2] = 0; \\ &[\omega_1 d\beta] - (3\beta - \gamma)\, [\omega_1 \omega_2] = 0; \\ &[\omega_2 d\beta] + 3\beta\, (\beta + 1)\, [\omega_1 \omega_2] = 0; \\ &[d\gamma \omega_1] = 0. \end{aligned} \tag{111}$$

Celles-ci donnent naissance en particulier à l'équation

$$d\beta = 3\beta\, (\beta + 1)\, \omega_1 + (3\beta - \gamma)\, \omega_2, \tag{112}$$

qui entraîne à son tour

$$[\omega_2 d\gamma] + \overline{12\beta\, (\beta + 1) + (3\beta - \gamma)\, (\alpha - 8\beta - 4)}\, [\omega_1 \omega_2] = 0. \tag{113}$$

On a donc

$$d\gamma = \overline{12\beta\, (\beta + 1) + (3\beta - \gamma)\, (\alpha - 8\beta - 4)}\, \omega_1. \tag{114}$$

La condition d'intégrabilité de cette équation, comparée avec la première des équations (111) donne

$$(3\beta - \gamma)\, (\alpha - 4\beta + 2\gamma + 1) = 3\beta\, (\beta + 1), \tag{115}$$

et cette formule conduit à l'équation suivante

$$(3\beta - \gamma)\, (\alpha - 6\beta + 2\gamma) = 0. \tag{116}$$

On est donc amené a priori à deux cas possibles: ou $3\beta - \gamma = 0$ ou bien $\alpha - 6\beta + 2p = 0$. Mais un calcul simple montre qu'en réalité on n'a à considérer que le premier cas. En effet, l'équation

$$\alpha - 6\beta + 2\gamma = 0,$$

entraîne

$$\alpha - 9\beta + 3\gamma = 0,$$

ou bien

$$3\beta - \gamma = 0.$$

Cela posé, d'après (115) on a deux cas à distinguer:

1. $\beta = \gamma = 0$. Dans ce cas le système s'écrira

$$\begin{gathered}\tau_1 = \omega_1, \quad \tau_2 = \omega_2, \quad \tau_{22} = \omega_{22} + \omega_1, \quad \tau_{00} = 0, \quad \tau_{21} = \omega_{21} = \tau_{12} = \omega_{12} = 0,\\ \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0; \quad \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0;\\ \tau_{20} = 2\omega_1; \quad \tau_{10} = 2\omega_2;\\ \omega_{20} = \omega_1; \quad \omega_{10} = 0;\\ -\omega_{00} = \omega_1,\\ \omega_{11} = (\alpha + 1)\,\omega_1 + \omega_2,\end{gathered} \tag{117}$$

et les conditions d'intégrabilité se réduisent à l'équation unique

$$[\omega_1 d\alpha] - 2\alpha\,[\omega_1\omega_2] = 0. \tag{118}$$

Il existe donc des correspondances de cette espèce et elles dépendent d'une fonction arbitraire d'un argumcnt.

5. Nous allons indiquer la construction géométrique de ces correspondances. Pour cela considérons le système d'équations différentielles, auquel conduisent les équations (117)

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, & dB &= \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2;\\ dA_1 &= \omega_{11}A_1, & dB_1 &= 2\omega_2 B + \tau_{11}B_1;\\ dA_2 &= \omega_1 A + \omega_{22}A_2, & dB_2 &= 2\omega_{11}B - \tau_{11}B_2.\end{aligned} \tag{119}$$

Il est d'abord évident que le point A_1 est fixe et que les points A_2, B_1, B_2 décrivent des courbes dont les tangentes, en ces points, passent par les points A, B respectivement. Les équations entraînent encore

$$d\,(B_1B_2 - B^2) = 0; \tag{120}$$

les points B_1, B_2 sont donc situés sur la même conique dont l'équation, rapportée au système mobile est

$$B_1B_2 - B^2 = 0. \tag{121}$$

De plus, on démontre facilement que, t étant défini par l'équation différentielle

$$dt + (t+1)(t\omega_1 + \omega_2) - t\alpha\omega_1 = 0, \tag{122}$$

la droite du plan (B) dont les coordonnées par rapport au système mobile sont $B : B_1 : B_2 = t : t^2 : 1$ est une tangente à cette conique et qu'il existe une droite du plan (A), passant par le point A_1, dont les coordonnées par rapport au système mobile sont $t : 0 : 1$.

On a donc une correspondance projective entre le faisceau de droites passant par le point A_1 et les points sur la conique.

Donc, pour construire à un point A le point correspondant B on trace du point A une tangente à une courbe située dans le plan A; A_2 étant le point de contact sur cette courbe, la correspondance projective entre le faisceau de droites passant par le point A_1 et les points sur une conique du plan (B) fait correspondre aux droites $[AA_1]$, $[A_2A_1]$ deux points sur la conique et les deux tangentes de la conique dans ces deux points déterminent le point B.

L'indétermination de la solution montre que la courbe qui est le lieu du point A_2 peut être, en général, arbitraire.

2. $\beta = -1$; $\gamma = -3$. Dans ce cas on trouve sans aucune espèce de difficultés, ce que du reste est evident à priori, que les correspondances dans ce cas ne sont autres que les correspondances inverses aux précédentes.

7. Sur le généralité des correspondances de la troisième espèce.

1. Une correspondance étant de la troisième espèce, la forme cubique fondamentale Ψ peut être supposée ramenée à la forme $\omega_1{}^3$. On peut donc supposer dans les formules (94) $b = c - 2a = p - 2a = 0$, $\beta = 1$ de sorte que, si l'on pose $a = p$, $\alpha = q$ on obtient

$$\begin{gathered}
\tau_1 = \omega_1,\ \tau_2 = \omega_2; \\
\tau_{22} - \omega_{22} = p\omega_2, \\
\tau_{21} - \omega_{21} = p\omega_1, \\
\tau_{11} - \omega_{11} = q\omega_1, \\
\tau_{12} - \omega_{12} = \omega_1 + q\omega_2, \\
\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0;\ \tau_{00} = \tau_{11} + \tau_{22} = 0.
\end{gathered} \tag{123}$$

Ce système définit les correspondances générales de la troisième espècé. Il conduit aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{gathered}
[\omega_1 (dp - p\overline{\omega_{22} - \omega_{00}} - q\omega_{21} - \overline{\tau_{20} - \omega_{20}} - pq\omega_1 - p^2\omega_2)] = 0, \\
[\omega_1 \omega_{21}] - [\omega_2 (dp - p\overline{\omega_{22} - \omega_{00}} - q\,\omega_{21} - \overline{\tau_{20} - \omega_{20}} - pq\omega_1 - p^2\omega_2)] = 0, \\
[\omega_1\omega_{21}] + [\omega_1(dq - q\omega_{11} - \omega_{00} - p\omega_{12} - \tau_{10} - \omega_{10} - pq\omega_2 - q^2\omega_1)] = 0, \\
[\omega_1(3\omega_{11} - p\omega_2)] + \\
+ [\omega_2\omega_{21}] - [\omega_2(dq - q\overline{\omega_{11} - \omega_{00}} - p\omega_{12} - \overline{\tau_{10} - \omega_{10}} - pq\omega_2 - q^2\omega_1)] = 0.
\end{gathered} \tag{124}$$

La forme de quatre expressions (124) dans lesquelles interviennent outre ω_1, ω_2 quatre expressions de Pfaff nouvelles, rend vraisemblable la propriété du système (123) d'être en involution et d'admettre une solution dépendant de quatre fonctions arbitraires d'un argument. On le vérifie facilement en appliquant la méthode indiquée.

Les correspondances générales de la troisième espèce dépendent donc de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

8. Sur les correspondances de la troisième espèce dont les courbes caractéristiques sont dés droites.

1. Une correspondance de la troisième espèce étant définie par un système d'équations de Pfaff de la forme (123), l'équation des courbes caractéristiques est

$$\omega_1{}^3 = 0. \tag{125}$$

Il est facile d'indiquer les conditions nécéssaires et suffisantes pour que ces courbes soient des droites. En effet, pour cela il faut et il suffit

que, si l'on exprime la forme ω_{21} comme une combinaison linéaire de ω_1, ω_2, on ait
$$\omega_{21} = h\omega_1. \tag{126}$$

Donc, les correspondances de la troisième espèce, dont les courbes caractéristiques sont des droites, si elles existent, sont fournies par le système d'équations de Pfaff
$$\begin{gathered}
\tau_1 = \omega_1, \quad \tau_2 = \omega_2; \\
\tau_{22} - \omega_{22} = p\omega_2, \\
\tau_{21} - \omega_{21} = p\omega_1, \\
\tau_{11} - \omega_{11} = q\omega_1, \\
\tau_{12} - \omega_{12} = \omega_1 + q\omega_2, \\
\omega_{21} = h\omega_1, \\
\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0; \; \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0.
\end{gathered} \tag{127}$$

Ce système conduit aux relations quadratiques extérieures
$$\begin{aligned}
&[\omega_1 (dh - h\,\overline{\omega_{22} - \omega_{00}} - \omega_{20} + h^2\omega_2)] = 0, \\
&[\omega_1 (dp - p\,\overline{\omega_{22} - \omega_{00}} - q\omega_{21} - \overline{\tau_{20} - \omega_{20}} - pq\omega_1 - p^2\omega_2)] = 0, \\
&[\omega_2 (dp - p\,\overline{\omega_{22} - \omega_{00}} - q\omega_{21} - \overline{\tau_{20} - \omega_{20}} - pq\omega_1 - p^2\omega_2)] = 0, \\
&[\omega_1 (dq - q\,\overline{\omega_{11} - \omega_{00}} - p\omega_{12} - \overline{\tau_{10} - \omega_{10}} - pq\omega_2 - q^2\omega_1)] = 0, \\
&[\omega_1 (3\omega_{11} - p + h\omega_2)] - \\
&\quad - [\omega_2 (dq - q\,\overline{\omega_{11} - \omega_{00}} - p\omega_{12} - \overline{\tau_{10} - \omega_{10}} - pq\,\omega_2 - q^2\omega_1)] = 0.
\end{aligned} \tag{128}$$

On en voit immédiatement qu'on peut profiter de l'indétermination des systèmes de référence pour annuler p, q, h. On est donc amené à un système d'équations de Pfaff
$$\begin{gathered}
\tau_1 = \omega_1, \; \tau_2 = \omega_2; \; \tau_{11} = \omega_{11}, \; \tau_{22} = \omega_{22}, \; \tau_{12} = \omega_{12} + \omega_1, \; \tau_{21} = \omega_{21} = 0, \\
\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0, \quad \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0,
\end{gathered} \tag{129}$$
avec les conditions d'intégrabilité
$$\begin{gathered}
[\omega_1\omega_{20}] = [\omega_1\tau_{20}] = [\omega_2 (\tau_{20} - \omega_{20})] = 0, \\
[\omega_1 (\tau_{10} - \omega_{10})] = 0, \\
3\,[\omega_1\omega_{11}] + [\omega_2 (\tau_{10} - \omega_{10})] = 0.
\end{gathered} \tag{130}$$

Ce système n'est pas en involution. Or, si l'on pose en particulier d'aprés (130)
$$\tau_{10} - \omega_{10} = k\omega_1, \quad \tau_{20} = \omega_{20}, \tag{131}$$
on trouve facilement comme condition d'intégrabilité l'èquation unique
$$\omega_1 (dk - 2k\,\overline{\omega_{11} - \omega_{00}})] = 0. \tag{132}$$

On obtient donc, en définitive un système de la forme
$$\begin{gathered}
\tau_1 = \omega_1, \; \tau_2 = \omega_2, \; \tau_{11} = \omega_{11}, \; \tau_{22} = \omega_{22}, \; \tau_{20} = \omega_{20}, \; \tau_{21} = \omega_{21} = 0, \\
\tau_{12} = \omega_{12} + \omega_1, \quad \tau_{10} = \omega_{10} + k\omega_1, \\
\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0, \quad \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0
\end{gathered} \tag{133}$$
dont les conditions d'intégrabilité s'écriront
$$[\omega_1\omega_{20}] = [\omega_1 (3\omega_{11} - k\omega_2)] = [\omega_1 (dk - 2k\,\overline{\omega_{11} - \omega_{00}})] = 0. \tag{134}$$

Les correspondances générales de la troisième espece dont les courbes caractéristiques sont des droites dépendent donc de trois fonctions arbitraires d'un argument.

2. Nous allons donner la construction géométrique de ces correspondances *générales*. Pour cela, remarquons d'abord que les équations (129) entraînent

$$
\begin{aligned}
dA &= \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\
dA_1 &= \omega_{10} A + \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2, \\
dA_2 &= \omega_{20} A \qquad\qquad + \omega_{22} A_2, \\
dB &= \omega_{00} B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2, \\
dB_1 &= (\omega_{10} + k\omega_1) B + \omega_{11} B_1 + (\omega_{12} + \omega_1) B_2, \\
dB_2 &= \qquad \omega_{20} B \qquad\qquad + \omega_{22} B_2;
\end{aligned}
\tag{135}
$$

cela montre, en particulier, que le point A_2 (B_2) décrit une *courbe* (qui n'est pas une droite) et que le point A (B) est sur la tangente à cette courbe.

Ceci posé, considérons les deux courbes qui sont lieu des points A_2 et B_2. La correspondance étudiée entre les points A, B établit une correspondance ponctuelle entre ces deux courbes dans laquelle les points A_2, B_2 se correspondent. Or, il existe une transformation projective bien déterminée qui réalise, en deux points correspondants quelconques A_2, B_2 *un contact analytique du troisième ordre entre les courbes considérées.* Je dis, que *cette correspondance projective engendre en même temps la correspondance étudiée entre les points A, B.*

Considérons, en effet, deux points correspondants A_2, B_2 et la transformation projective en question. Soit α (β) la courbe qui est lieu du point A_2 (B_2) et désignons par TB (TB_1) le point, qui se déduit de B (B_1) en lui imprimant la transformation projective considérée qui transforme le point B_2 en TB_2 (le point TB_2 ayant, d'après l'hypothèse, la même position géométrique que le point A_2). Par la même transformation projective les différentielles dB_2, d^2B_2, d^3B_2 appartenant à la courbe β deviendront TdB_2, Td^2B_2, Td^3B_2 et on aura, en tenant compte des équations (135).

$$
\begin{aligned}
TdB_2 &= \omega_{20} TB \qquad\qquad + \omega_{22} TB_2, \\
Td^2B_2 &= q_0 TB + \omega_1 \omega_{20} TB_1 + q_2 TB_2, \\
Td^3B_2 &= q'_0 TB + q'_1 TB_1 \quad + q'_2 TB_2,
\end{aligned}
\tag{136}
$$

les q_0, q_2,... étant des expressions composées des ω et leurs différentielles, qui est inutile à écrire. D'autre part, les différentielles dA_2, d^2A_2, d^3A_2 appartenant à la courbe α ont à leur tour une forme analogue

$$
\begin{aligned}
d\,A_2 &= \omega_{20} A \qquad\qquad + \omega_{22} A_2, \\
d^2 A_2 &= q_0 A + \omega_1 \omega_{20} A_1 + q_2 A_2, \\
d^3 A_2 &= p'_0 A + q'_1 A_1 \quad + p'_2 A_2.
\end{aligned}
\tag{137}
$$

Soit A_2' (B_2') le point de la courbe α (β) infiniment voisin au point A_2 (B_2). Par la transformation projective considérée le point B'_2 est changé en point

$$
TB_2' = TB_2 + TdB_2 + \tfrac{1}{2} Td^2B_2 + \tfrac{1}{6} Td^3B_2 + \dots
$$

et ce point, d'aprés l'hypothèse, occupe la même position dans l'espace que le point A_2' si l'on néglige les infiniment petits du quatrième ordre. On a donc les formules de la forme

$$\begin{aligned} TB_2 &= \varrho A_2, \\ T\,dB_2 &= \varrho\, d A_2 + \varrho_1 A_2, \\ T\,d^2B_2 &= \varrho\, d^2 A_2 + 2\varrho_1\, d A_2 + 2\varrho_2 A_2, \\ T\,d^3B_2 &= \varrho\, d^3A_2 + 3\varrho_1\, d^2A_2 + 6\varrho_2\, d A_2 + 6\varrho_3 A_2, \end{aligned}$$

ϱ étant un coefficient numérique, ϱ_1 du premier degré, ϱ_2 du second degré, ϱ_3 du troisième degré par rapport à la diflérentielle du paramètre sur les courbes α, β, Ces formules, comparées avec (136) et (137) donnent naissance à quatre relations linéaires entre A, A_1, A_2, TB, TB_1, TB_2 dont la deuxième s'écrit

$$\omega_{20}\,(TB - \varrho A) = \varrho_1 A_2. \tag{138}$$

La compatibilité de ces relations exige que tous les déterminants du quatrième degré que l'on peut former des coeficients qui y figurent, soient nuls. Or, en considérant en particulier le déterminant formé avec les coeficients des A, A_1, TB_1, TB_2 on trouve facilement, que l'on a, *dans le cas général*,

$$\varrho_1 = 0$$

ou bien, d'après (138),

$$TB = \varrho A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Donc, pour construire à un point A le point correspondant B on considére une courbe dans chacun des deux plans et une correspondance ponctuelle entre ces deux courbes. On trace du point A une tangente à la courbe située dans le plan (A); A_2 étant le point de contact sur cette courbe, la correspondance entre les deux courbes fait correspondre au point A_2 un point B_2 de la courbe du plan (B) et détermine une correspondance projective qui amène le point A_2 au B_2 et réalise, en ces deux points, un contact du trosième ordre de la courbe du plan (A) avec celle du plan (B). Cette transformation projective amène en même temps le point A au point B.

L'indétermination de la solution montre que les deux courbes qui sont lieu des points A_2 et B_2 ainsi que la correspondance ponctuelle entre elles peuvent être, en général, arbitraires.