Otakar Borůvka

Sur les transformations simultanées de deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans elles-mêmes

Applicable Anal. 15, 1983, 187-200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500170

Applicable Analysis, 1983, Vol. 15, pp. 187–200
0003-6811/83/1504-0187 $18.50/0

Sur les Transformations Simultanées de Deux Équations Différentielles Linéaires du Deuxième Ordre dans Elles-mêmes

O. BORŮVKA

L'Institut des Mathématiques, de l'Académie tchécoslovaque des Sciences, succursale de Brno, 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a, Tchécoslovaquie, Czechoslovakia

Hommage à mon illustre Collègue M. G. Fichera pour son 60e anniversaire

Communicated by R. P. Gilbert

Dedicated to Gaetano Fichera on his 60th birthday

(*Received in final form January 20, 1983*)

AMS (MOS) Classification 34C20

1. INTRODUCTION

Dans l'article suivant nous considérons les équations différentialles ordinaires linéaires du deuxième ordre de la forme jacobienne

$$y'' = Q(t)y, \tag{Q}$$

aux porteurs continus dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$: $Q \in C^0$. Nous supposons ces équations oscillatoires et donc, jouissant de la propriété que leurs intégrales admettent infiniment beaucoup de zéros qui s'accumulent vers les deux extrémités de j. Nous désignons par M l'ensemble $\{(Q)\}$ ou bien, par occasion, l'ensemble $\{Q\}$.

On sait que toute équation $(Q) \in M$ peut être transformée dans toute équation $(P) \in M$. Cela veut dire qu'il existe de fonctions-phases, X, changeant chaque intégrale $y(x)$ de (Q) dans une intégrale $Y(t)$ de (P) suivant la formule

$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}} y[X(t)] \qquad (0 \neq c = \text{const.})$$

La fonction X s'appelle *transformateur* de (Q) dans (P). Ces transformateurs sont précisément les intégrales de l'équation de Kummer

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2(t) = P(t) \tag{QP}$$

et donc, leur ensemble est l'intégrale générale de (QP).

Rappelons qu'on appelle *fonction-phase* toute fonction

$$A: j \overset{\text{sur}}{\rightarrow} j, \quad A \in C^3, \quad A' \neq 0$$

(dans j). L'ensemble des fonctions-phases, muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions, est un groupe, $\mathscr{G}$, appelé le *groupe des phases*. On désigne par $\mathscr{G}^+$ le sous-groupe de $\mathscr{G}$ formé des fonctions-phases constamment croissantes: $\mathscr{G} \supset \mathscr{G}^+$.

On appelle *dispersion* de (Q) (ou bien de Q) tout transformateur X de l'équation (Q) dans elle-même. Les dispersions de (Q) sont donc les intégrales de "l'équation des dispersions" (QQ). Leur ensemble muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions est le *groupe des dispersions* de (Q), $\mathscr{L}_Q$. On désigne par $\mathscr{L}_Q^+$ *le* sous-groupe de $\mathscr{L}_Q$ formé des dispersions constamment croissantes: $\mathscr{L}_Q \supset \mathscr{L}_Q^+$.

II. ENONCÉ DU PROBLÈME

Nous allons nous occuper du problème suivant: Déterminer les dispersions constamment croissantes qui transforment simultanément deux équations (Q_1), $(Q_2) \in \tilde{M}$ dans elles-mêmes. En d'autres termes, il s'agit de la recherche des intégrales constamment croissantes qui vérifient à la fois les équations (Q_1Q_1), (Q_2Q_2).

Notre méthode employée pour résoudre ce problème est fondée sur le fait que les transformateurs correspondant au problème en question forment un groupe, $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$, qui est l'intersection des groupes $\mathscr{L}^+_{Q_1}, \mathscr{L}^+_{Q_2}$:

$$\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2} = \mathscr{L}^+_{Q_1} \cap \mathscr{L}^+_{Q_2}.$$

III. ETUDE DU PROBLÈME

1. Considérons les équations (Q_1), $(Q_2) \in M$, $Q_1 \neq Q_2$, et désignons

$$\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2} = \mathscr{L}^+_{Q_1} \cap \mathscr{L}^+_{Q_2}.$$

$\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ est donc un sous-groupe de $\mathscr{G}^+$ formé des intégrales constamment croissantes, X, qui vérifient simultanément les équations

$$-\{X, t\} + Q_i(X)X'^2(t) = Q_i(t) \quad (\forall\, t \in j;\ i = 1, 2) \qquad (Q_iQ_i)$$

2. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ $(\subset j)$ les ensembles

$$\mathbb{A} = E_t[t \in j; Q_1(t) - Q_2(t) \neq 0],$$

$$\mathbb{B} = E_x[x \in j; Q_1(x) - Q_2(x) = 0].$$

L'ensemble $(\emptyset \neq)$ $\mathbb{A}$ résulte, manifestement, ouvert. Donc, $\mathbb{A}$ est la réunion d'un ensemble dénombrable des intervalles ouverts et disjoints, i_α: $\mathbb{A} = \cup\, i_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. L'ensemble $\mathbb{B}$, à son tour, est le complément de $\mathbb{A}$ dans j: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = j$; donc $\mathbb{B}$ (vide ou non) est fermé.

Un point $(t, y) \in j \times j$ est dit de la *première espèce* si les deux coordonnées t, y sont à la fois éléments de $\mathbb{A}$ ou de $\mathbb{B}$. Il est dit de la *seconde espèce* dans le cas contraire.

1. *Pour* $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ *tout point* $(t, \xi(t))$ $(t \in j)$ *est de la première espèce.*

En effet, pour $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ on a

$$[Q_1(\xi(t)) - Q_2(\xi(t))]\xi'^2(t) = Q_1(t) - Q_2(t) \quad \forall\, t \in j$$

et, par hypothèse, $\xi'(t) > 0$. Il en résulte la proposition.

COROLLAIRE *Aucune fonction* $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ *ne passe par un point de la seconde espèce.*

3. Radicaux.

Nous appelons *radical* des équations $(Q_1), (Q_2)$ par rapport à e la fonction définie dans j:

$$R_e(t) = \int_e^t \sqrt{|Q_1(\tau) - Q_2(\tau)|}\, d\tau,$$

e $(\in j)$ étant un nombre fixe quelconque. Pour simplifier, nous écrivons souvent R au lieu de R_e.

Les formules suivantes sont évidentes:

$$R(e) = 0, \quad R(t) \geqq 0 \text{ pour } t > e, \quad R(t) \leqq 0 \text{ pour } t < e,$$

$$R \in C^1, \quad R'(t) = \sqrt{|Q_1(t) - Q_2(t)|} \geqq 0 \text{ pour } t \in {}^{\mathbb{A}}_{\mathbb{B}}$$

Pour $t_1. t_2 \in j, t_1 < t_2$ on a, manifestement,

$$R(t_2) - R(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|Q_1(\tau) - Q_2(\tau)|}\, d\tau \geqq 0$$

La fonction $\sqrt{|Q_1 - Q_2|}$ étant continue dans j, la relation $R(t_1) < R(t_2)$ subsiste précisément dans le cas s'il existe un nombre $t \in [t_1, t_2] \cap \mathbb{A}$.

Il en résulte, en particulier, la proposition suivante:

2. *a. Pour* $t_1, t_2 \in \mathbb{A}$, $t_1 < t_2$ *on a* $R(t_1) < (t_2)$.

b. Pour t_1, $t_2 \in j$, $t_1 < t_2$ *on a* $R(t_1) = R(t_2)$ *précisément dans le cas* $[t_1, t_2] \subset \mathbb{B}$.

Nous allons continuer par établir d'autres propriétés de la fonction R.

3. *Soit* $X \in \mathscr{G}^+$ *un transformateur de l'équation* (Q_i) *dans* $(\tilde{Q}_i)$ $(i = 1, 2)$. *On a alors*

$$\tilde{R} = R(X),$$

$\tilde{R}$ *étant le radical des équations* $(\tilde{Q}_1)$, $(\tilde{Q}_2)$ *par rapport à* $\tilde{e} = X^{-1}(e)$.

Démonstration. On a, par hypothèse,

$$\sqrt{|Q_1(X)-Q_2(X)|}X'(t)=\sqrt{|\tilde{Q}_1(t)-\tilde{Q}_2(t)|}$$

et donc

$$R'(X)X'(t)=\sqrt{|\tilde{Q}_1(t)-\tilde{Q}_2(t)|} \qquad \forall t \in j.$$

Il en résulte facilement l'achèvement de la démonstration.

Toute fonction $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ transforme l'équation (Q_i) dans elle-même. Par conséquent, le radical R jouit, d'après 3, de la propriété suivante:

4. *Pour* $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ *on a*

$$R\xi(t)=R(t)+R\xi(e) \qquad \forall t \in j. \tag{1}$$

Nous écrivons, pour simplifier, $R\xi$ au lieu de $R(\xi)$.

La formule (1) entraîne à son tour les formules suivantes valables pour d'arbitraires fonctions ξ_1, $\xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$:

$$R\xi_1(t)-R\xi_2(t)=R\xi_1(e)-R\xi_2(e), \tag{2}$$

$$R\xi_2\xi_1(t)=R(t)+R\xi_1(e)+R\xi_2(e) \qquad \forall t \in j. \tag{3}$$

5. *Soient* ξ_1, $\xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$. *La relation* $R\xi_1(t)=R\xi_2(t)$ $\forall t \in j$ *entraîne* $\xi_1(t)=\xi_2(t)$ $\forall t \in j$.

Démonstration. Soit i_α $(\subset j)$ l'un des intervalles ci-dessus formant l'ensemble $\mathbb{A}$. S'il existe un nombre $x \in i_\alpha$ tel que $\xi_1(x) \neq \xi_2(x)$, on a d'après 2b: $\xi_1(x) \in \mathbb{B}$, et encore, d'après 1: $\xi_1^{-1}\xi_1(x)=x \in \mathbb{B}$, ce qui est absurde. Il en résulte $\xi_1(t)=\xi_2(t)$ $\forall t \in i_\alpha$. Or, les fonctions ξ_1, ξ_2 étant intégrales de l'équation (Q_1Q_1) et dont les valeurs coïncident dans i_α, le théorème sur l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation (Q_1Q_1) [1] entraîne l'égalité $\xi_1(t)=\xi_2(t)$ $\forall t \in j$.

6. *Le groupe* $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ *est abélien.*

En effet, on a pour ξ_1, $\xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$, d'après (3), $R\xi_2\xi_1(t)=R\xi_1\xi_2(t)$ $\forall t \in j$ et donc, d'après 5, $\xi_2\xi_1=\xi_1\xi_2$.

4. Ordre du groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$.

7. *Soient* $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$; $t_0 \in j$. *L'égalité* $\xi_1(t_0) = \xi_2(t_0)$ *entraîne* $\xi_1(t) = \xi_2(t)\ \forall t \in j$.

En effet, l'égalité en question entraîne, d'après (2), la relation $R\xi_1(t) = R\xi_2(t)\ \forall t \in j$. Il en résulte la proposition.

D'après 7 on a sur $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ un ordre appelé *naturel* dont la relation d'ordre, $\prec$, est définie de la façon suivante:

Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$, *le symbole* $\xi_1 \prec \xi_2$ *signifie* $\xi_1(t) < \xi_2(t)\ \forall t \in j$.

On a, évidemment, pour ξ; $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_1}$, $\xi_1 \prec \xi_2$: $\xi_1\xi \prec \xi_2\xi$, $\xi\xi_1 \prec \xi\xi_2$, ce qui montre que l'ordre en question est linéaire.

5. Paramétrisation du groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$.

Un nombre $e \in j$ étant choisi, nous définissons l'application $\mathscr{A}_e : \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2} \to j$ de la manière suivante: Pour $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ on a $\mathscr{A}_e\xi = \xi(e)$. Cette application prend le nom *paramétrisation* de $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ par rapport à la base e, et nous écrivons, par occasion, $\mathscr{A}$ au lieu de $\mathscr{A}_e$. Le nombre $\xi(e)$ est dit le *paramètre* de ξ en $\mathscr{A}_e$. Evidemment, e est le paramètre de l'élément-unité du groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$, *id.* Une paramétrisation de $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ étant donnée, on parle du groupe *paramétrisé.* Dans la suite nous supposons généralement que $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ soit paramétrisé.

Désignons par P_e (plus brièvement: P) l'ensemble des paramètres des éléments du groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ paramétrisé par rapport à e. On a, manifestement, $e \in P$ et la formule $a \in P$ entraîne $a = \xi(e)$ pour un $\xi \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$.

D'après 7, l'application $\mathscr{A}$ est une bijection de $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ sur P.

D'après 1, on a $P \subset \mathbb{A}$ ou $P \subset \mathbb{B}$ suivant que $e \in \mathbb{A}$ ou $e \in \mathbb{B}$.

8. *Le radical* R_e *va constamment en croissant sur* P_e.

Démonstration. Soient $\xi_1(e)$, $\xi_2(e) \in P$, $\xi_1(e) < \xi_2(e)$. On a, manifestement, $R\xi_1(e) \leqq R\xi_2(e)$. L'égalité $R\xi_1(e) = R\xi_2(e)$ entraîne en vertu de (2) et 5, la contradiction $\xi_1(e) = \xi_2(e)$.

6. Le groupe $\mathscr{P}_e$.

Soit $\mathscr{P}_e$ (ou $\mathscr{P}$) le groupoïde $(P, \circ)$ dont l'opération binaire, $\circ$, est définie de la manière suivante:

Pour $\xi_1(e)$, $\xi_2(e) \in P$ *on a* $\xi_1(e) \circ \xi_2(e) = \xi_2 \xi_1(e)$.

9. $\mathscr{P}$ *est un groupe à l'unité e.*

Démonstration. a. On démontre facilement l'associativité de $\mathscr{P}$.
b. On a pour

$$\xi(e) \in \mathscr{P}\colon e \circ \xi(e) = \xi(id(e)) = \xi(e);\ \xi(e) \circ e = id\,\xi(e) = \xi(e)$$

et l'on voit que e est l'élément neutre de $\mathscr{P}$.
c. Pour $\xi(e) \in \mathscr{P}$ on a $\xi^{-1}(e) \in \mathscr{P}$ et l'on démontre que $\xi^{-1}(e)$ est l'élément inverse de $\xi(e)$ dans $\mathscr{P}$.

Le groupe $\mathscr{P}_e$ prend le nom *groupe des paramètres* du groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ par rapport à la base e, ou bien, plus brièvement, groupe des paramètres.

10. *Le groupe* $\mathscr{P}$ *est abélien.*

En effet, le groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ étant abélien, $\mathscr{P}$ jouit, manifestement, de la même propriété.

11. *L'ordre classique du groupe* $\mathscr{P}$ *résulte linéaire.*

Démonstration. Nous avons à montrer qu'on a, pour $\xi_1(e)$, $\xi_2(e)$, $\xi(e) \in \mathscr{P}$, $\xi_1(e) < \xi_2(e)$:

$$\xi(e) \circ \xi_1(e) < \xi(e) \circ \xi_2(e); \quad \xi_1(e) \circ \xi(e) < \xi_2(e) \circ \xi(e)$$

ou bien, en d'autres termes:

$$\xi_1 \xi(e) < \xi_2 \xi(e);\ \xi \xi_1(e) < \xi \xi_2(e).$$

Or, l'inégalité $\xi_1(e) < \xi_2(e)$ entraîne $\xi_1 \prec \xi_2$ et il en résulte la première formule; la validité de la seconde résulte de ceci que la fonction ξ va constamment en croissant dans j.

12. *La paramétrisation* $\mathscr{A}$ *réalise un o-isomorphisme du groupe* $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ *sur* $\mathscr{P}$.

Démonstration. Nous savons que l'application $\mathscr{A}$ est une bijection de $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ sur $\mathscr{P}$. De plus, on a pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$:

$$\mathscr{A}\xi_1\xi_2 = \xi_1\xi_2(e) = \xi_2(e) \circ \xi_1(e) = \mathscr{A}\xi_2 \circ \mathscr{A}\xi_1 = \mathscr{A}\xi_1 \circ \mathscr{A}\xi_2,$$

et encore, pour $\xi_1 \prec \xi_2$: $\xi_1(e) < \xi_2(e)$ et donc $\mathscr{A}\xi_1 < \mathscr{A}\xi_2$.

Nous désignons par $\mathscr{R}$ le groupe additif des nombres réels.

7. Application R^*.

Désignons par R^* la fonction partielle de R, définie sur l'ensemble P:

$$R^*(t) = R(t) \quad \forall t \in P.$$

D'après 8. La fonction R^* va constamment en croissant sur P.

Soit $R^*(P) = H$. L'application $R^*: P \to H$ qui fait associer à tout élément $\xi(e) \in P$ le nombre $R^*\xi(e) \in H$ est manifestement une bijection de P sur H.

13. *L'ensemble H est clos par rapport à l'addition $+$.*

En effet, pour $a, b \in H$ on a

$$a = R^*\xi_1(e),\ b = R^*\xi_2(e);\ \xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$$

et donc, en vertu de (3): $a + b = R^*\xi_2\xi_1(e) \in H$.

14. *Le groupoïde $\mathscr{Y} = (H, +)$ est un sous-groupe de $\mathscr{R}$, $\mathscr{Y} \subset \mathscr{R}$, et l'application R^* réalise un o-isomorphisme de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{Y}$.*

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente. Il est encore clair que l'application R^* de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{Y}$ est biunivoque. Pour $\xi_1(e), \xi_2(e) \in \mathscr{P}$ on a

$$R^*[\xi_1(e) \circ \xi_2(e)] = R^*\xi_2\xi_1(e) = R^*\xi_1(e) + R^*\xi_2(e)$$

et cela montre que l'application R^* est homomorphe. Finalement, $\xi_1(e) < \xi_2(e)$ entraîne $R^*\xi_1(e) < R^*\xi_2(e)$, étant donné que R^* va constamment en croissant sur $\mathscr{P}$.

THÉORÈME (fondamental) *Le groupe* $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ *est o-isomorphe au groupe* $\mathscr{Y}$.

Démonstration. L'application $\mathscr{A}$ réalise, d'après 12, un o-isomorphisme de $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ sur $\mathscr{P}$ et, en vertu de 14, R^* est un o-isomorphisme de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{Y}$. Il en résulte que l'application $\mathscr{F} = R^*\mathscr{A}: \mathscr{P}^+_{Q_1Q_2} \to \mathscr{Y}$ est un o-isomorphisme de $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ sur $\mathscr{Y}$.

COROLLAIRE *Le groupe* $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ *est image o-isomorphe d'un sous-groupe de* $\mathscr{R}$.

8. Conséquences du théorème fondamental.

L'importance du théorème en question pour nos recherches consiste en ceci que, toute propriété du groupe $\mathscr{Y}$, qui reste inaltérée par des o-isomorphismes, se trouve transférée, par l'application $\mathscr{F}^{-1}$, au groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$

Or, $\mathscr{Y}$ étant un sous-groupe de $\mathscr{R}$, seuls les trois cas suivants peuvent se présenter: 1^0 $\mathscr{Y} = \{0\}$; 2^0 $\mathscr{Y} = \{vc\}$, v entier, $c > 0$; 3^0 $\mathscr{Y}$ est dense en $\mathscr{R}$. On sait encore que, si $\mathscr{Y}$ est borné on a $\mathscr{Y} \sim \{0\}$.

A. $\mathbb{B} \neq \emptyset$.

15. *Dans le cas* $\mathbb{B} \neq \emptyset$ *le groupe* $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ *coïncide avec le groupe* $\{id\}$ *ou bien résulte monogène infini.*

Démonstration. Il suffit, évidemment, de montrer que le groupe $\mathscr{Y}$ n'est pas dense en $\mathscr{R}$.

Or, supposons la contraire et donc que l'ensemble H résulte dense en $\mathscr{R}$.

Choisissons pour base de la paramétrisation $\mathscr{A}$ un nombre quelconque $e \in \mathbb{B}$; nous avons alors $P \subset \mathbb{B}$.

Soit $i_\alpha \subset \mathbb{A}$ l'un quelconque des intervalles ouverts dont $\mathbb{A}$ est la réunion.

Soient $x_1, x_2 \in i_\alpha, x_1 < x_2$, et donc $[x_1, x_2] \subset i_\alpha \subset \mathbb{A}$. La fonction R $(= R_e)$ allant constamment en croissant dans i_α nous avons $R(x_1) < R(x_2)$. Or, H étant dense en $\mathscr{R}$, par hypothèse, il existe un $y \in H$ tel que $R(x_1) < y < R(x_2)$. Il en résulte, pour un $z \in P \subset \mathbb{B}$:

$$y = R^*(z) = R(z)$$

et donc $R(x_1)<R(z)<R(x_2)$. On a, par conséquent, $x_1<z<x_2$ ce qui est absurde en vue de $[x_1, x_2]\subset\mathbb{A}$.

Les propositions 16, 17 indiquent de suffisantes conditions sous lesquelles $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ coïncide avec le groupe $\{id\}$ ou bien résulte monogène infini.

16. *Le groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ coïncide avec $\{id\}$ si l'ensemble $\mathbb{B}$ $(\neq\emptyset)$ est borné.*

Démonstration. L'hypothèse en question étant remplie, il existe un élément-maximum de $\mathbb{B}$, a $(\in\mathbb{B})$.

Soit $\xi\in\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$. On a, d'après 1, $\xi(a)\in\mathbb{B}$ et donc $a\geqq\xi(a)$. Or, $\xi^{-1}\in\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ étant l'inverse de ξ on a, évidemment,

$$\xi^{-1}(a)\geqq\xi^{-1}\xi(a)=a,$$

et encore $\xi^{-1}(a)\in\mathbb{B}$, $\xi^{-1}(a)\leqq a$. Il en résulte $\xi^{-1}(a)=a$, $\xi(a)=a=id(a)$ et cela entraîne d'après 7: $\xi=id$.

17. *Supposons que les fonctions Q_1, Q_2 soient périodiques avec c (>0) et qu'il existe un nombre $x\in j$ tel que $Q_1(x)=Q_2(x)$ tandis que*

$$Q_1(t)\neq Q_2(t)\qquad\forall\, t\in(x, x+c)$$

On a alors

$$\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}=\{id+vc\},$$

v entier.

Démonstration. On a par hypothèse

$$\mathbb{A}=\cup\,(x+vc, x+\overline{v+1}c),\quad \mathbb{B}=\{x+vc\},$$

v entier.

Toute fonction $id+vc$ vérifie les équations (Q_iQ_i), $i=1,2$, ce qui entraîne $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}\supset\{id+vc\}$, v entier.

D'autre part, soit $\xi\in\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$. L'hypothèse $x\in\mathbb{B}$ entraîne $\xi(x)\in\mathbb{B}$; il en résulte $\xi(x)=x+mc$, m étant un entier. On voit que les fonctions

ξ, $id+mc$ prennent au point x la même valeur et cela entraîne leur coïncidence. Il en résulte $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2} \subset \{id+\nu c\}$, ν entier, et cela achève la démonstration.

B. $\mathbb{B}=\emptyset$.

Dans ce cas les fonctions Q_1, Q_2 n'ont pas des valeurs communes et l'on peut supposer sans restreindre la généralité, $Q_1(t)-Q_2(t)>0$ $\forall t \in j$. Le radical correspondant R $(=R_e, e \in j$ étant choisi arbitrairement) va constamment en croissant dans j et l'on a $R'(t)>0$ $\forall t \in j$.

18. *Si R est borné on a* $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}=\{id\}$.

Démonstration. Si R est borné le groupe $\mathscr{Y}$ en est aussi; par conséquent $\mathscr{Y}=\{0\}$ et donc $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}=\{id\}$.

Si R n'est pas borné, deux cas peuvent se présenter, suivant que $R \notin \mathscr{G}^+$ ou bien $R \in \mathscr{G}^+$.

Dans le premier cas nos méthodes ne donnent pas au sujet du groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}$ d'informations allant au delà du théorème fondamental.

Nous considérons dans la suite l'autre cas où le radical est une fonction-phase. Cette hypothèse s'exprime, évidemment, par la formule $Q_1-Q_2 \in C^2$.

L'hypothèse en question, $R \in \mathscr{G}^+$, entraîne $R^{-1} \in \mathscr{G}^+$.

Or, la fonction R^{-1} transforme la fonction Q_i $(i=1,2)$ dans

$$P_i=-\{R^{-1},.\}+Q_i(R^{-1})R^{-1'2}$$

et l'on a, évidemment,

$$R^{-1'2}=\frac{1}{R'^2(R^{-1})}=\frac{1}{Q_1(R^{-1})-Q_2(R^{-1})}$$

et donc

$$P_i=-\{R^{-1},.\}+\frac{Q_i(R^{-1})}{Q_1(R^{-1})-Q_2(R^{-1})}.$$

Cette formule entraîne, en particulier,

$$P_1 - P_2 = 1. \tag{4}$$

On voit que les fonctions P_1, P_2 résultent simultanément non-périodiques ou bien elles admettent la même période (primitive) c (>0) ou bien elles gardent des valeurs constantes. On a, manifestement, $(P_i) \in M$.

Or, l'equation (P_i) étant la transformée de (Q_i) par R^{-1}, on a ([2])

$$\mathscr{L}^+_{P_i} = R\mathscr{L}^+_{Q_i}R^{-1}$$

et cette formule entraîne

$$\mathscr{P}^+_{P_1P_2} = R\mathscr{L}^+_{Q_1}R^{-1} \cap R\mathscr{L}^+_{Q_2}R^{-1} = R(\mathscr{L}^+_{Q_1} \cap \mathscr{L}^+_{Q_2})R^{-1} = R\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2}R^{-1}$$

et donc

$$\mathscr{P}^+_{Q_1Q_2} = R^{-1}\mathscr{P}^+_{P_1P_2}R. \tag{5}$$

Nous entendons pour le moment sous *période* de la fonction P_i $(i=1,2)$ tout nombre $k \in j$ tel que $P_i(t+k) = P_i(t)$ $\forall t \in j$. Nous conservons le nom *période primitive* de P_i pour la plus petite période positive de P_i, $c>0$, de sorte que, s'il en existe, la fonction P_i résulte périodique avec c.

Soit K l'ensemble des périodes de P_i. On a, évidemment, $K \neq \emptyset$, et le groupoïde $\mathscr{K} = (K, +)$ est un sous-groupe de $\mathscr{R}$: $\mathscr{K} \subset \mathscr{R}$.

Le groupe $\mathscr{K}$ coïncide avec $\{0\}$ ou bien il resulte monogène infini, (c), ou bien se trouve confondu avec $\mathscr{R}$, suivant que les fonctions P_i résultent non-périodiques ou bien périodiques avec c ou bien qu'elles sont des constantes.

Or, grâce à la relation (4) le groupe $\mathscr{P}^+_{P_1P_2}$ peut être déterminé par un calcul direct. En effet, tout élément $X \in \mathscr{P}^+_{P_1P_2}$ vérifiant simultanément les équations (P_iP_i) $(i=1,2)$, on a

$$[P_1(X) - P_2(X)]X'^2 = P_1 - P_2,$$

et donc, en vertu de (4), $X(t) = t + k$ $\forall t \in j$, $k = \text{const}$. La fonction X

étant intégrale de l'équation $(P_i P_i)$, on a $k \in K$. Il en résulte facilement

$$\mathscr{P}^+_{P_1 P_2} = \{id + k\} \quad \forall k \in \mathscr{K}. \tag{6}$$

Les considérations précédentes permettent de caractériser le groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$.

19. *Le groupe* $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ *coïncide avec le groupe* $\{id\}$ *ou bien il résulte monogène infinie ou bien planaire, suivant que les fonctions* P_i *sont non-périodiques ou bien périodiques ou bien sont des constantes.*

Démonstration. Les formules (5), (6) entraînent

$$\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2} = R^{-1}[R + k] \quad \forall k \in \mathscr{K}. \tag{7}$$

i) Si les fonctions P_i sont non-périodiques, on a $\mathscr{K} = \{0\}$ et la formule (7) entraîne $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2} = \{id\}$.

ii) Si les fonctions P_i sont périodiques avec c (>0), on a $\mathscr{K} = \{\nu c\}$, ν entier, et, d'après (7), $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ consiste en fonctions $\xi_\nu = R^{-1}(R + \nu c)$. Donc $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ est le groupe monogène infini (ξ_1).

iii) Si les fonctions P_i sont des constantes, on a $\mathscr{K} = \mathscr{R}$. D'après (7), le groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ consiste en fonctions $\xi = R^{-1}[R + k]$ $\forall k \in j$. On voit qu'il passe, par tout point $(t_0, y_0) \in j \times j$ précisément un élément $\xi_0 \in \mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ à savoir la fonction ξ_0 déterminée par las valeur $k = R(y_0) - R(t_0)$. Il en résulte que le groupe $\mathscr{P}^+_{Q_1 Q_2}$ est planaire ([3]).

Remarquons que dans le cas $Q_1 - Q_2 = 1$, $e = 0$, on a $R = R^{-1} = id$, $P_i = Q_i$ $(i = 1, 2)$ et la proposition 19 subsiste pour $P_i = Q_i$.

Remarque. En ce qui concerne les équations différentielles linéaires d'ordre $n \geqq 3$, de fondements d'une théorie algébrique des transformations de ces équations ont été considérés par F. Neuman ([4], [5]).

Bibliographie

[1] O. Borůvka, *Linear Differential Transformations of the Second Order*, The English Universities Press, London, 1971.

[2] O. Borůvka, Algebraic methods in the theory of global properties of the oscillatory equations $y'' = Q(t)y$. Equadiff IV Proceedings, Prague, 1977. *Lecture Notes in Mathematics* 703, 355–45.

[3] O. Borůvka, Sur une classe de groupes continus à un paramètre formés des fonctions réelles d'une variable. *Ann. Polon. Math.* **XLII** (1982), 27–37.
[4] F. Neuman, Categorial approach to global transformations of the n-th order linear differential equations. *Čas. pro pěst. mat.* **107** (1982), 350–355.
[5] F. Neuman, On solutions of the vector functional equation $y(\xi(x)) = f(x) \cdot A \cdot y(x)$, *Aequationes Math.* **16** (1977), 245–257.