Otakar Borůvka

Algebraické prostory s operátory a jejich realizace diferenciálními rovnicemi

Text „Semináře o diferenciálních rovnicích", PřF UJEP Brno, 1988, 35 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500176

Seminář
Borůvka

Algebraické prostory s operátory a jejich realizace diferenciálními rovnicemi I., II.

I. Homogenní algebraické prostory s operátory

1. Úvod. V několika předcházejících přednáškách v tomto semináři jsem hovořil o algebraických prostorech s operátory v souvislosti s diferenciálními lineárními rovnicemi 2. řádu. Uvedl jsem, že teorie algebraických prostorů s operátory, která je v algebře rozvíjena již po několik desetiletí a zejména v poslední době v souvislosti s počítači, byla nedávno obohacena modelem homogenního prostoru v oboru diferenciálních rovnic. Jde o model skládající se z množiny M všech diferenciálních lineárních oscilatorických rovnic Jacobiova typu v intervalu $R = (-\infty, \infty)$ a z grupy G fázových funkcí, která operuje na množině M jako grupa transformátorů. Uvedl jsem, že tento poznatek má významné důsledky pro další rozvoj jak teorie algebraických prostorů s operátory tak i pro teorii zmíněných diferenciálních rovnic, protože umožňuje přenášet myšlenky, pojmy, metody a výsledky z jedné teorie na druhou. Jako příklad jsem uvedl možnost rozšíření oné algebraické teorie o teorii bloků, vyvinutou pro zmíněné diferenciální rovnice. - Rovněž jsem ve svých přednáškách uvedl definice a základní poznatky o algebraických prostorech s operátory, zejména pojem homogenního prostoru a tzv. podmínku smíšené asociativity, která ovládá tuto teorii.

V dnešní a dalších přednáškách v tomto semináři budu pokračovat v úvahách směřujících k rozšíření teorie algebraických prostorů s operátory, na základě vlastností zmíněného modelu v oboru dif. rovni

2. Základní úvahy. Uvažujme homogenní algebraický prostor s operátory

$$\mathbb{E} = (E, G; \alpha)$$

skládající se[1] neprázdné množiny E a grupy G operující v množině E homomorfizmem α.

Připomeňme, že množinu E nazýváme pole prostoru $\mathbb{E}$, prvky grupy G operátory, a že homomorfizmus α zobrazuje grupu G do grupy $\mathcal{S}(E)$ skládající se ze všech bijekcí pole E do sebe: $\alpha : G \to \mathcal{S}(E)$.

Píšeme

$$\alpha(\omega) = \varphi_\omega \ (\in \mathcal{S}(E)) \ \forall \omega \in G$$
$$\varphi_\omega(x) = \omega * x \ \forall \omega \in G \text{ a } \forall x \in E$$

a označujeme symbolem ε popř. I_E jednotku grupy G popř. grupy $\mathcal{S}$(E)

Víme, že platí vztahy:

(1) $$\omega_2\omega_1 * x = \omega_2 * (\omega_1 * x) \ \forall \omega_1, \omega_2 \in G \text{ a } \forall x \in E$$
(smíšená asociativita)

(2) $$\varepsilon * x = x \ \forall x \in E$$
(ε jednotkový operátor)

a dále máme předpoklad, že prostor $\mathbb{E}$ je homogenní, tj. že

(3) grupa G operuje v množině E tranzitivně,

neboli, jinými slovy, každý prvek $x \in E$ lze transformovat do každého prvku $y \in E$ vhodnými operátory $\omega \in G$ (nazýváme je transformátory v prostoru $\mathbb{E}$: $\omega * x = y$).

Připomeňme platnost implikace:

(4) $$\omega * x = y \Leftrightarrow \omega^{-1} * y = x \ (\omega \in G)$$

Množinu všech transformátorů v prostoru $\mathbb{E}$ prvku $x \in E$ do prvku $y \in E$ označujeme $T(x,y)$:

$$T(x,y) = \{\omega \in G; \omega * x = y\}$$

Podle (4) máme

$$T(y,x) = T^-(x,y)$$

($T^-(x,y)$ značí množinu prvků inverzních k prvkům množiny $T(x,y)$: $T^-(x,y) = \{\omega^{-1}; \omega \in T(x,y)\}$).

Je užitečné rozšířit předcházející pojmy a označení na neprázdné množiny $E' \subseteq E$, $G' \subseteq G$ takto:

$\varphi_{G'}(E') = G' * E' = \{\omega * x;\ \omega \in G',\ x \in E'\}$.

Množinu $\varphi_{G'}(E')$ nazýváme obraz množiny E' vytvořený množinou G'. Snadno vidíme, že platí vztahy obdobné vztahům (1) a (2)

(1′) $\omega G' * x = \omega * (G' * x)$, $\quad G'\omega * x \subseteq G' * (\omega * x)$ $\forall \omega \in G$ a $\forall x \in E$,

(2′) $\qquad \varepsilon * E' = E'$.

Poznámky.

1. Platnost vztahů (1) a (2) je podmínkou nutnou a dostatečnou, aby grupa G, která je oborem operátorů v množině E, operovala v E homomorfizmem α .

2. Když $(\emptyset \neq) E' \subseteq E$ a podgrupa $G' \subseteq G$ operuje v E' homomorfizmem α', který je restrikcí homomorfizmu α na G' , nazýváme prostor s operátory

$$E' = (E', G'; \alpha')$$

podprostorem v E .

K tomu stačí, aby množina E' byla invariantní vzhledem k G' , tj. $G' * E' = E'$.

3. Stabilizátory . 1. Pro každý prvek $x \in E$ je množina všech operátorů, které nechávají prvek x invariantní, grupa. Nazýváme ji stabilizátor (v prostoru E) a označujeme G_x :

(5) $$T(x,x) = G_x .$$

Důkaz. Zřejmě stačí ukázat:

a. $\omega_1, \omega_2 \in G_x \Rightarrow \omega_1\omega_2 \in G_x$

b. $\omega \in G_x \Rightarrow \omega^{-1} \in G_x$.

Ad a. $\omega_1, \omega_2 \in G_x$ znamená $\omega_1 * x = x$, $\omega_2 * x = x$. Podle (1) máme $\omega_1\omega_2 * x = \omega_1 * (\omega_2 * x) = \omega_1 * x = x$, tedy $\omega_1\omega_2 \in G_x$.

Ad b. $\omega \in G_x$ znamená $\omega * x = x$ a odtud podle (4) máme $\omega^{-1} * x = x$, tedy $\omega^{-1} \in G_x$. $\square$

2. Dále platí:

(i) $\quad T(x, \omega * x) = \omega G_x \ \forall x \in E$ a $\forall \omega \in G$

(ii) $\quad T(\omega * x, x) = G_x \omega^{-1} \ \forall x \in E$ a $\forall \omega \in G$.

Důkaz. Omezíme se na důkaz části (i) . Její obsah vyjadřuje, že levá třída ωG_x se skládá ze všech operátorů, které transformují prvek x do prvku $\omega * x$.

Nyní, pro $\forall \xi \in T(x, \omega * x)$ máme

$$\xi * x = \omega * x \Rightarrow \xi^{-1} * (\xi * x) = \xi^{-1} * (\omega * x) \Rightarrow x = \xi^{-1}\omega * x \Rightarrow$$
$$\xi^{-1}\omega \in G_x \Rightarrow \xi^{-1} \in G_x\omega^{-1} \Rightarrow \xi \in \omega G_x,$$

takže $T(x, \omega * x) \subseteq \omega G_x$.

Podobně, pro $\forall \xi \in \omega G_x$ a vhodný operátor $\varsigma \in G_x$ máme

$$\xi * x = \omega \varsigma * x = \omega * (\varsigma * x) = \omega * x,$$

takže ξ transformuje prvek x do $\omega * x$, tedy $\xi \in T(x, \omega * x)$, a vychází $\omega G_x \subseteq T(x, \omega * x)$. $\Box$

3. Pro $\forall x, y \in E$ a $\forall \omega \in T(x,y)$ máme

(6) $$T(x,y) = \omega G_x = G_y\omega.$$

Důkaz. Zvolme $\omega \in T(x,y)$. Pak je $y = \omega * x$ a podle 2 (i) máme $T(x,y) = \omega G_x$. Dále je podle (4) $\omega^{-1} * y = x$ a podle 2 (ii) : $T(x,y) = T(\omega^{-1} * y, y) = G_y\omega$. $\Box$

Došli jsme k důležitému výsledku, že stabilizátory každých dvou prvků $x, y \in E$ jsou vzájemně konjugované přes transformátory těchto prvků:

(7) $$y = \omega * x \Rightarrow G_y = \omega G_x \omega^{-1} \quad (x, y \in E,\ \omega \in G).$$

Přímým důsledkem této věty je poznatek, že všechny stabilizátory v prostoru E a rovněž všechny množiny transformátorů $T(x,y)$ ($\forall x, y \in E$) mají touž mohutnost (kardinální číslo).

Pokud jde o vlastnosti množiny $T(x,y)$, dokážeme ještě tuto větu:

4. Pro $\forall x, y \in E$ a $\forall \omega \in G$ platí vzorec:

$$T(\omega * x, \omega * y) = \omega\, T(x,y)\,\omega^{-1}.$$

Důkaz. Zvolme libovolný transformátor τ prvku x do y, takže $\tau * x = y$. Pak $\omega\tau\omega^{-1}$ transformuje prvek $\omega * x$ do prvku

$$\omega\tau\omega^{-1} * (\omega * x) = \omega\tau * x = \omega * (\tau * x) = \omega * y.$$

Dále máme podle (6) a (7):

$$\omega T(x,y)\omega^{-1} = \omega\tau G_x \omega^{-1} = \omega\tau\omega^{-1}(\omega G_x \omega^{-1}) = (\omega\tau\omega^{-1}) G_{\omega * x} =$$
$$= T(\omega * x, \omega * y). \quad \Box$$

Aplikace:

Nechť $x,y \in E$ a nechť $\lambda \in G_x \cap G_y$. Pak máme $\lambda * x = x$, $\lambda * y = y$ a tedy

$$T(x,y) = T(\lambda * x, \lambda * y) = \lambda T(x,y)\lambda^{-1},$$

takže

$$\lambda \cdot T(x,y)\lambda^{-1} = T(x,y) .$$

Když $\lambda = \bigcap G_x \; \forall x \in E$, platí předcházející rovnost pro $\forall x,y$ ...

4. Symbolem Γ_E označujeme množinu všech stabilizátorů v E.

V dalších úvahách se často setkáme s vnitřními automorfizmy grupy G: Vnitřní automorfizmus $\mathcal{Q}_\sigma$ grupy G je bijektivní zobrazení grupy G do sebe, určené libovolným prvkem $\sigma \in G$ takto:

$$\mathcal{Q}_\sigma(\omega) = \sigma \cdot \omega \sigma^{-1} \; \forall \omega \in G .$$

Např. vzorec (7) vyjadřuje, že každý stabilizátor $G_x \in \Gamma_E$ přejde libovolným vnitřním automorfizmem $\mathcal{Q}_\sigma$ ve stabilizátor $G_{\sigma * x} \in \Gamma_E$:

$$\mathcal{Q}_\sigma G_x = G_{\sigma * x} ;$$

Při studiu vnitřních automorfizmů grupy G vchází do úvah centrum Z grupy G (množina všech prvků $\rho \in G$ zaměnitelných s každým prvkem v G: $\rho \in Z \Leftrightarrow \rho\omega = \omega\rho \; \forall \omega \in G$. Z algebry víme, že Z je invariantní podgrupa v G a že množina všech vnitřních automorfizmů grupy G je grupa izomorfní s faktorovou grupou G/Z.

Nuže, označme pro $G_x \in \Gamma_E$,

$$Z_x = Z \cap G_x .$$

Zřejmě je Z_x invariantní podgrupa v G a z inkluzí $Z_x \subseteq G_x \subseteq$ plyne, že je invariantní podgrupou v G_x. Máme tedy zejména

$$\omega Z_x \omega^{-1} = Z_x \quad \forall \omega \in G$$

a dále

$$\omega Z_x \omega^{-1} \subseteq \omega G_x \omega^{-1} = G_{\omega * x} = G_y \quad (\omega \in T(x,y)),$$

takže

$$Z_x \subseteq Z \cap G_y = Z_y .$$

Vychází $Z_x \subseteq Z_y$ a ovšem též $Z_y \subseteq Z_x$, takže máme

$$Z_x = Z_y \quad \forall G_x, G_y \in \Gamma_E .$$

ošli jsme k výsledku:

Všechny stabilizátory v E mají s centrem grupy G týž průnik. Tento průnik je invariantní podgrupa v G a současně je invariantní podgrupou v každém stabilizátoru.

5. Nechť H je podgrupa v G: $H \subseteq G$. Připomeňme, že normalizátorem grupy H v G rozumíme největší podgrupu $\mathcal{N}H \subseteq G$, v níž H je invariantní:

$$\mathcal{N}H = \{\nu \in G;\ \nu H \nu^{-1} = H\}.$$

Zřejmě je

(8) $$\mathcal{N}H \supseteq H .$$

Nechť H', H ($\subseteq G$) jsou podgrupy v G a $H' = \omega H \omega^{-1}$ ($\omega \in G$). Pak

(9) $$\mathcal{N}H' = \omega \mathcal{N}H \omega^{-1}.$$

Důkaz. Pro $\nu' \in \mathcal{N}H'$ máme

$$\omega H \omega^{-1} = H' = \nu'^{-1} H' \nu' = \nu'^{-1}(\omega H \omega^{-1})\nu' = (\nu'^{-1}\omega)\, H(\omega^{-1}\nu')$$

a odtud plyne

$$H = (\omega^{-1}\nu'^{-1}\omega)\, H\, (\omega^{-1}\nu'\omega),$$

takže

$$\omega^{-1}\nu'\omega \in \mathcal{N}H,$$

$$\nu' \in \omega \mathcal{N}H\omega^{-1},$$

a vychází $\mathcal{N}H' \subseteq \omega \mathcal{N}H\omega^{-1}$. Odtud obdržíme záměnou ω za ω^{-1} a H' za H: $\mathcal{N}H' \supseteq \omega \mathcal{N}H\omega^{-1}$. □

6. Vraťme se k úvahám o stabilizátorech.

Označujeme:

Γ_E množinu všech stabilizátorů v E (jako výše)

g zobrazení $E \to \Gamma_E$: $g(x) = G_x$ $\forall x \in E$

ς ekvivalenci příslušnou k zobrazení g, tedy:

$$x, y \in E,\ x \equiv y\ (\varsigma) \Leftrightarrow g(x) = g(y) .$$

Dále označujeme:

K_x $\forall x \in E$ onu třídu mod ς, která obsahuje x, tedy

$$z \in K_x \Leftrightarrow G_z = G_x \Leftrightarrow x \in K_z \quad (K_x, K_z \subseteq E)$$

1. Pro $x \in E$ je K_x obraz prvku x vytvořený normalizátorem $\mathcal{N}G_x$

(10) $$K_x = \mathcal{N}G_x * x \qquad \forall x \in E$$

Důkaz. Pro $\nu \in \mathcal{N}G_x$ a $z = \nu * x$ máme

$$G_z = G_{\nu * x} = \nu \cdot G_x \nu^{-1} = G_x \Rightarrow z \in K_x ,$$

takže

$$\mathcal{N}G_x * x \subseteq K_x .$$

Dále máme pro $z \in K_x$ a pro libovolný transformátor $\omega \in G$ prvku x do z $(= \omega * x)$: —.

$$G_z = G_x \Rightarrow \omega \cdot G_x \omega^{-1} = G_x \Rightarrow \omega \in \mathcal{N}G_x \Rightarrow z \in \mathcal{N}G_x * x ,$$

takže

$$K_x \subseteq \mathcal{N}G_x * x .$$

S použitím tohoto výsledku se snadno odvodí :

2. Pro $x \in E$ je K_x obraz prvku x vytvořený faktorovou grupou $\mathcal{N}G_x / G_x$:

$$K_x = \mathcal{N}G_x / G_x * x ,$$

a zobrazení $k_x : K_x \to \mathcal{N}G_x / G_x$ definované vzorcem

$$k_x(z) = \bar{z} \ (\in \mathcal{N}G_x / G_x) , \quad \bar{z} * x = z \ \forall z \in K_x$$

je bijektivní.

Pokud jde o obrazy tříd mod $\mathcal{G}$, vytvořené operátory $\omega \in G$, platí

3. Obraz třídy K_x vytvořený operátorem $\omega \in G$ je třída $K_{\omega * x}$:

$$\omega * K_x = K_{\omega * x} \qquad \forall x \in E \ \text{ a } \forall \omega \in G .$$

Důkaz. Pišme pro okamžik $y = \omega * x$. Podle (7) a (9) máme

$$\mathcal{N}G_y = \omega \cdot \mathcal{N}G_x \omega^{-1}$$

a dále, podle (10) a (1)

$$K_{\omega * x} = \mathcal{N}G_y * y = \omega \cdot \mathcal{N}G_x \omega^{-1} * (\omega * x) = \omega * (\mathcal{N}G_x * x) . \quad \square$$

Podle přecházející věty 3 je množina tříd mod $\mathcal{G}$, $E/\mathcal{G} (= \{ K_x ; x \in E \})$ invariantní vzhledem ke grupě G. Tedy grupa G operuje v $E/\mathcal{G}$. Ona věta dále ukazuje, že každá třída K_x přejde vhodným operátorem $\omega \in G$ do kterékoli třídy K_y (a sice libovolným transformátorem prvku x do y), takže grupa G operuje v $E/\mathcal{G}$ tranzitivně. T[illegible]

$$(E/\mathcal{G} , G; \alpha_{\mathcal{G}}) \text{ je homogenní prostor;}$$

přitom je ovšem $\alpha_{\mathcal{G}}(\omega)(K_x) = K_{\omega * x}$ $\forall \omega \in G$ a $\forall K_x \in E/\mathcal{G}$.

7. Podle (8) máme

$$\mathcal{N}G_x \supseteq G_x \quad \forall x \in E .$$

Když pro některý prvek $y \in E$ je $\mathcal{N}G_y = G_y$, pak je $K_y = \mathcal{N}G_y * y = G_y * y = y (= \{y\})$, tedy $K_y = y$, a odtud vidíme, že prvek y je stabilizátorem G_y jednoznačně určen. Naopak, z $K_y = y$ plyne $y = \mathcal{N}G_y * y$, tedy $\mathcal{N}G_y \subseteq G_y$, a vychází $\mathcal{N}G_y = G_y$.

Ukážeme:

Když některý stabilizátor v prostoru $\mathbb{E}$ splývá se svým normalizátorem, pak každý stabilizátor v $\mathbb{E}$ splývá se svým normalizátorem

Vskutku, nechť pro některý prvek $y \in E$ je $\mathcal{N}G_y = G_y$. Pak pro každý prvek $x \in E$ a libovolný transformátor ω prvku y do x ($\omega * y = x$) máme (podle (7)) $G_x = \omega G_y \omega^{-1}$, a dále (podle (9))

$$\mathcal{N}G_x = \omega \mathcal{N}G_y \omega^{-1} = \omega G_y \omega^{-1} = G_x . \quad \square$$

V přehledu vidíme:

Zobrazení $\mathcal{G}: E \to \Gamma_{\mathbb{E}}$, $\mathcal{G}(x) = G_x$

je buď injektivní, a pak každý prvek $x \in E$ je svým stabilizátorem jednoznačně určen, nebo není injektivní, a pak žádný prvek $x \in E$ není svým stabilizátorem jednoznačně určen.

V prvním případě nazýváme prostor $\mathbb{E}$ normální.

Zejména vidíme, že v normálním prostoru $\mathbb{E}$ mají množiny E a $\Gamma_{\mathbb{E}}$ stejná kardinální čísla.

8. Bloky. Teorie bloků, kterou nyní vyvineme, má svůj původ v oboru diferenciálních rovnic. Vskutku, v úvahách o diferenciálních lineárních rovnicích 2. řádu zavedli jsme bloky jako jisté množiny těchto rovnic, kovariantně spjaté s jednou, libovolně zvolenou, tzv základní rovnicí a. Zejména jsme zjistili, že blok vzhledem k a obsahující libovolnou rovnici x, je obraz této rovnice vytvořený grupou disperzí (stabilizátoren) základní rovnice a.

Tento pojem bloků nyní zobecníme na bloky v homogenních prostorech s operátory a vyvineme příslušnou teorii.

Při zápisu svých úvah se přidržujeme těchto zásad:

Když množina X obsahuje prvek c, označujeme ji též X^c.

Když $(\emptyset \neq) X \subseteq G$ popř. když $\bar{X}$ je neprázdný systém podmnožin v (
značíme

$$X^- = \{\xi^{-1}; \xi \in X\}, \quad \bar{X}^- = \{X^-; X \in \bar{X}\},$$

a množiny X, X^- popř. $\bar{X}, \bar{X}^-$ nazýváme reciproké.

Nuže, vraťme se k úvahám o prostoru $\mathbb{E}$ a k dřívějšímu označení.

Zvolme libovolně, ale pevně, prvek $a \in E$ (tzv. základní prvek).

V odst. 3. jsme již hovořili o levých a pravých třídách vzhle(
ke grupě G_a. Kvůli jednoduchosti, přívlastek "vzhledem ke grupě G_a"
příležitostně vypouštíme a podobně si počínáme i v jiných podobnýc!
a přípustných případech.

Především připomeňme, že levá (pravá) třída obsahující operáto:
$\omega \in G$ je podmnožina v G,

$$\bar{x}_a^{\omega} = \omega G_a ; \quad (\bar{y}_a^{\omega} = G_a \omega).$$

Z teorie grup známe vztahy

$$\bar{x}_a^{\omega} = (\bar{y}_a^{\omega^{-1}})^- ; \quad \bar{y}^{\omega} = (\bar{x}_a^{\omega^{-1}})^-$$

a víme, že množina všech levých (pravých) tříd je rozklad grupy G, tzv. levý (pravý) rozklad vzhledem ke G_a, $\bar{A}_a$ $(\bar{B}_a)$. Zejména je

(11) $$G_a \in \bar{A}_a ; \quad G_a \in \bar{B}_a$$

a rozklady $\bar{A}_a$ a $\bar{B}_a$ jsou reciproké:

(12) $$\bar{A}_a^- = \bar{B}_a ; \quad \bar{B}_a^- = \bar{A}_a .$$

Z úvah v odst. 3.3 plyne

$$\bar{x}_a^{\omega} = T(a,x),\ x = \omega * a ; \quad \bar{y}_a^{\omega} = T(y,a),\ y = \omega^{-1} * a ;$$

odtud vidíme, že rovnost obrazů (vzorů) prvku a vytvořených dvěma levými (pravými) třídami implikuje rovnost těchto tříd.

Protože prostor $\mathbb{E}$ je homogenní, platí (3). Odtud vyplývá, že každý prvek $x \in E$ je obrazem (vzorem) prvku a vytvořeným některou levou (pravou) třídou. Důsledek:

(13) $$\bar{A}_a * a = E = \bar{B}_a * a .$$

9. Z teorie rozkladů množin [1] víme, že rozklady $\bar{A}_a$ a $\bar{B}_a$ jednozn:

ně určují další dva rozklady grupy G,

$$\overline{U}_a = [\overline{A}_a, \overline{B}_a], \quad \overline{V}_a = (\overline{A}_a, \overline{B}_a),$$

tzv. nejmenší společný zákryt a největší společné zjemnění rozkladů $\overline{A}_a$, $\overline{B}_a$.

Rozklad $\overline{U}_a$ ($\overline{V}_a$) je zjemnění (zákryt) každého společného zákryt (zjemnění) rozkladů $\overline{A}_a$, $\overline{B}_a$.

Konstruktivně jsou tyto rozklady definovány takto:

$\overline{U}_a$: Každý prvek $\overline{u} \in \overline{U}_a$ je sjednocením jistých levých a současn jistých pravých tříd vzhledem ke G_a, přičemž jsou každé dvě třídy $\overline{x} \in \overline{A}_a$, $\overline{y} \in \overline{B}_a$ ležící v $\overline{u}$ incidentní: $\overline{x} \subseteq \overline{u} \supseteq \overline{y} \Rightarrow \overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$.

$\overline{V}_a$: Každý prvek $\overline{v} \in \overline{V}_a$ je neprázdným průnikem některých dvou tříd $\overline{x} \in \overline{A}_a$, $\overline{y} \in \overline{B}_a$: $\overline{v} = \overline{x} \cap \overline{y}$ ($\neq \emptyset$).

Rozklad $\overline{U}_a$ má pro další úvahy důležitý význam. Proto především připomeneme nebo odvodíme některé jeho vlastnosti, užitečné pro naše účele.

Prvky rozkladu $\overline{U}_a$ nazýváme pásy a rozklad $\overline{U}_a$ pásový rozklad vzhledem ke grupě G_a. Všimněme si, že rozklad $\overline{U}_a$ je základním prvkem a jednoznačně určen

Ze vztahů (11) vychází

(14) $$G_a \in \overline{U}_a .$$

Vezměme v úvahu libovolný pás $\overline{u} \in \overline{U}_a$.

Z jeho definice a z toho, že rozklady $\overline{A}_a$ a $\overline{B}_a$ jsou reciproké pl že množina $\overline{u}^-$ je rovněž pásem rozkladu $\overline{U}_a$ a sice, při podrobnějším označení ($\overline{u} = \overline{u}_a$):

$$(\overline{u}_a^{\omega})^- = \overline{u}_a^{\omega^{-1}} \in \overline{U}_a .$$

Odtud vychází:

$$\overline{U}_a^- = \overline{U}_a .$$

Důležitý je vzorec [1]

(15) $$\overline{u}_a^{\omega} = G_a \omega G_a \quad (\overline{u}_a^{\omega} \in \overline{U}_a, \ \omega \in G).$$

Z něj zejména vidíme, že každé dva operátory $\omega_1, \omega_2 \in \overline{u}$ jsou vázány vztahem $\omega_1 \xi_1 = \xi_2 \omega_2$; $\xi_1, \xi_2 \in G_a$; a naopak, jsou-li operátory

$\omega_1, \omega_2 \in G$ vázány tímto vztahem a $\xi_1, \xi_2 \in G_a$, pak leží v témže pásu $\bar{u} \in \bar{U}_a$.

Množina všech levých (pravých) tříd vzhledem ke G_a, ležících pásu $\bar{u}$, je rozklad množiny $\bar{u}$; nazýváme jej levý (pravý) rozklad pás $\bar{u}$ a označujeme $\bar{u}/\bar{A}_a$ ($\bar{u}/\bar{B}_a$).

Máme tedy z definice:

$$\bar{u}/\bar{A}_a = \{\bar{x} \in \bar{A}_a \; ; \; \bar{x} \subseteq \bar{u}\} \; ; \quad \bar{u}/\bar{B}_a = \{\bar{y} \in \bar{B}_a \; ; \; \bar{y} \subseteq \bar{u}\}$$

a dále, podle (12):

$$(16) \qquad (\bar{u}/\bar{A}_a)^- = \bar{u}^-/\bar{B}_a \; ; \; (\bar{u}/\bar{B}_a)^- = \bar{u}^-/\bar{A}_a \, .$$

Je zřejmé, že z incidence levých (pravých) rozkladů na pásech $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{U}_a$ plyne jejich rovnost.

Množina levých (pravých) rozkladů na pásech $\bar{u} \in \bar{U}_a$ je rozklad množiny $\bar{A}_a$ ($\bar{B}_a$); nazýváme jej pásový zákryt rozkladu $\bar{A}_a$ ($\bar{B}_a$) a označujeme $\bar{\bar{A}}_a$ ($\bar{\bar{B}}_a$). Každý prvek $\bar{\bar{a}}_{\bar{u}} \in \bar{\bar{A}}_a$ ($\bar{\bar{b}}_{\bar{u}} \in \bar{\bar{B}}_a$) je tedy množin levých (pravých) tříd vzhledem ke G_a, jejichž sjednocením je $\bar{u}$.

Máme tedy podle definice

$$\bar{\bar{A}}_a = \{\bar{u}/\bar{A}_a \; ; \; \bar{u} \in \bar{U}_a\} \; ; \quad \bar{\bar{B}}_a = \{\bar{u}/\bar{B}_a \; ; \; \bar{u} \in \bar{U}_a\} \, ,$$

a dále, podle (16):

$$\bar{\bar{A}}_a^- = \bar{\bar{B}}_a \; ; \quad \bar{\bar{B}}_a^- = \bar{\bar{A}}_a \, .$$

10. Definice a vlastnosti bloků. Bloky určené prvkem a jsou části množiny E přiřazené jistým způsobem k pásům rozkladu $\bar{U}_a$. Rozeznává levé a pravé bloky.

Nechť $\bar{u} \in \bar{U}_a$.

Připomeňme: Pás $\bar{u}$ je sjednocením jistých levých tříd $\bar{x}_a (\subseteq \bar{u})$ současně je sjednocením jistých pravých tříd $\bar{y}_a (\subseteq \bar{u})$. Každá levá třída $\bar{x}_a$ transformuje prvek a na jeho obraz $x = \bar{x}_a \times a$ ($\in E$) a každá pravá třída $\bar{y}_a$ transformuje jistý vzor $y \in E$ prvku a na tento prve $\bar{y}_a \times y = a$.

Nuže:

Levý (pravý) blok pásu $\bar{u}$, $A_{\bar{u}}$ ($B_{\bar{u}}$), je množina obrazů (vzorů prvku a vytvořených levými (pravými) třídami vzhledem ke G_a ležícími pásu u.

$A_{\bar u} = \{\bar x * a ;\ \bar x \in \bar u/\bar A_a\}$; $B_{\bar u} = \{\bar y^- * a ;\ \bar y \in \bar u/\bar B_a\}$.

Zřejmě je

$$A_{\bar u} \subseteq E \quad ; \quad B_{\bar u} \subseteq E \ .$$

1. *Pravý (levý) blok pásu $\bar u$ splývá s levým (pravým) blokem pásu $\bar u^-$:*

$$B_{\bar u} = A_{\bar u^-} \quad ; \quad A_{\bar u} = B_{\bar u^-} \ .$$

Důkaz stačí provést v prvním případě. Nuže, nechť $y \in B_{\bar u}$. Pak existuje pravá třída $\bar y_a \in \bar u/\bar B_a$ pro niž platí $\bar y_a * y = a$. Odtud máme $y = \bar y^- * a \in A_{\bar u^-}$ a vychází $B_{\bar u} \subseteq A_{\bar u^-}$. Obdobně odvodíme $A_{\bar u^-} \subseteq B_{\bar u}$. □

(17) Důsledek: $A_{\bar u} = (\bar u/\bar A_a) * a$; $B_{\bar u} = (\bar u^-/\bar A_a) * a$.

2. *Z incidence levých (pravých) bloků na pásech $\bar u, \bar v \in \bar U_a$ plyne rovnost těchto bloků.*

Důkaz stačí omezit na levé bloky. Nuže, nechť $x \in A_{\bar u} \cap A_{\bar v}$, $\bar u, \bar v \in \bar U_a$. Pak levá třída $\bar x$, která transformuje prvek a do x, leží v $\bar u \cap \bar v$. Vidíme, že levé rozklady na pásech $\bar u$ a $\bar v$ jsou incidentní a tedy splývají. Odtud a z (17) plyne $A_{\bar u} = A_{\bar v}$. □

Množina levých (pravých) bloků na pásech $\bar u \in \bar U_a$:

$$\bar{\bar A}_a * a = \{A_{\bar u} ;\ \bar u \in \bar U_a\} \qquad (\bar{\bar B}_a * a = \{B_{\bar u} ;\ \bar u \in \bar U_a\})$$

je podle 2. rozklad v množině E a navíc, podle (13), na množině E; nazýváme jej *levý (pravý) blokový rozklad množiny E vzhledem k a*.

Z věty 1. soudíme, že oba blokové rozklady splývají v jeden; nazýváme jej *blokový rozklad množiny E vzhledem k prvku a a značíme*

$$\bar{\bar A}_a * a = \bar E_a = \bar{\bar B}_a * a \ .$$

Poznamenejme, že z (14) plyne

(18) $$\{a\} \in \bar E_a \ .$$

Vývoj pojmu blokového rozkladu $\bar E_a$ z prvku $a \in E$ můžeme přehledně vyjádřit tímto schematem (rodokmen bloků):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & a \arrow[d, dash] & \\
 & G_a \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\bar A_a \arrow[dr, dash] & & \bar B_a \arrow[dl, dash] \\
 & \bar U_a \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\bar{\bar A}_a \arrow[d, dash] & & \bar{\bar B}_a \arrow[d, dash] \\
\bar{\bar A}_a * a = & \bar E_a & = \bar{\bar B}_a * a
\end{tikzcd}$$

11. Z věty 10.1 vidíme, že výzkum vlastností bloků můžeme bez újmy na obecnosti omezit na levé bloky. Kvůli jednoduchosti budeme v dalším nazývat levé bloky pásů $\bar{u} \in \bar{U}_a$ zpravidla *bloky vzhledem k prvku* nebo prostě *bloky*; hořejší označení $A_{\bar{u}}$ v přípustných případech zjednodušujeme na A_a nebo A.

Věty.

1. *Každý blok vzhledem k a, $A_{\bar{u}}$, je obraz prvku a vytvořený pásem $\bar{u}$*:

$$A_{\bar{u}} = \bar{u} * a .$$

Důkaz. Každý prvek $x \in A_{\bar{u}}$ je obraz prvku a vytvořený jistou levou třídou $\bar{x}_a^{\omega} \subseteq \bar{u}$, takže $x = \omega * a$, $\omega \in \bar{u}$. Odtud plyne $x \in \bar{u} * a$, takže $A_{\bar{u}} \subseteq \bar{u} * a$. Naopak, každý prvek $x \in \bar{u} * a$ je $x = \omega * a$ při vhodném $\omega \in \bar{u}$. Levá třída $\bar{x}_a^{\omega}$ leží v $\bar{u}$ a transformuje prvek a v x, takže $x \in A_{\bar{u}}$. Odtud plyne $\bar{u} * a \subseteq A_{\bar{u}}$. □

2. *Každý blok vzhledem k a, $A_{\bar{u}}$, je invariantní vzhledem ke grupě G_a*:

$$G_a * A_{\bar{u}} = A_{\bar{u}} .$$

Důkaz. Každý prvek množiny $G_a * A_{\bar{u}}$ je $x = \xi * (\omega * a) = \xi\omega * a$, při vhodných operátorech $\xi \in G_a$, $\omega \in \bar{u}$, a podle (15) je $\xi\omega \in \bar{u}$. Máme tedy $x \in \bar{u} * a = A_{\bar{u}}$ a tedy $G_a * A_{\bar{u}} \subseteq A_{\bar{u}}$. Současně je $A_{\bar{u}} = \varepsilon * A_{\bar{u}} \subseteq G_a * A_{\bar{u}}$, neboť ε je jednotkou grupy G_a. □

3. *Každý blok vzhledem k a, $A_{\bar{u}}$, je obraz každého svého prvku vytvořený grupou G_a*:

$$x_0 \in A_{\bar{u}} \Rightarrow A_{\bar{u}} = G_a * x_0 .$$

Důkaz. Vztah $G_a * x_0 \subseteq A_{\bar{u}}$ plyne bezprostředně z 2. Zbývá tedy zjistit platnost vztahu $\supseteq$.

Nuže, nechť $x \in A_{\bar{u}}$. Podle 1. existují operátory $\omega_0, \omega \in \bar{u}$ takové že

$$x_0 = \omega_0 * a , \quad x = \omega * a ,$$

a dále, podle (15), operátory $\xi, \xi_1 \in G_a$ s vlastností $\omega = \xi\omega_0\xi_1$.

Máme tedy

$x = \xi\omega_{\xi_1} * a = \xi\omega_{\xi_1}(\xi_1 * a) = \xi\omega_c * a = \xi * (\omega_c * a) = \xi * x_c \in G_a * x_c$,

a vychází $A_{\bar{u}} \subseteq G_a * x_c$. □

Protože množina všech bloků vzhledem k a , $\bar{E}_a$, je rozklad na E, leží každý prvek $x \in E$ právě v jednom bloku vzhledem k a , A_a^x. Podle platí

4. Blok A_a^x je obraz prvku x vytvořený grupou G_a :

(19) $$A_a^x = G_a * x .$$

Věta 3. má v našich úvahách, přes svou jednoduchou strukturu, důležitý význam a mohla by být postavena v čelo teorie bloků jako definice bloku. Otázka je, zda by studium algebraických prostorů s operátory našlo k zavedení této definice přirozené podněty , a zdá se málo pravděpodobné, že by na jejím základě byly objeveny bohaté souvislosti vyjádřené rodokmenem bloků.

Podle definice prostoru E , grupa G operuje tranzitivně na množině E homomorfizmem α . Odtud a poněvadž G_a je podgrupa v G a každý blok vzhledem k a, $A_{\bar{u}}$, je invariantní vzhldem ke G_a (2), plyne [4],

$$A_{\bar{u}} = (A_{\bar{u}} , G_a ; \alpha_a)$$

je homogenní podprostor v E ; α_a je restrikce homomorfizmu α na G. Nazýváme jej blokový prostor v prostoru E .

Množinu blokových prostorů v E :

$$\bar{A}_a = \{ A_{\bar{u}} ; A_{\bar{u}} \in \bar{E}_a \}$$

nazýváme blokový rozklad prostoru E vzhledem k prvku $a \in E$.

Zdůrazněme, že rozklad $\bar{A}_a$ je prvkem a jednoznačně určen.

Vezměme nyní do úvahy transformace bloků operátory prostoru E .

Nechť $\tau \in G$ a $A_a^x \in \bar{E}_a$, $x \in E$.

5. Transformací τ přejde blok A_a^x v blok $A_{\tau * a}^{\tau * x}$:

$$\tau * A_a^x = A_{\tau * a}^{\tau * x} .$$

Důkaz. Z 3. a (7) máme

$\tau * A_a^x = \tau * (G_a * x) = \tau G_a * x = \tau G_a \tau^{-1} * (\tau * x) = G_{\tau * a} * (\tau * x) = A_{\tau * a}^{\tau * x}$

Odtud plyne věta

6. Transformací τ přejde blokový rozklad množiny E vzhledem k prvku a, $\bar{E}_a$, v blokový rozklad množiny E vzhledem k prvku $\tau \cdot a$, $\bar{E}_{\tau \cdot a}$,

a její důsledek:

7. Blokový rozklad množiny E je kovariantní s transformacemi svého základního prvku operátory grupy G.

II. Orientované algebraické prostory s operátory.

12. Úvod. Model algebraického prostoru s operátory v oblasti diferenciálních rovnic, o němž jsme se zmínili v odst 1., E_0, se skládá z množiny E_t diferenciálních lineárních oscilatorických rovnic $y'' = P(t)y$ ($t \in j = (-\infty, \infty)$, $P \in C_j^{(0)}$) a z grupy fází, G, operující na množině E_0 jako grupa kummerovských transformátorů. Násobení v grupě G je dáno skládáním funkcí. Připomeňme, že fáze jsou 3-diffeomorfizmy intervalu j na j, takže každá fáze roste nebo klesá.

Prostor E_0 můžeme považovat za orientovaný a sice v tom smyslu, že každý jeho operátor (fáze) má určitý směr, tj. roste nebo klesá.

Tato situace vede k pojmu orientace obecného algebraického prostoru s operátory přisouzením určitého "směru" každému z jeho operátorů. Rozhodujícím postřehem pro definici tohoto pojmu je to, že rostoucí fáze tvoří v grupě G invariantní podgrupu s indexem 2.

13. Nyní se, vraťme se k úvahám o libovolném algebraickém prostoru s operátory, E, a k dřívějšímu označení.

Definice. Prostor E nazýváme orientovaný, když je v grupě G dána invariantní podgrupa s indexem 2, $G^{(+)}$.

Podrobněji mluvíme o orientaci grupou $G^{(+)}$ nebo kratčeji o orientaci ($G^{(+)}$).

Z této definice především vidíme, že prostor E je orientabilní právě tehdy, když jeho grupa operátorů, G, obsahuje invariantní

V dalších úvahách považujeme prostor E za orientovaný jistou podgrupou $G^{\oplus}$ ($\subset G$).

Grupa G se rozpadá na obě třídy $G^{\oplus}$ a $G^{\ominus}$ faktorové grupy $G/G^{\oplus}$,

$$G = G^{\oplus} \cup G^{\ominus} .$$

O prvcích třídy $G^{\oplus}$ ($G^{\ominus}$) pravíme, že rostou (klesají). Tím má každý operátor v prostoru E přisouzen určitý "směr".

Obecněji, každá neprázdná množina $X \subseteq G$ se rozpadá na dvě disjunktní množiny,

$$X^{\oplus} = X \cap G^{\oplus} \quad \text{a} \quad X^{\ominus} = X \cap G^{\ominus} ,$$

z nichž $X^{\oplus}$ ($X^{\ominus}$) se skládá z rostoucích (klesajících) prvků množiny X. Množinu $X^{\oplus}$ ($X^{\ominus}$) nazýváme rostoucí (klesající) část množiny X .

1. Pro násobení v G platí tato pravidla:

(i) Jednotkový operátor ε roste

(ii) Dva vzájemně inverzní operátory mají týž směr

(iii) Součin dvou operátorů téhož směru roste, kdežto součin dvou operátorů rozdílných směrů klesá

(iv) Dva vzájemně konjugované operátory mají týž směr.

Důkaz těchto tvrzení je jednoduchý a proto jej vypouštíme.

Z (iv) plyne:

2. Rostoucí (klesající) části dvou vzájemně konjugovaných množin $X, Y \subseteq G$ jsou konjugované:

$$Y = \mathfrak{O}_{\sigma} X \Rightarrow Y^{\oplus} = \mathfrak{O}_{\sigma} X^{\oplus} , \; Y^{\ominus} = \mathfrak{O}_{\sigma} X^{\ominus} \; (\sigma \in G) .$$

14. Vezmeme do úvahy libovolnou podgrupu v G, X ($\subseteq G$, $X \neq \{\varepsilon\}$).

Grupa X má vzhledem k orientaci prostoru G jistou polohu, která ovlivňuje vlastnosti podprostorů v E majících X za grupu operátorů. Zajímá nás podrobnější průzkum této situace.

Nuže, množina $X^{\oplus}$ není prázdná, neboť obsahuje jednotkový operátor ε. Navíc je $X^{\oplus}$ ($= X \cap G^{\oplus}$) podgrupa v G.

Naproti tomu, množina $X^{\ominus}$ buď není prázdná anebo je.

V prvním (druhém) případě $X^{\ominus} \neq \emptyset$ ($X^{\ominus} = \emptyset$) pravíme, že grupa X má v G obecnou (speciální) polohu a nazýváme ji obecná (speciální).

Např. grupa G je obecná, kdežto $G^{\oplus}$ je speciální.

1. Grupa X je obecná (speciální) právě tehdy, když

$$XG^{\oplus} = G \qquad (X \subseteq G^{\oplus}). \tag{20}$$

Důkaz stačí provést pro první tvrzení, neboť platnost druhého je zřejmá.

Nuže, množina $XG^{\oplus}$ zřejmě obsahuje množinu $G^{\oplus}$. Množinu $G^{\ominus}$ obsahuje (a tedy splývá s G) právě tehdy, když $X^{\ominus} \neq \emptyset$. □

2. Když grupa X je obecná, pak $X^{\oplus}$ je invariantní v X s indexem 2.

Důkaz plyne bezprostředně z druhé věty o izomorfizmu grup [4] str. 196. Podle ní je grupa $X \cap G^{\oplus}$ invariantní v X a platí $X/(X \cap G^{\oplus}) \cong G/G^{\oplus}$.

Připomeňme, že každý podprostor v $\mathbb{E}$ s grupou operátorů X, je $\mathbb{E}' = (E', X; \alpha')$, kde E' je podmnožina v E, invariantní vzhledem ke grupě X ($X * E' = E'$) a α' je restrikce homomorfizmu α na X.

3. Když grupa X je obecná, je každý podprostor v $\mathbb{E}$, mající X za grupu operátorů orientovaný podgrupou $X^{\oplus}$. Tato orientace je souhlasná s orientací prostoru $\mathbb{E}$ grupou $G^{\oplus}$, tj. $X^{\oplus} \subset G^{\oplus}$, $X^{\ominus} \subset G^{\ominus}$.

Důkaz plyne z věty 2.

4. Dvě vzájemně konjugované podgrupy $X, Y \subset G$ jsou současně obecné nebo speciální.

Důkaz plyne z věty 13.2.

5. Všechny stabilizátory v prostoru $\mathbb{E}$ jsou současně obecné nebo speciální.

Vskutku, každé dva stabilizátory v prostoru $\mathbb{E}$ jsou vzájemně konjugované. □

Tato věta ukazuje, že orientace prostoru $\mathbb{E}$ grupou $G^{\oplus}$ je dvojího druhu podle toho, zda jeho stabilizátory jsou v obecné nebo speciální poloze.

Definice. Orientaci prostoru $\mathbb{E}$ nazýváme normální (speciální), když jeho stabilizátory mají obecnou (speciální) polohu.

Mluvíme též o normálně (speciálně) orientovaném prostoru $\mathbb{E}$.

A. Speciální orientace.

15. V této části A předpokládáme, že orientace prostoru $\mathbb{E}$ (grupou $G^{\oplus}$) je speciální, takže stabilizátory v prostoru $\mathbb{E}$ jsou podgrupami v $G^{\oplus}$.

1. Každé dva prvky množiny E lze vzájemně transformovat buď jen rostoucími nebo klesajícími transformátory.

Důkaz. Z $\omega_1 * x = y = \omega_2 * x$; $x, y \in E$, $\omega_1 \in G^{\oplus}$, $\omega_2 \in G^{\ominus}$, plyne $\omega_2^{-1}\omega_1 \in G^{\ominus} \cap G_x$, a to odporuje předpokladu $G_x \subset G^{\oplus}$. □

2. Množina E se rozpadá ve dvě neprázdné disjunktní třídy E', E'' vyznačující se tím, že každé dva prvky z téže třídy lze vzájemně transformovat rostoucími transformátory, kdežto každé dva prvky z různých tříd klesajícími transformátory:

$$E = E' \cup E''; \quad E' \neq \emptyset \neq E''; \quad E' \cap E'' = \emptyset; \tag{21}$$
$$G^{\oplus} * E' = E = G^{\ominus} * E''; \quad G^{\ominus} * E' = E'' = G^{\oplus} * E''.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{R}$ je relace na E definovaná tím, že platí

$x \mathcal{R} y$ právě tehdy, když existuje rostoucí transformátor prvku x do y.

Zřejmě je $\mathcal{R}$ ekvivalence a k ní příslušný rozklad $\bar{E}$ množiny E má alespoň dvě třídy. Má-li tři, a jsou-li x', x'', x''' $(\in E)$ jejich representanti, lze např. x' (x'') transformovat do x'' (x''') vhodným klesajícím operátorem ω_1 (ω_2) a tedy také x' rostoucím operátorem $\omega_2\omega_1$ do x'''. To však odporuje předpokladu, že prvky x' a x''' leží v různých třídách rozkladu $\bar{E}$. □

3. Podle (21) jsou obě množiny E', E'' invariantní vzhledem ke grupě $G^{\oplus}$ a každá z nich je obrazem druhé vytvořeným množinou $G^{\ominus}$.

Vidíme, že $G^{\oplus}$ operuje na množině E' i na E'' homomorfizmem α_r, který je restrikcí homomorfizmu α na grupu $G^{\oplus}$, a sice transitivně, takže

$$\mathbb{E}' = (E', G^{\oplus}; \alpha_r) \quad \text{a} \quad \mathbb{E}'' = (E'', G^{\oplus}; \alpha_r)$$

jsou homogenní podprostory v $\mathbb{E}$. Nazýváme je doplňkové a pravíme, ž prostor $\mathbb{E}$ se rozpadá na doplňkové prostory $\mathbb{E}'$, $\mathbb{E}''$.

Obdobně k označení stabilizátoru prvku $x \in E$ v prostoru $\mathbb{E}$ symbol G_x, značíme G_x' (G_x'') stabilizátor prvku $x \in E'$ ($x \in E''$) v prostoru $\mathbb{E}'$.

4. Pro $x \in E'$ ($x \in E''$) je $G_x' = G_x$ ($G_x'' = G_x$).

Důkaz. Podle definice je G_x' (G_x'') množina všech operátorů v $G^{\oplus}$, které transformují prvek x v sebe. Protože $G_x \subset G^{\oplus}$, je $G_x \cap G^{\ominus} = \emptyset$, a tedy G_x' (G_x'') je množina všech operátorů v G, které transformují prv x v sebe: $G_x' = G_x$ ($G_x'' = G_x$). □

Z této věty vidíme, že každé dva stabilizátory v témže prostoru $\mathbb{E}'$ nebo $\mathbb{E}''$ jsou vzájemně konjugované přes rostoucí operátory, kdežto každé dva stabilizátory v různých prostorech $\mathbb{E}'$ a $\mathbb{E}'$ jsou vzájemně k gované přes klesající operátory.

Nyní se zajímáme o bloky a blokové prostory v prostoru $\mathbb{E}$.

Zvolme libovolně $a \in E$, takže při vhodném označení máme $a \in E'$.

a. Především poznamenejme, že každý pás $\bar{u} \in \bar{U}_a$ leží buď v $G^{\oplus}$ nebo v $G^{\ominus}$: $\bar{u} \subset G^{\oplus}$ nebo $u \subset G^{\ominus}$. Množina pásů, $\bar{U}_a$, se tedy rozpadá na d neprázdné disjunktní části $\bar{U}_a'$ a $\bar{U}_a''$:

$$\bar{U}_a' = \{\bar{u} \; ; \; \bar{u} \subset G^{\oplus}\}, \quad \bar{U}_a = \{\bar{u} \; ; \bar{u} \subset G^{\ominus}\},$$

a máme

$$G^{\oplus} = \cup \bar{u} \quad \forall \; \bar{u} \in \bar{U}_a' \; , \qquad G^{\ominus} = \cup \bar{u} \; \forall \bar{u} \in \bar{U}_a'' \; .$$

b. Nechť $A_{\bar{u}}$ ($\in \bar{E}_a$) je blok v prostoru $\mathbb{E}$ některého pásu $\bar{u} \in \bar{U}_a$

$$A_{\bar{u}} = \bar{u} * a \; ,$$

a

$$\mathbb{A}_{\bar{u}} = (A_{\bar{u}} \; , \; G_a \; ; \alpha_a)$$

příslušný blokový prostor v $\mathbb{E}$.

Jsou možny dva případy podle toho, zda $\bar{u} \in G^{\oplus}$ nebo $\bar{u} \subset G^{\ominus}$.

(1) $\bar{u} \subset G^{\oplus}$. V tomto případě leží prvek a v poli E', a stabilizát G_a a pás $\bar{u}$ v grupě operátorů $G^{\oplus}$ prostoru $\mathbb{E}'$. Odtud plyne, že $A_{\bar{u}}$ je blok a $\mathbb{A}_{\bar{u}}$ blokový prostor v $\mathbb{E}'$.

(ii) $\bar{u} \subset G^{\ominus}$. V tomto případě leží blok $A_{\bar{u}}$ v $\mathbb{E}''$ a (podle 11.2) je invariantní vzhledem ke stabilizátoru G_a, který je podgrupou v grupě operátorů $G^{\oplus}$ prostoru $\mathbb{E}''$. Odtud plyne, že $A_{\bar{u}}$ je podprostor v $\mathbb{E}''$.

V přehledu vidíme, že každý blokový prostor v $\mathbb{E}$ je buď blokovým prostorem v $\mathbb{E}'$ nebo podprostorem v $\mathbb{E}''$.

c. Stabilizátory v blokovém prostoru $A_{\bar{u}}$ v $\mathbb{E}'$ jsou právě průniky grupy G_a se stabilizátory $G_x (\in \Gamma_E)$ prvků $x \in A_{\bar{u}}$: $G_a \cap G_x$ $\forall\, x \in A_{\bar{u}}$.

B. Normální orientace.

16. V této části $\mathbb{E}$ předpokládáme, že orientace prostoru $\mathbb{E}$ (grupou $G^{\oplus}$) je normální, takže stabilizátory v $\mathbb{E}$ obsahují klesající prvky.

1. Každé dva prvky množiny E lze vzájemně transformovat jak rostoucími tak i klesajícími transformátory :

(21) $$G^{\oplus} * E = E = G^{\ominus} * E \,.$$

Důkaz. Nechť $x,\, y \in E$. Protože prostor $\mathbb{E}$ je homogenní, existuje transformátor $\omega \in G$ prvku x do y, a podle (6) je

$$T(x,y) = \omega G_x = \omega G_x^{\oplus} \cup \omega G_x^{\ominus}$$

Z předpokladu, že orientace prostoru E je normální, plyne existence operátoru $\sigma \in G_x^{\ominus}$, a hořejší vzorec ukazuje, že spolu s ω i operátor $\omega\sigma$ transformuje prvek x do y. Avšak transformátory ω a $\omega\sigma$ mají rozdílné směry.

2. Vezměme do úvahy libovolný blokový prostor v $\mathbb{E}$, jehož polem je blok $A_{\bar{u}}$ některého pásu $\bar{u} \in \bar{U}_a$, a grupou operátorů stabilizátor $G_a (\in \Gamma_E)$ operující na $A_{\bar{u}}$ homomorfizmem α_a (restrikcí α na G_a),

$$\mathbb{A}_{\bar{u}} = (A_{\bar{u}}\,,\ G_a\,;\,\alpha_a)\,.$$

Podle předpokladu má G_a v grupě G obecnou polohu. Odtud plyne (14.3), že prostor $\mathbb{A}_{\bar{u}}$ je orientován grupou $G_a^{\oplus} (\subset G_a)$ souhlasně s orientací prostoru $\mathbb{E}$ grupou $G^{\oplus}$. Stabilizátory v $\mathbb{A}_{\bar{u}}$ jsou právě průniky grupy G_a se stabilizátory $G_x (\in \Gamma_{\bar{u}})$ prvků $x \in A_{\bar{u}}$: $G_a \cap G_x$.

$\forall\ x \in A_{\bar{u}}$. Protože prostor $A_{\bar{u}}$ je homogenní, jsou tyto stabilizátor vzájemně konjugované a tudíž mají v G_a současně obecnou nebo speciál polohu (14.5) podle toho, zda $G_a^{\Theta} \cap G_x \neq \emptyset$ nebo $= \emptyset$. V prvním případě lze každé dva prvky bloku $A_{\bar{u}}$ vzájemně transformovat rostoucími i klesajícími transformátory z grupy G_a (1.). V druhém případě je situa v prostoru $A_{\bar{u}}$ popsána výsledky úvah obsažených v předcházející části Zejména se prostor $A_{\bar{u}}$ rozpadá na dva doplňkové prostory $A'_{\bar{u}}$, $A''_{\bar{u}}$.

III. Prostory diferenciálních lineárních rovnic 2.řádu s grupou fázových transformátorů.

17. Úvod. Nechť $\underline{M}$ je množina všech diferenciálních lineárních rovni 2. řádu, Jacobiova tvaru, se spojitými koeficienty v intervalu $j=(-a$

$\underline{P}$ $$y'' = P(t)y \quad (P \in C_j^{(0)},\ t \in j).$$

Nejprve uvedeme některé poznatky z teorie těchto rovnic, potřebn k dalším úvahám. Značíme: $M = \{P\ ;\ P \in C_j^{(0)}\}$

a. Uvedené rovnice klasifikujeme podle počtu kořenů jejich int grálů.

Rovnice $\underline{P} \in \underline{M}$ se nazývá

(i) oscilatorická, když její integrály mají nekonečně mnoho kořenů, které se hromadí k oběma koncům intervalu j ;

(ii) polooscilatorická, když její integrály mají nekonečně mnoho kořenů, které se hromadí k jednomu konci intervalu j ;

(iii) typu m obecná (speciální), $m=1,2,\ldots$, když má integrály s m ale nikoli s m+1 kořeny a dva lineárně nezávislé integrály (jeden lineárně nezávislý integrál) s m-1 kořeny.

O rovnicích $\underline{P}, \underline{Q} \in \underline{M}$ patřících do téže třídy (i) nebo (ii) ne (iii) pravíme, že mají týž charakter.

Na množině $\underline{M}$ máme tedy rozklad $\bar{\underline{M}}$ na spočetně mnoho tříd:

$$\bar{\underline{M}} = \{\underline{M}_0, \underline{M}_{10}, \underline{M}_{1o}, \underline{M}_{1s}, \underline{M}_{2o}, \underline{M}_{2s}, \ldots\}$$

přičemž značí:

$\underline{M}_o$ třídu rovnic oscilatorických

$\underline{M}_{pc}$ " " polooscilatorických

$\underline{M}_{m,o}$ " " typu m obecných

$\underline{M}_{m,s}$ " " typu m speciálních $(m=1,2,\ldots)$

b. Vedle množiny $\underline{M}$ vezměme do úvahy grupu fází, G, a Kummerovu rovnici

(KQ) $$-\{\omega,t\} + P(\omega(t))\omega'^2(t) = Q(t). \quad (P,Q \in \underline{M};\ t \in j)$$

Uvažujme libovolnou třídu $\underline{E} \in \underline{\underline{M}}$.

Zvolme $\omega \in G$. Nechť $\underline{P} \in \underline{E}$. Funkce $Q(\in C_j^{(0)})$, která je výsledkem transformace nosiče P rovnice $\underline{P}$ fází ω ve smyslu rovnice (PQ), je nosič jistá rovnice $\underline{Q} \in \underline{M}$, a z teorie diferenciálních rovnic víme, že $\underline{Q} \in \underline{E}$. Rovnici $\underline{Q}$ nazýváme kummerovským obrazem rovnice $\underline{P}$ vytvořeným fází ω a píšeme

$$\omega * \underline{P} = \underline{Q}.$$

Současně je libovolná rovnice $\underline{Q}' \in \underline{E}$ kummerovským obrazem rovnice $\underline{P}' = \omega^{-1} * \underline{Q}' (\in \underline{E})$ vytvořeným touž fází ω. Vidíme, že fáze ω jednoznačně určuje bijekci množiny $\underline{E}$ do sebe, $\varphi_\omega = \mathcal{G}(\underline{E})$, v níž každé rovnici $\underline{P} \in \underline{E}$ odpovídá rovnice $\omega * \underline{P}\ (=\underline{Q})$: $\varphi_\omega(\underline{P}) = \omega * \underline{P}$.

18. Nechť $\alpha: G \to \mathcal{G}(\underline{E})$; $\alpha(\omega) = \varphi_\omega$.

1. Zobrazení α je homomorfizmus grupy G do $\mathcal{G}(\underline{E})$.

Důkaz. Stačí dokázat, že

(i) je splněna podmínka smíšené asociativity:

$$\omega_1\omega_2 * \underline{P} = \omega_1 * (\omega_2 * \underline{P}) \ \forall \omega_1, \omega_2 \in G, \ \forall \underline{P} \in \underline{E},$$

(ii) jednotka grupy G, ε, je jednotkový operátor:

$$\varepsilon * \underline{P} = \underline{P} \quad \forall \underline{P} \in \underline{E}.$$

Ad (i). Nechť $\omega_1, \omega_2 \in G$, $\underline{P} \in \underline{E}$. Pak $\omega_1\omega_2 = \omega_2[\omega_1] \in G$, fáze $\omega_1\omega_2$ transformuje kummerovsky rovnici $\underline{P}$ na rovnici

(23) $$\omega_1\omega_2 * \underline{P} = \underline{R},$$

takže

$$R(t) = -\{\omega_2[\omega_1], t\} + P[\omega_2(\omega_1(t))][\omega_2(\omega_1(t))]'^2$$

Pravidlo pro výpočet schwarzovské derivace složené funkce ([2], str) dává

$$\{\omega_2(\omega_1), t\} = \{\omega_2, \omega_1(t)\}.\omega_1'^2(t) + \{\omega_1, t\} ,$$

takže

(24) $$P(t) = -\{\omega_2, \omega_1(t)\}.\omega_1'^2(t) - \{\omega_1, t\} + P[\omega_2(\omega_1(t))]\omega_2'^2(\omega_1(t))\omega_1'^2$$
$$= -\{\omega_1, t\} + [-\{\omega_2, \omega_1(t)\} + P[\omega_2(\omega_1(t))] . \omega_2'^2(\omega_1(t))]\omega_1'^2(t)$$

Označme

(25) $$\omega_2 * P = Q ,$$

takže máme

$$Q(t) = -\{\omega_2, t\} + P(\omega_2(t)).\omega_2'^2(t) ,$$

a dále

$$Q(\omega_1(t)) = -\{\omega_2, \omega_1(t)\} + P[\omega_2(\omega_1(t))]\omega_2'^2(\omega_1(t)) .$$

Z (24) tedy plyne

$$R(t) = -\{\omega_1, t\} + Q(\omega_1(t)).\omega_1'^2(t)$$

neboli

(26) $$R = \omega_1 * Q .$$

Z (23),(26),(25) vychází (i).

Ad (ii). Máme zjistit platnost rovnice

$$-\{\varepsilon, t\} + P(\varepsilon(t)).\varepsilon'^2(t) = P(t) \qquad (t \in j).$$

To je zřejmé, neboť $\varepsilon = id_j$: $\varepsilon(t) = id_j(t) = t$. □

Předcházející věta vyjadřuje, že na množině $\underline{E}$ operuje grupa G homomorfizmem α, takže

$$\underline{\underline{E}} = (\underline{E}, G ; \alpha)$$

je algebraický prostor s operátory.

Prostor $\underline{\underline{E}}$ je homogenní, protože každé dvě rovnice z množiny $\underline{E}$ (mají týž charakter a proto je) lze kummerovsky vzájemně transformovat, a je normální, protože každá rovnice z množiny $\underline{M}$ a tedy též z množiny $\underline{E}$ je svou grupou disperzí jednoznačně určena [3].

Prostor $\underline{\underline{E}}$ je orientovaný grupou rostoucích fází. Tato orientace je v případě $\underline{E} \neq \underline{M}_{\mu o}$ normální, protože grupa disperzí každé rovnice z množiny $\underline{E}$ obsahuje rostoucí i klesající disperze, kdežto v případě $\underline{E} = \underline{M}_{\mu o}$ je ona orientace speciální, protože pak všechny disperze každé rovnice z množiny $\underline{E}$ rostou [2], [5].

Tyto výsledky shrnuje věta

2. Prostor $\underline{E}$ je homogenní normální prostor s operátory a je orientován grupou rostoucích fází. Tato orientace je v případě $\underline{E} \neq \underline{M}_{jc}$ normální a v případě $\underline{E} = \underline{M}_{j\omega}$ speciální. V případě $\underline{E} = \underline{M}_{j\omega}$ se prostor $\underline{E}$ rozpadá na dva doplňkové prostory.

Literatura

[1] O. Borůvka: Groupoids and groups (1974)

[2] Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967)

[3] Linear Differential Transformations of the Second Order (1971)

[4] P. Dubreil - M.L. Dubreil-Jacotin : Leçons d'algèbre moderne (1964)

[5] F. Neuman : Linear Differential Equations (v tisku)

6.9.1987

Algebraické prostory s operátory a jejich realizace diferenciálními rovnicemi. II.

Úvod. Tento seminární text navazuje na mé dřívější úvahy o algebraických prostorech s operátory a jejich realizacích diferenciálními rovnicemi, a zejména na seminární text 1987. V něm jsem zejména uvedl, že objev modelu algebraického prostoru s operátory v oboru diferenciálních rovnic má významné důsledky pro další vývoj jak teorie /abstraktních/ algebraických prostorů s operátory tak i teorie diferenciálních rovnic, protože umožňuje přenášet poznatky z obou teorií, které se vyvíjely na sobě nezávisle, z jedné na druhou. Vycházeje z této myšlenky, rozšířil jsem v textu 1987 teorii algebraických prostorů o teorii bloků, vyvinutou původně pro diferenciální rovnice, a o popis vlastností tzv. orientovaných algebraických prostorů s operátory.

V tomto textu 1988, vycházím od klasických pojmů algebraických ke studiu dalších vlastností algebraických prostorů s operátory a docházím k široké otevřené problematice, která hluboko zasahuje do oboru diferenciálních rovnic. Ve svých úvahách opírám se zejména o knihu [1] : P. Dubreil - M.L.Dubreil-Jacotin, Leçons d'Algèbre moderne, Dunod, Paris 1964.

I. Výchozí situace.

1. Základy. Uvažujme

$$\mathbf{E} = (E, G; \alpha)$$

algebraický prostor s operátory o složkách $E, G; \alpha$. E je pole prostoru $\mathbf{E}$, G je grupa, tzv. obor operátorů prostoru $\mathbf{E}$, a α je homomorfizmus grupy G do grupy bijekcí $S(E)$ množiny E na sebe /v. text 1987/. Pravíme, že grupa G operuje na E homomorfizmem α. Když α nevystu puje v r šich úvahách explicitně, spokojujeme se s vědomím jeho existenc a píšeme stručněji $\mathbb{E}=(E,G)$.

Pro $\forall x\in E$ a $\forall \omega\in G$ píšeme

$$\alpha(\omega)=\varphi_\omega \ (\in S(E)) \ ; \ \alpha(\omega)(x)=\varphi_\omega(x)=\omega * x \ (=y\in E).$$

V literatuře se často používá tzv. multiplikativního označení, tj. místo $\omega * x$ se píše ωx . Zde pořadí(řeckého) operátoru ω před (latinským) $x\,(\in E)$ naznačuje, že jde o prvek $\omega * x$.

Když $\varphi_\omega(x)=y$, pravíme, že ω transformuje prvek x do y a operátor $\omega\ (\in G)$ nazýváme transformátor prvku x do y. Jenotku grupy G označujeme ε a ~~jednotku~~ grupy $S(E)$ označujeme I_E .

Připomeňme, že platí vzorce:

(1) $$\omega_1\omega_2 * x = \omega_1 *(\omega_2 * x) \ \ \forall x\in E \ \text{ a } \ \forall \omega_1,\omega_2\in G$$
(smíšená associativita)

(2) $$\varepsilon * x = x \quad \forall x\in E$$
(ε je jednotkový operátor),

které vyjadřují nutnou a dostatečnou podmínku, aby grupa G operovala na množině E .

Je užitečné vzorce (1) a (2) zobecnit takto :

Definujeme:

$$\varphi_{G'}(X) = G' * X = \{\omega * x;\ x\in X,\ \omega\in G'\} \ (=Y) \ ,$$

pro

$$X\subseteq E,\ Y\subseteq E:\quad G'\subseteq G .$$

a nazýváme:

X je vzor množiny Y v zobrazení množinou G' ,

Y je obraz " X " " " " ,

G' je transformátor množiny X do Y

Pak platí vzorce zobecňující (1) a (2) :

(1') $$G'G'' * X = G' *(G'' * X) \quad \forall X\subseteq E \ \text{ a } \ G',G''\subseteq G$$

(2') $$\varepsilon * X = X \quad \forall X\subseteq E .$$

Důkaz jejich platnosti plyne s použitím vzorců (1) a (2) snadno z toho, že každý prvek v množině v-levo je prvekm množiny v-pravo a naopak.

2. Trajektorie. Nechť $x \in E$ a $(\emptyset \neq) G' \subseteq G$. Množina $G' * x$ $(\subseteq E)$ se nazývá trajektorie prvku x vytvořená množinou G', stručněji: trajektorie prvku x nad G'. Hovoříme také o trajektorii v prostoru E. Obvykle se zajímáme o trajektorie vytvořené podgrupou grupy G.

Nechť v dalším značí G' podgrupu v G.

Snadno se dokáží tyto věty:

1. Každé dvě incidentní trajektorie nad G' splývají.
2. Množina trajektorií nad G' je rozklad množiny E.
3. Každý operátor $\tau \in G$ transformuje trajektorii $G' * x$ v trajektorii nad $\tau G' \tau^{-1}$: $\tau G' \tau^{-1} * (\tau * x)$.

Vskutku, podle (1') máme

$$\tau * (G' * x) = \tau G' * x = \tau G' \tau^{-1} * (\tau * x). \qquad \square$$

Poznamenejme, že homogenní prostor E je charakterizován tím, že existuje právě jedna trajektorie vytvořená grupou G a sice $G * x = E \ \forall x \in E$.

3. Invariantní množiny. Množina $(\emptyset \neq) E' \subseteq E$ se nazývá invariantní vzhledem k G', když $\omega' * E' = E' \ \forall \omega' \in G'$, tj.

$$G' * E' = E'.$$

Věty.

1. Množina $E' (\subseteq E)$ invariantní vzhledem k G' je invariantní vzhledem ke každé podgrupě G'' grupy G'.
2. Množina E je invariantní vzhledem k G'.
3. Trajektorie nad G' každého prvku $x \in E$ je invariantní vzhledem k G'.
4. Každá množina $E' (\subseteq E)$, invariantní vzhledem k G', obsahuje trajektorii nad G' každého svého prvku.

Vskutku, z předpokladu $G' * E' = E'$ máme

$$G * x \subseteq G' * E' = E' \ \forall x \in E'. \qquad \square$$

5. E' je sjednocením trajektorií nad G' prvků ležících E'.

5. Každý operátor $\tau \in G$ transformuje každou množinu $E'(\subseteq E)$, která je invariantní vzhledem k G', v množinu $\tau * E'(\subseteq E)$ invariantní vzhledem k $\tau G' \tau^{-1}$.

Vskutku, z předpokladu $G' * E' = E'$ máme

$$\tau * E' = \tau * (G' * E') = \tau G' * E' = \tau G' \tau^{-1} * (\tau * E') . \qquad \square$$

4. Stabilizátory. Stabilizátory mají v dalších úvahách důležitý význam.

Definice. Pro každý prvek $x \in E$ je množina všech operátorů, které nechávají prvek x invariantní, grupa. Nazýváme ji stabilizátor prvku x a označujeme G_x. Hovoříme také o stabilizátorech v prostoru E.

Pojem stabilizátoru byl uveden v textu 1987 a tam byly také podrobně popsány jeho vlastnosti. Proto se zde v tomto směru spokojíme s několika poznámkami.

Jednobodová množina $\{x\}$ je invariantní vzhledem k G_x:

$$G_x * \{x\} = \{x\} \qquad \text{tj.} \qquad G_x * x = x ,$$

takže trajektorie prvku $x \in E$ nad stabilizátorem G_x se skládá z jediného prvku x .

Podle 2.3 máme pro $x \in E, \tau \in G$:

$$\tau * x = \tau * (G_x * x) = \tau G_x \tau^{-1} * (\tau * x) ,$$

a odtud plyne /porovnáním prvního a posledního členu /

$$\tau G_x \tau^{-1} \subseteq G_{\tau * x} .$$

Aplikací tohoto vzorce na prvek $\tau * x$ $(\in E)$ a operátor $\tau^{-1}(\in G)$ obdržíme

$$\tau^{-1} G_{\tau * x} \tau \subseteq G_{\tau^{-1}*(\tau * x)} = G_x ,$$

takže

$$G_{\tau * x} \subseteq \tau G_x \tau^{-1}$$

a vychází

$$G_{\tau * x} = \tau G_x \tau^{-1}.$$

Výsledek /v. text 1987/ :

V homogenním prostoru E jsou stabilizátory každých dvou prvků $x, y \in E$ vzájemně konjugované přes transformátory těchto prvků.

5. Podprostory prostoru $\mathbb{E}$. Algebraický prostor s operátory

$$\mathbb{E}' = (E', G'; \alpha')$$

nazýváme podprostor prostoru $\mathbb{E}$, a píšeme $\mathbb{E}' \subseteq \mathbb{E}$ nebp $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{E}'$, když

1° G' je podgrupa v G,

2° E' je invariantní část množiny E vzhledem k G';

3° $\alpha'(\omega')$ je restrikce bijekce $\varphi_{\omega'}$ množiny E na sebe na množinu E'.

Říkáme, že $\mathbb{E}'$ je podprostor v $\mathbb{E}$ nad G'.

Podprostor $\mathbb{E}'$ nazýváme elementární, když E' je trajektorie nad G' některého prvku $x' \in E$. Zřejmě je každý elementární (nad G') homogenní.

Vidíme, že $\mathbb{E}$ obsahuje právě ~~tolik~~ elementárních podprostorů nad G', kolik vzájemně různých trajektorií nad G' obsahuje množina E. Systém těchto elementárních podprostorů tvoří rozklad prostoru $\mathbb{E}$ v elementární podprostory nad G', tzv. elementární rozklad prostoru $\mathbb{E}$ nad G'. Když prostor $\mathbb{E}'$ je homogenní, skládá se elementární rozklad prostoru $\mathbb{E}$ nad G' z jediného prostoru $\mathbb{E}'$.

Vezměme v úvahu libovolný prostor $\mathbb{E}' = (E', G'; \alpha')$ $(\subseteq \mathbb{E})$ a libovolný operátor $\tau \in G$.

Prostor $\mathbb{E}'_\tau = (\tau * E', \tau G' \tau^{-1}; \alpha'_\tau)(\subseteq \mathbb{E})$ nazýváme obraz prostoru $\mathbb{E}'$ vytvořený operátorem τ. Zde značí α'_τ homomorfizmus grupy $\tau G' \tau^{-1}$ do grupy bijekcí množiny $\tau * E'$ na sebe, a sice je $\alpha'_\tau(\tau\omega\tau^{-1})$ restrikcí bijekce $\varphi_\tau \circ \varphi_{\omega'} \circ \varphi_{\tau^{-1}}$ $(\in S(E))$ na množinu $\tau * E'$ pro $\forall \omega' \in G'$.

Mluvíme také o transformaci prostoru $\mathbb{E}'$ na prostor $\mathbb{E}'_\tau$ transformátorem τ. Také říkáme, že prostor $\mathbb{E}'_\tau$ je ekvivalentní s prostorem $\mathbb{E}'$ přes τ.

Podle této definice přejde každým transformátorem $\tau \in G$ každý elementární podprostor prostoru $\mathbb{E}$ nad G' v elementární po prostor nad $\tau G' \tau^{-1}$, a elementární rozklad prostoru $\mathbb{E}$ nad G' přejde v elementární rozklad nad $\tau G' \tau^{-1}$. Když podgrupa G' je v G normální, pak $\tau G' \tau^{-1} = G'$ $\forall \tau \in G$ a tedy elementární rozklad prostoru $\mathbb{E}$ nad G' je týž při transformaci každým operátorem $\tau \in G$.

6. Izomorfní prostory. Nechť $\mathbb{E} = (E,G)$ a $\mathbb{E}' = (E', G')$ jsou libovolné (čárkované označení nemá nic společného s přecházejícími úvahami) homogenní prostory s operátory. Ke každému $\omega \in G$ existuje tedy bijekce φ_ω množiny E na sebe a rovněž ke každému $\omega' \in G'$ existuje bijekce $\varphi'_{\omega'}$ množiny E' na sebe.

Předpokládejme, že prostory $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ jsou v těchto vztazích:

Existuje *surjektivní* zobrazení σ množiny E na E' a homomorfní zobrazení h grupy G do G' splňující podmínku

(3) $$\sigma \circ \varphi = \varphi' \circ \sigma,$$

jejíž význam je tento:

(3') $$\sigma(\varphi_\omega(x)) = \varphi'_{h(\omega)}(\sigma(x)) \quad \forall x \in E \text{ a } \forall \omega \in G.$$

Pak pravíme, že *prostor* $\mathbb{E}'$ *je homomorfní s prostorem* $\mathbb{E}$.

Jestliže navíc zobrazení σ je injektivní a tedy je bijekcí množiny E na E', a současně h je izomorfizmus grupy G na G', nazýváme prostor $\mathbb{E}'$ *izomorfní* s $\mathbb{E}$.

Podmínka (3) se znázorňuje diagramem :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\sigma \\ E' & \xrightarrow{\varphi'} & E' \end{array}$$

a nazývá se *podmínka záměnitelnosti zobrazení*.

7. Přehled. Hořejší úvahy a text 1987 tvoří základ teorie algebraických prostorů s operátory a představují účinný nástroj k dalšímu výzkumu v tomto směru. Současně, při vhodné interpretaci, zasahují tyto úvahy hluboko do teorie diferenciálních rovnic, popisujíce globální vlastnosti jacobiovských lineárních rovnic 2. řádu. Připomeňme, že model algebraického prostoru s operátory v oboru diferenciálních rovnic, o němž je řeč již v úvodu tohoto textu, se skládá ze třídy E_0 globálně ekvivalentních jacobiovských rovnic na intervalu $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a z grupy fází $\mathfrak{G}_0$, jakožto grupy operátorů; přitom Kummerova rovnice vyjadřuje příslušný homomorfizmus. Připomeňme, že na tomto modelu jsou stabilizátory realizovány grupami disperzí, a trajektorie

vytvořené prvky pásového rozkladu představují bloky diferenciálních rovnic.

Následující kapitola ukazuje cestu k dalšímu výzkumu vlastností algebraických prostorů s operátory zmíněných realizací a vede k řadě otevřených problémů.

II. Izomorfní prostory nad stabilizátory.

8. Úvod. Vezměme do úvahy algebraický homogenní prostor s operátory $\mathbb{E} = (E,G)$.

Zvolme libovolný prvek a $(\in E)$ (výchozí prvek) a další prvek $b \in E$ $(b \neq a)$. Protože prostor $\mathbb{E}$ je homogenní, existuje transformátor τ $(\in G)$ prvku a do b: $b = \tau * a$.

Současně operátor $\tau^{-1} (\in G)$ transformuje prvek a do jistého prvku $\tau^{-1} * a = \bar{b}$ $(\in E)$, takže máme v úvaze tři prvky v E :

(1) $$a, \quad b = \tau * a, \quad \bar{b} = \tau^{-1} * a .$$

Tyto prvky jednoznačně určují tři stabilizátory v $\mathbb{E}$:

(2) $$G_a, \quad G_b = \tau G_a \tau^{-1}, \quad G_{\bar{b}} = \tau^{-1} G_a \tau .$$

Každý z nich vytvořuje 3 trajektorie v $\mathbb{E}$ a sice trajektorie prvků (1). Vstupuje tedy do našich úvah 9 trajektorií :

(3) $$\begin{array}{lll} S^a_{G_a} = G_a * a, & S^b_{G_a} = G_a * b, & S^{\bar{b}}_{G_a} = G_a * \bar{b}; \\ S^a_{G_b} = G_b * a, & S^b_{G_b} = G_b * b, & S^{\bar{b}}_{G_b} = G_b * \bar{b}; \\ S^a_{G_{\bar{b}}} = G_{\bar{b}} * a, & S^b_{G_{\bar{b}}} = G_{\bar{b}} * b, & S^{\bar{b}}_{G_{\bar{b}}} = G_{\bar{b}} * \bar{b}. \end{array}$$

Z nich se trajektorie $S^a_{G_a}$, $S^b_{G_b}$, $S^{\bar{b}}_{G_{\bar{b}}}$ zřejmě redukují každá na jeden prvek $a, b, \bar{b}$.

Věnujme pozornost dalším 6 trajektoriím v $\mathbb{E}$. Tyto určují spolu s příslušnými stabilizátory 6 elementárních podprostorů v $\mathbb{E}$:

(4) $(S^b_{G_a}, G_a)$, $(S^{\bar{b}}_{G_a}, G_a)$; $(S^a_{G_b}, G_b)$, $(S^{\bar{b}}_{G_b}, G_b)$; $(S^a_{G_{\bar{b}}}, G_{\bar{b}})$, $(S^b_{G_{\bar{b}}}, G_{\bar{b}})$

neboli

$$(S^b_{G_a}, G_a), \quad (S^{\bar{b}}_{G_a}, G_a),$$

(4′) $\quad (S^a_{\tau G_a \tau^{-1}}, \tau G_a \tau^{-1}),\ (S^b_{\tau G_a \tau^{-1}}, \tau G_a \tau^{-1});$

$\quad (S^a_{\tau^{-1} G_a \tau}, \tau^{-1} G_a \tau),\ (S^b_{\tau^{-1} G_a \tau}, \tau^{-1} G_a \tau).$

A. Mezi těmito prostory jsou některé dvojice ekvivalentní přes τ nebo τ^{-1}.

Např. prostor $(S^a_{G_{\bar b}}, G_{\bar b})$ je ekvivalentní s prostorem $(S^b_{G_a}, G_a)$ přes τ.

Vskutku,

$$(S^a_{G_{\bar b}}, G_{\bar b})_\tau = (\tau * S^a_{G_{\bar b}}, \tau G_{\bar b} \tau^{-1}) = (\tau * (G_{\bar b} * a), G_a) = (\tau * (\tau^{-1} G_a \tau * a), G_a)$$

$$= (G_a \tau * a, G_a) = (G_a * (\tau * a), G_a) = (G_a * b, G_a) = (S^b_{G_a}, G_a)$$

B. Dále jsou mezi prostory (4′) některé dvojice izomorfní.

Ukážeme, že např. prostor $(S^a_{G_{\bar b}}, G_{\bar b})$ je izomorfní s $(S^b_{G_a}, G_a)$.

Připomeňme, že tyto prostory

(5) $\quad (S^b_{G_a}, G_a), \quad (S^a_{G_{\bar b}}, G_{\bar b})$

jsou homogenní. Pro stručnost označme tyto prostory E_1 a E_2.

Situace v prostoru E_1. Každý prvek $x \in S^b_{G_a}$ je $x = \xi * b$, $\xi \in G_a$. Protože G_a operuje v $S^b_{G_a}$, existuje ke každému operátoru $\xi_0 \in G_a$ bijekce φ_{ξ_0} množiny $S^b_{G_a}$ na $S^b_{G_a}$ a v ní je ke každému prvku $x = \xi * b$ přiřazen prvek

(6) $\quad \varphi_{\xi_0}(x) = \varphi_{\xi_0}(\xi * b) = \xi_0 * (\xi * b) = \xi_0 \xi * b = \xi_0 \xi * (\tau * a) = \xi_0 \xi \tau * a \ (\in S^b_{G_a})$.

Situace v prostoru E_2. Každý prvek $x' \in S^a_{G_{\bar b}}$ je $x' = \eta * a$, $\eta \in G_{\bar b} = \tau^{-1} G_a \tau$. Protože $G_{\bar b}$ operuje v $S^a_{G_{\bar b}}$, existuje ke každému prvku $\eta_0 \in G_{\bar b}$ bijekce φ'_{η_0} množiny $S^a_{G_{\bar b}}$ na $S^a_{G_{\bar b}}$ a v ní je ke každému prvku $x' = \eta * a$ přiřazen prvek

(6′) $\quad \varphi'_{\eta_0}(x') = \varphi'_{\eta_0}(\eta * a) = \eta_0 * (\eta * a) = \eta_0 \eta * a \ (\in S^a_{G_{\bar b}})$.

Dál jsou mezi prostory E_1 a E_2 tyto vztahy:

(I) Existuje bijektivní zobrazení σ pole $S^b_{G_a}$ prostoru E_1 na pole $S^a_{G_{\bar b}}$ prostoru E_2, a sice

$$\sigma(x) = \tau^{-1} * x \quad \forall x \in S^b_{G_a}.$$

1) Ukažme především, že σ je zobrazení do množiny $S^a_{G_{\bar b}}$:

To plyne z toho, že pro každý prvek $x \in S^b_{G_a}$, $x = \xi * b$, $(\xi \in G_a)$ máme

$$\sigma(x) = \tau^{-1}*(\xi * b) = \tau^{-1}*(\xi * (\tau * a)) = \tau^{-1}\xi\tau * a \in S^a_{G_{\bar b}}$$

2) Dále je zobrazení σ surjektivní. Vskutku, každý prvek $x' = \tau^{-1}\xi\tau * a \in S^a_{G_{\bar b}}$ má vzor $\xi\tau * a = \xi * b \in S^b_{G_a}$.

3) Konečně, zobrazení σ je injektivní, neboť z rovnosti prvků vzorů $x' = \tau^{-1}\xi'\tau * a$ $(\in S^a_{G_{\bar b}})$, $x'' = \tau^{-1}\xi''\tau * a$ $(\in S^a_{G_{\bar b}})$ plyne pomocí [illegible] τ:

Z $x' = x''$ neboli $\tau^{-1}\xi'\tau * a = \tau^{-1}\xi''\tau * a$ máme $\xi'\tau * a = \xi''\tau * a$

V přehledu vidíme, že σ je bijektivní zobrazení pole prostoru $\mathbb{E}_1$ na pole prostoru $\mathbb{E}_2$.

(ii) Dále existuje izomorfní zobrazení h grupy G_a na grupu $G_{\bar b}$

(7) $$h(\xi) = \tau^{-1}\xi\tau = \eta \ (\in G_b) \ \forall \xi \in G_a .$$

(iii) Zbývá ukázat, že pro prostory $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$ je splněna podmínka $\mathrm{I}(3)$ zaměnitelnosti zobrazení.

Nuže, podle (6) máme

$$\sigma(\varphi_{\xi_0}(x)) = \tau^{-1}*(\xi_0\xi\tau * a) = \tau^{-1}(\xi_0\xi)\tau * a ,$$

a podobně, podle (6'), (7)

(8) $$\varphi'_{h(\xi_0)}(\sigma(x)) = \varphi'_{\eta_0}(\tau^{-1}*(\xi * b)) = \varphi'_{\eta_0}(\tau^{-1}\xi\tau * a) = \varphi'_{\eta_0}(\eta * a) = \eta_0\eta * a$$
$$= (\tau^{-1}\xi_0\tau)(\tau^{-1}\xi\tau) * a = \tau^{-1}(\xi_0\xi)\tau * a$$

Porovnáním vzorců (6) a (8) vychází rovnost $\mathrm{I}(3')$. □

9. Cesta k dalším výzkumům. Předcházející úvahy ukazují cestu ke studiu dalších vlastností algebraických prostorů s operátory a jejich realizací diferenciálními rovnicemi, a vedou k rozsáhlé otevřenné problematice.

Vezměme do úvahy homogenní prostor s operátory $\mathbb{E} = (E, G)$.

Předpokládejme, že v G existuje konečná cyklická grupa C řádu n (≥ 2) s generátorem τ $(\in G)$:

$$C = \{\tau, \tau^2, \dots, \tau^n = \varepsilon\}$$

Zvolme libovolný prvek $a \in E$ /výchozí prvek/. Předpokládejme

(9) $$C \cap G_a = \varepsilon .$$

Tento předpoklad zaručuje, že $\tau^i{}_* a \neq \tau^j{}_* a$ pro $i \neq j$.

Vskutku, z $\tau^i{}_* a = \tau^j{}_* a$ pro $i > j$ plyne $\tau^{i-j}{}_* a = a$ a tedy $\tau^{i-j} \in C \cap G_a = \varepsilon$, takže $\tau^i = \tau^j$.

Každý operátor τ^i $(i = 1, \ldots, n)$ transformuje prvek a v jistý prvek $\tau^i{}_* a$ $(\in E)$, takže máme n vzájemně různých prvků

(10) $$\tau_* a, \tau^2{}_* a, \ldots, \tau^n{}_* a \quad (\in E ; \tau^n{}_* a = a).$$

Tyto prvky jednoznačně určují n stabilizátorů v $\mathbb{E}$:

(11) $$G_{\tau_* a}, G_{\tau^2{}_* a}, \ldots, G_{\tau^n{}_* a} \ (G_{\tau^n{}_* a} = G_a)$$

tj.

$$\tau G_a \tau^{-1}, \tau^2 G_a \tau^{-2}, \ldots, \tau^n G_a \tau^{-n} (= G_a).$$

Každý z nich určuje n trajektorií a sice trajektorie prvků (10)

Vstupuje tedy do úvahy n^2 trajektorií, a sice

(12) $$\begin{array}{cccc} S_{G_{\tau_* a}}^{\tau_* a}, & S_{G_{\tau_* a}}^{\tau^2{}_* a}, & \ldots, & S_{G_{\tau_* a}}^{\tau^n{}_* a} \\ \vdots & & \cdots & \\ S_{G_{\tau^n{}_* a}}^{\tau_* a}, & S_{G_{\tau^n{}_* a}}^{\tau^2{}_* a}, & \ldots, & S_{G_{\tau^n{}_* a}}^{\tau^n{}_* a} \end{array}$$

Z nich n trajektorií a sice

$$S_{G_{\tau_* a}}^{\tau_* a}, \quad S_{G_{\tau^2{}_* a}}^{\tau^2{}_* a}, \quad \ldots, \quad S_{G_{\tau^n{}_* a}}^{\tau^n{}_* a}$$

se zřejmě redukuje každá na jeden prvek.

Věnujme pozornost zbývajícím $n(n-1)$ trajektoriím. Tyto určují spolu s příslušnými stabilizátory $n(n-1)$ elementárních podprostorů v $\mathbb{E}$:

(13) $$\begin{array}{c} (S_{G_{\tau_* a}}^{\tau^2{}_* a}, G_{\tau_* a}), \ \ldots, \ (S_{G_{\tau_* a}}^{\tau^n{}_* a}, G_{\tau_* a}), \\ \cdots \\ (S_{G_{\tau^n{}_* a}}^{\tau_* a}, G_{\tau^n{}_* a}), \ \ldots, \ (S_{G_{\tau^n{}_* a}}^{\tau^{n-1}{}_* a}, G_{\tau^n{}_* a}). \end{array}$$

10. Otevřené problémy. 1. Určete v systému (13) všechny dvojice prostorů, které jsou ekvivalentní přes prvky grupy C .

2. Určete v systému (13) dvojice izomorfních prostorů .

3. Rozšiřte předcházející úvahy na případ, že úlohu grupy C převezme nekonečná cyklická grupa $C_\infty = \{\ldots, \tau^{-2}, \tau^{-1}, \varepsilon, \tau, \tau^2 \ldots\}$

nebo nějaká jiná množina s operacemi.

4. Proveďte analýzu předcházejících úvah v případě jejich realizací v oboru jacobiovských rovnic.

16.9.1988