Otakar Borůvka

Diferenciální rovnice $y'' = q(t)y$ s periodickými koeficienty v souvislosti s teorií dispersí

Knižnice odborných a vědeckých spisů VUT v Brně, svazek B-67, Brno, 1976, 31-42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500182

KNIŽNICE ODBORNÝCH A VĚDECKÝCH SPISŮ
VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ
nositele Řádu práce
Ročník 1976, svazek B - 67
Fakulta elektrotechnická Katedra matematiky
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Ivan Mezník, CSc.

Otakar BORŮVKA [1]

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' = Q(t)y$ S PERIODICKÝMI KOEFICIENTY V SOUVISLOSTI S TEORIÍ DISPERSÍ

Diferenciální lineární homogenní rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty jsou ovládány klasickou teorií Floquetovou. Z ní zejména vyplývá, že každá taková rovnice je buď diskonjugovaná, nebo oscilatorická. Na druhé straně jsou oscilatorické rovnice podřazeny teorii dispersí, která je založena na principech zcela odlišných od teorie Floquetovy. Kombinací pojmů a výsledků obou teorií, včetně příslušných metod, se otvírá nový přístup ke studiu diferenciálních rovnic 2. řádu s periodickými koeficienty, vedoucí k řadě nových výsledků.

I. Úvod

Všeobecně je znám význam diferenciálních lineárních homogenních rovnic 2. řádu v reálném oboru v aplikacích fysikálních a technických. V nejjednodušších úvahách klasické mechaniky, jako je analýza harmonického pohybu, nebo v mnohem složitějších otázkách o vedení tepla, chvění tyčí nebo v problémech nebeské mechaniky, vystupují zmíněné rovnice zpravidla jako ústřední místa obsahující řešení předložených otázek. K tomu přistupuje, že teorie těchto rovnic je ovládána poměrně jednoduchými teorémy, je průhledná a přitom obsahově bohatá.

[1] Akademik Otakar Borůvka, Brno 662 95, Janáčkovo nám. 2a

Významné místo v této teorii mají diferenciální rovnice s periodickými koeficienty. Třída těchto rovnic se stručně označuje jako Hillova rovnice, podle astronoma G. W. HILLa, který ve svém pojednání z r. 1877 o pohybech perigea měsíce, podstatně a trvale přispěl k jejich teorii. V literatuře se uvádí, že právě Hillova rovnice má stovky aplikací v problémech mechaniky a astronomie, v teorii elektrických obvodů, elektrické vodivosti kovů a cyklotronu.

Teorie Hillovy rovnice je ovládána klasickou teorii Floquetovou, která má ovšem širší dosah a vztahuje se nejenom na diferenciální lineární rovnice 2., ale obecněji na lineární rovnice libovolného řádu s periodickými koeficienty. Pro rovnice řádu 2. z ní především vyplývá, že každá taková rovnice je buď diskonjugovaná, což znamená, že každý její integrál má nejvýše jeden kořen, nebo oscilatorická v tom smyslu, že každý integrál má nekonečně mnoho kořenů v obou směrech ke koncům definičního intervalu $(-\infty, \infty)$. Na druhé straně jsou oscilatorické rovnice 2. řádu podřazeny teorii dispersí, která je založena na principech zcela odlišných od teorie Floquetovy. V této situaci se dá očekávat, že se kombinací pojmů a výsledků obou teorií, včetně příslušných metod, otevírá nový přístup ke studiu oscilatorické Hillovy rovnice. A právě tato poznámka určuje základní myšlenku mé dnešní přednášky.

II. Základní pojmy a výsledky

Naše úvahy se vztahují na rovnice tzv. Jacobiova typu

$$y'' = q(t)y, \qquad (q)$$

na něž lze obecnější rovnice 2. řádu transformací proměnných převést. Předpokládáme, že koeficient q, tzv. nosič rovnice, je spojitá funkce v intervalu $j = (-\infty, \infty)$ a rovnice (q) je oscilatorická. Později přistoupí předpoklad, že nosič q je periodický s π: $q(t+\pi) = q(t) (t \in j)$. Poznamenejme, že bází rovnice (q) popř. nosiče q rozumíme dvojici lineárně nezávislých integrálů této rovnice.

1. Teorie dispersí

Teorie dispersí se vztahuje na rovnice oscilatorické a je založena na dvou základních (ovšem v různých směrech specialisovaných) pojmech: fáze a disperse ([1], [2]).

1. Fáze (podrobněji: první fáze)

Rozeznáváme fáze určité báze rovnice (q) a fáze této rovnice. Mluvíme také o fázích báze nosiče q a fázích tohoto nosiče.

Fází báze u, v rozumíme každou funkci $\alpha(t)$, která je v intervalu j spojitá, všude tam, kde $v(t) \neq 0$, splňuje relaci $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t) : v(t)$. Snadno zjistíme, že existuje právě spočetný systém fází báze u, v. Každá fáze má právě jeden kořen a ten je kořenem integrálu u; současně je každý kořen integrálu u kořenem právě jedné fáze systému. Jestliže jsme kořeny integrálu u označili např. ..., $t_{-1}, t_0, t_1, \dots$, vyjadřujeme fázi α_ν s kořenem t_ν vzorcem

$$\alpha_\nu(t) = {}_\nu\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{u(t)}{v(t)} .$$

Fází rovnice (q) popř. nosiče q rozumíme každou fázi některé báze rovnice (q). Je-li α_0 fáze rovnice (q), je každá fáze α této rovnice dána vzorcem

$$\alpha(t) = {}_\nu\mathrm{Arc\,tg}\, C \cdot \frac{\sin[\alpha_0(t) + a]}{\sin[\alpha_0(t) + b]} ; \tag{1}$$

$C; a, b$ značí konstanty vázané nerovnostmi: $C(a-b) \neq 0$; $0 \leq a, b < \pi$.

Každá fáze α rovnice (q) má tyto vlastnosti:

1. $\alpha(t) \in C_j^3$; 2. $\alpha'(t) \neq 0$ pro $t \in j$; 3. $\lim\limits_{t \to \sigma\infty} \alpha(t) = \sigma . \mathrm{sgn}\,\alpha' . \infty$ $(\sigma = \pm 1)$

a jednoznačně určuje nosič q ve smyslu vzorce

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) \quad (t \in j) ; \tag{2}$$

$\{\ \}$ značí schwarzovskou derivaci funkce α v čísle t : $\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(t)}{\alpha'(t)} - \frac{3}{4}\frac{\alpha''^2(t)}{\alpha'^2(t)}$.

Fáze α se nazývá dispersní, platí-li stále $\alpha(t) > t$ nebo $\alpha(t) < t$; v prvním případě mluvíme o horní a v druhém o dolní fázi.

Význačnou úlohu v teorii dispersí mají tzv. fáze elementární. Fáze α se nazývá elementární, jestliže $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi . \mathrm{sgn}\,\alpha'$ $(t \in j)$; v tom případě má tvar $\alpha(t) = t . \mathrm{sgn}\,\alpha' + p(t)$, přičemž p je periodická funkce s π. Je zřejmé, že první a další derivace $\alpha, \ldots$ každé elementární fáze α jsou funkce periodické s π . Je-li některá fáze rovnice (q) elementární, jsou všechny fáze této rovnice elementární a ze vzorce (2) vidíme, že nosič q je periodický s π : $q(t + \pi) = q(t)$ $(t \in j)$. Množina fází rovnic s elemetárními fázemi, spolu s binární operací, tzv. násobením, definovanou skládáním funkcí (mluvíme o přirozeném násobení) je grupa; nazývá se grupa elementárních fází a označuje se $\mathcal{L}$. Její jednotkou je funkce t $(\in j)$, která je fází rovnice (-1) : $y'' = -y$.

Důležitým případem rovnic (q) je rovnice (-1) ; její fáze nazýváme speciální fáze. Právě jsme viděli, že speciální fáze t je elementární. Každá speciální fáze je tedy elementární a je dána vzorcem (1), v němž klademe $\alpha_0(t) = t$. Ze vztahu (2) vychází, že každá speciální fáze je integrálem rovnice $\{X, t\} + X'^2 = 1$. Množina všech speciálních fází, tedy fází rovnice (-1), spolu s přirozeným násobením, je grupa; nazývá se fundamentální grupa a označuje se $\mathcal{F}$. Zřejmě je $\mathcal{L} \supset \mathcal{F}$.

S pojmem fází souvisí pojem tzv. inversních diferenciálních rovnic. Rovnice $(\bar{q})$ se nazývá inversní ku (q), jestliže má fázi $\bar{\alpha}$, která je inversní funkcí vzhledem k některé fázi α rovnice (q) : $\bar{\alpha}(t) = \alpha^{-1}(t)$ $(t \in j)$. Z této definice plyne řada vlastností inversních rovnic. Zejména:

Symetrie: Je-li $(\bar{q})$ inversní ku (q), pak (q) je inversní ku $(\bar{q})$.

Nosič $q_{\bar{\alpha}}$ rovnice inverzní ku (q) s fází $\bar{\alpha}$, je dán vzorcem[2]

$$q_{\bar{\alpha}}(t) = -1 - [1 + q\bar{\alpha}(t)] \cdot (\bar{\alpha}(t))'^2 \qquad (t \in j).$$

Všimněme si, že rovnice inversní ku (q) tvoří množinu, jejíž prvky závisí na fázích rovnice (q).

Dalším pojmem, který souvisí s pojmem fáze, je fázová funkce. Fázovou funkcí rozumíme každou funkci v intervalu j, která má hořejší vlastnosti 1. - 3. fází. Je zřejmé, že každá fáze libovolné rovnice (q) je fázová funkce a naopak (v.(2)) je každá fázová funkce fází vhodné rovnice (q). Z toho důvodu mluvíme příležitostně o fázích ve smyslu fázových funkcí a přenášíme na tyto funkce pojmy definované pro fáze (např. disperzní fázové funkce).

2. Disperse

Pojem disperse rovnice (q) popř. nosiče q je specialisován v rozmanitých směrech. Zde se omezíme na tzv. centrální disperse 1. druhu, stručněji: centrální disperse.

Centrální disperzí s indexem ν $(= \pm 1, \pm 2, \ldots)$ rovnice (q) rozumíme funkci φ_ν v intervalu j, jejíž hodnotou v každém čísle $t \in j$ je $|\nu|$-té konjugované číslo (prvního druhu) s t, větší nebo menší než t, podle toho, zda $\nu > 0$ nebo $\nu < 0$; pro $\nu = 0$ klademe $\varphi_0(t) = t$. Centrální disperse φ_1 se nazývá základní.

Centrální disperse mají řadu významných vlastností. Z nich uvádíme:

Každá centrální disperse φ_ν $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$ je fázovou funkcí. Navíc je $\varphi_\nu' t > 0$ a dále $\varphi_{\nu-1}(t) < \varphi_\nu(t)$ $(t \in j)$. Vidíme, že φ_ν je horní nebo dolní fází podle toho, zda $\nu < 0$ nebo $\nu > 0$.

φ_ν a $\varphi_{-\nu}$ jsou vzájemně inversní funkce; odtud máme (pro $t \in j$)

$$\varphi_{-\nu}\varphi_\nu(t) = t\,; \quad \varphi_{-\nu}'\varphi_\nu(t) = [\varphi_\nu'(t)]^{-1}\,; \quad \varphi_{-\nu}''\varphi_\nu(t) = -\varphi_\nu''(t). \tag{3}$$

Každá centrální disperse φ_ν je spjata s každou fází α téže rovnice (q) tzv. abelovskou relací:

$$\alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu . \pi . \operatorname{sgn} \alpha' \qquad (t \in j).$$

Z ní zejména vychází vyjádření funkce φ_ν fázemi rovnice (q):

$$\varphi_\nu(t) = \alpha^{-1}[\alpha(t) + \nu . \pi . \operatorname{sgn} \alpha']\,;$$

α^{-1} značí ovšem funkci inversní k α.

---

[2] Např. $q\bar{\alpha}(t)$, stručněji: $q\bar{\alpha}$, značí složenou funkci $q[\bar{\alpha}(t)]$.

Každá centrální disperse φ_ν transformuje každý integrál y rovnice (q) a jeho derivaci y' v týž integrál a jeho derivaci ve smyslu vzorců:

$$y\,\varphi_\nu(t) = (-1)^\nu \cdot [\varphi_\nu'(t)]^{\frac{1}{2}} \cdot y(t), \tag{4}$$

$$y'\varphi_\nu(t) = (-1)^\nu [\varphi_\nu'(t)]^{-\frac{1}{2}} \left[\tfrac{1}{2} (\varphi_\nu''(t) : \varphi_\nu'(t)) . y(t) + y'(t) \right] \quad (t \in j). \tag{5}$$

V případě $q(t) < 0$, $t \in j$, $\nu \geq 1$, lze číslo $\varphi_\nu'(t)$ vyjádřit hodnotami nosiče q:

$$\varphi_\nu'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \cdot \frac{q(t_5)}{q(t_7)} \cdots \frac{q(t_{4\nu-3})}{q(t_{4\nu-1})}; \tag{6}$$

čísla $t_1, \ldots, t_{4\nu-1}$ oddělují kořeny $(t =)\ a_0 < \ldots < a_\nu (= \varphi_\nu(t))$ každého integrálu y rovnice (q), který vymizí v t, a kořeny $b_1 < \ldots < b_\nu$ jeho derivace, ležící v intervalu $(t, \varphi_\nu(t))$: $(t =)\ a_0 < t_1 < b_1 < t_3 < a_1 < t_5 < \ldots < t_{4\nu-3} < b_\nu < t_{4\nu-1} < a_\nu\ (= \varphi_\nu(t))$.

3. Bloky rovnic (q).

Při studium množiny $\{(q)\}$ všech (oscilatorických) rovnic (q) vystoupí jako důležitý poznatek toto:

Množina $\{(q)\}$ se rozpadá v disjunktní třídy, tzv. bloky, s těmito vlastnostmi:

1° Rovnice (q), (q^*) leží v témže bloku, když a jen když pro každou fázi α jedné rovnice a některou speciální fázi ε je $\alpha\varepsilon$ fází druhé rovnice.

2° Ke každému bloku $\bar{u}$ existuje právě jeden blok $\bar{u}^{-1}$ tzv. inversní, který se skládá z rovnic inversních k rovnicím z bloku $\bar{u}$; přitom platí: $(\bar{u}^{-1})^{-1} = \bar{u}$.

Rovnice (q), (q^*) s fázemi α, $\alpha\varepsilon$ nazýváme sdružené a o rovnici (q^*) pravíme, že je sdružená s (q) translací ε.

Ze vzorce (2) odvodíme:

$$q^*(t) = -1 + [1 + q\varepsilon(t)] . \varepsilon'^2(t) \qquad (t \in j) \tag{7}$$

a tento vztah lze dále rozvinout aplikací vzorce (1) (pro $\alpha = \varepsilon$, $\alpha_0(t) = t$). Mezi centrálními dispersemi φ_ν, φ_ν^* rovnic (q), (q^*) platí vztah

$$\varphi_\nu^*(t) = \varepsilon^{-1} \varphi_{\nu \cdot \operatorname{sgn} \varepsilon'} \varepsilon(t) \qquad (\nu = 0, \pm 1, \ldots;\ t \in j) \tag{8}$$

Rovněž snadno zjistíme, že pro každý integrál y rovnice (q) je $y^*(t) = y\varepsilon(t) : \sqrt{|\varepsilon'(t)|}$ $(t \in j)$ integrálem rovnice (q^*).

Ze vzorce (7) vidíme, že nosiči všech rovnic (q) z téhož bloku současně jsou nebo nejsou funkce periodické s π .

2. Přehled o Floquetově teorii

Naše další úvahy se vztahují na rovnice (q) s π -periodickými nosiči.

Ve Floquetově teorii se k rovnici (q) přiřazuje algebraická rovnice 2. stupně, tzv. charakteristická rovnice, $s^2 - As + 1 = 0,\ A = \text{konst.}$, jejíž kořeny s_1, s_{-1}, nazývané charakteristické kořeny rovnice (q) dávají informace o povaze integrálů rovnice (q). Koeficient A je definován vzorcem $A = u(x+\pi)+v'(x+\pi)$, v němž u, v značí bázi rovnice (q) s počátečními hodnotami v libovolném čísle $x \in j$: $u(x)=1,\ u'(x)=0;\ v(x)=0;\ v'(x)=1$. Podle toho, zda $|A| \geq 2$ nebo $|A| < 2$, jsou charakteristické kořeny reálné nebo imaginární a v prvním případě kladné, když $A \geq 2$, nebo záporné, když $A \leq -2$. Vždycky je ovšem $s_1 . s_{-1} = 1$.

V jednotlivých případech existují báze y_1, y_{-1} rovnice (q) s rozdílnými vlastnostmi:

Když $A > 2$ nebo $A < -2$ máme $s_1 \neq s_{-1}$ a existuje báze s vlastností:

$$y_1(t+\pi) = s_1 . y_1(t) \ ,\ y_{-1}(t+\pi) = s_{-1} . y_{-1}(t) \qquad (t \in j);$$

když $A = 2$ nebo $A = -2$, je $(s=)\ s_1 = s_{-1} = 1$ nebo $(s=)\ s_1 = s_{-1} = -1$ a $y_1(t+\pi) = s . y_1(t),\ y_{-1}(t+\pi) = s . y_{-1}(t) + y_1(t)$ jestliže $u'(x+\pi) \neq 0$,

popř.

$$y_1(t+\pi) = s . y_1(t) \ ,\ y_{-1}(t+\pi) = s . y_{-1}(t) \quad \text{jestliže } u'(x+\pi) = 0,$$

takže v tomto druhém případě jsou všechny integrály rovnice (q) periodické nebo poloperiodické s π ;

konečně, když $-2 < A < 2$ existuje báze s vlastností:

$$y_1(t+\pi) = \cos a . y_1(t) - \sin a . y_{-1}(t),$$

$$y_{-1}(t+\pi) = \sin a . y_1(t) + \cos a . y_{-1}(t), \qquad (t \in j);$$

přitom je $s_\sigma = \cos a + i\sigma . \sin a,\ 0 < a < \pi,\ \sigma = \pm 1$.

III. Hillova oscilatorická rovnice

Přicházíme k jádru této přednášky, v němž jde o popis vztahů mezi prvky teorie disperzí a teorie Floquetovy v případě oscilatorických rovnic (q) s π -periodickými nosiči. Nadále tedy předpokládáme, že studované rovnice (q) jsou oscilatorické a $q(t+\pi) = q(t) \quad (t \in j)$.

3. Fáze a centrální disperse

Východiskem našich úvah je klasický poznatek: Pro každý integrál $y(t)$ rovnice (q) je také funkce $y(t+\pi)$ $(t \in j)$ integrálem této rovnice.

Z této věty především plyne: Pro každou fázi $\alpha(t)$ rovnice (q) je také funkce $\alpha(t+\pi)(t \in j)$ fází této rovnice. A dále ([3]):

Ke každé fázi α rovnice (q) existuje speciální fáze $\varepsilon \,(\in \mathcal{G})$ splňující rovnici:

$$\alpha(t+\pi) = \varepsilon\alpha(t) \qquad (t \in j) \tag{9}$$

Odtud plyne vztah:

$$\alpha[\alpha^{-1}(t)+\pi] = \varepsilon(t) \qquad (t \in j).$$

Levá strana je základní disperse $\bar{\varphi}_1$ rovnice inversní ku (q) s fází α^{-1}, nebo funkce $\bar{\varphi}_{-1}$ inversní ku $\bar{\varphi}_1$ podle toho, zda $\alpha' > 0$ nebo $\alpha' < 0$. Odtud vychází:

Fáze ε v rovnici (9) je disperzní, a to horní nebo dolní podle toho, zda $\alpha' > 0$ nebo $\alpha' < 0$.

Všechny centrální disperse každé rovnice inversní ku (q) jsou speciální fáze.

V souvislosti s tímto výsledkem vzniká otázka, čím se vyznačují centrální disperse rovnice (q) samotné. Odpověď ([3]):

Všechny centrální disperse φ_ν rovnice (q) jsou elementární fáze, takže

$$\varphi_\nu(t+\pi) = \varphi_\nu(t)+\pi \qquad (\nu = 0, \pm 1, \dots;\ t \in j). \tag{10}$$

Odtud vidíme (1.1) že první a další derivace $\varphi_\nu', \dots$ každé centrální disperse φ_ν jsou funkce periodické s π.

Studované rovnice (q) jsou částí (širší) množiny rovnic (q) charakterizovaných tím, že jejich centrální disperse jsou elementární fáze.

Vztahy mezi prvky teorie dispersí a teorie Floquetovy jsou podstatně rozdílné v případě rovnic (q) s reálnými a imaginárními charakteristickými kořeny.

1. Rovnice (q) s reálnými charakteristickými kořeny

a. Význačná čísla rovnic (q).

Číslo $x \in j$ se nazývá význačné číslo typu n rovnice (q) popř. nosiče q (n přirozené), když $\varphi_n(x) = x+\pi$; mluvíme také o význačných bodech typu n.

S každým význačným číslem x typu n rovnice (q) je také každé s ním konjugované číslo $\varphi_\nu(x)$ význačným číslem typu n této rovnice ($\nu = \pm 1, \ldots$). To plyne ze vztahů: $\varphi_n \varphi_\nu(x) = \varphi_\nu \varphi_n(x) = \varphi_\nu(x+\pi) = \varphi_\nu(x)+\pi$. Zejména je tedy číslo $\varphi_{-n}(x)$ význačné typu n odtud máme: $\varphi_{-n}(x) = x - \pi$.

Všechna význačná čísla rovnice (q), pokud existují, jsou téhož typu. Vskutku, nechť x, y jsou význačná čísla rovnice (q) typů n a m, takže $\varphi_n(x) = x + \pi$, $\varphi_m(y) = y + \pi$. Čísla $y, \varphi_1(y)$ jsou sousední kořeny jistého integrálu rovnice (q) a tedy v intervalu $[y, \varphi_1(y))$ existuje právě jedno číslo x_1 konjugované s x. V případě $x_1 = y$ je číslo y konjugované s x a tedy je typu $m = n$. Nechť tedy $y < x_1 < \varphi_1(y)$. Pak máme: $y + \pi = \varphi_m(y) < \varphi_{m-n}\varphi_n(x_1) = \varphi_{m-n}(x_1+\pi) = \varphi_{m-n}(x_1) + \pi < \varphi_m \varphi_1(y) = \varphi_1(y)+\pi$ a vychází: $y < \varphi_{m-n}(x_1) < \varphi_1(y)$. V intervalu $(y, \varphi_1(y))$ leží tedy čísla x_1, $\varphi_{m-n}(x_1)$ konjugovaná s x. Odtud plyne: $x_1 = \varphi_{m-n}(x_1)$ a tedy $m = n$.

Nechť x je význačné číslo typu n rovnice (q) a u, v její báze s počátečními hodnotami:

$$u(x) = 1, \quad u'(x) = 0 \quad ; \quad v(x) = 0, \quad v'(x) = 1. \tag{11}$$

Pak máme:

$$(s_1 =) \quad u(x+\pi) = (-1)^n [\varphi_n'(x)]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad (s_{-1} =) \quad v'(x+\pi) = (-1)^n [\varphi_n'(x)]^{-\frac{1}{2}} \tag{12}$$

$$u'(x+\pi) = \frac{1}{2} [\varphi_n'(x)]^{-\frac{3}{2}} \cdot \varphi_n''(x), \quad v(x+\pi) = 0. \tag{13}$$

Vskutku, rovnosti (12) plynou z (4) a rovnosti (13) z (5) pro $y = u$ popř. $= v$, $\nu = n$, $t = x$.

b. Vztahy mezi význačnými čísly rovnice (q) a jejími charakteristickými kořeny.
Základem je tato věta:

Rovnice (q) má význačná čísla typu n (n přirozené), když a jen když její charakteristické kořeny jsou reálné. V každém význačném čísle x typu n rovnice (q) jsou hodnoty

$$s_1 = (-1)^n \sqrt{\varphi_n'(x)}, \quad s_{-1} = (-1)^n \sqrt{\varphi_{-n}'(x)} \tag{14}$$

charakteristická čísla této rovnice.

Důkaz. 1. Má-li rovnice (q) reálný charakteristický kořen s, má integrál y s vlastností: $y(t+\pi) = s \cdot y(t)$, $t \in j$ (II.2). Protože je oscilatorická, má integrál y kořeny. Pro každý kořen x platí: $y(x) = y(x+\pi) = 0$ a tedy při vhodném přirozeném n máme: $\varphi_n(x) = x + \pi$, takže x je význačné číslo typu n rovnice (q).

2. Nechť x je význačné číslo typu n (n přirozené) rovnice (q). Pak pro bázi u, v této rovnice, s počátečními hodnotami (11) platí vzorce (12). Z nich vychází: $s_1 + s_{-1} = u(x+\pi) + v'(x+\pi)$, $s_1 \cdot s_{-1} = u(x+\pi) \cdot v'(x+\pi) = 1$. Čísla s_1, s_{-1} jsou tedy charakteristické kořeny rovnice (q) Z druhého vzorce (3) máme: $[\varphi_n'(x)]^{-1} = \varphi_{-n}' \varphi_n(x) \cdot \varphi_{-n}'(x+\pi) = \varphi_{-n}'(x)$, takže $s_{-1} = (-1)^n \sqrt{\varphi_{-n}'(x)}$.

Z tohoto výsledku a ze vzorce (6) vychází [5] :

Když charakteristické kořeny s_1, s_{-1} rovnice (q) jsou reálné a $q(t) < 0$ $(t \in j)$ lze je vyjádřit hodnotami nosiče q ve vhodných číslech $x_1 < x_3 < \dots < x_{4n-1}$ ve tvaru:

$$s_\sigma = (-1)^n \left[\frac{q(x_1)}{q(x_3)} \cdot \frac{q(x_5)}{q(x_7)} \cdot \ldots \frac{q(x_{4n-3})}{q(x_{4n-1})} \right]^{\frac{\sigma}{2}} \quad (n \text{ přirozené}, \sigma = \pm 1).$$

c. Koexistence poloperiodických (periodických) integrálů

Je zřejmé, že rovnice (q) má všechny integrály poloperiodické (periodické) s π, když oba integrály některé její báze mají onu vlastnost. V tomto případě mluvíme o koexistenci poloperiodických (periodických) integrálů rovnice (q).

Z Floquetovy teorie (II.2) vidíme, že koexistence poloperiodických (periodických) integrálů rovnice (q) nastává právě tehdy, když rovnice (q) má dvojnásobný charakteristický kořen $s = -1$ $(s = 1)$ a hodnota derivace jejího integrálu u s počátečními hodnotami (11) v libovolném čísle $x \in j$ v bodě $x + \pi$ je 0 : $u'(x+\pi) = 0$.

F. NEUMAN ukázal ([4]), že ke koexistenci poloperiodických (periodických) integrálů rovnice (q) je nutné a stačí, aby některá centrální disperse φ_n s lichým (sudým) indexem n (≥ 1) rovnice (q) byla lineární a sice tvaru: $\varphi_n(t) = t + \pi$. Jinými slovy, aby každé číslo t $(\in j)$ bylo význačným číslem lichého (sudého) typu rovnice (q).

Kombinací podmínek pro koexistenci poloperiodických (periodických) integrálů rovnice (q) plynoucích z Floquetovy teorie s vlastnostmi (12), (13) význačných čísel vychází tato věta:

Rovnice (q) má všechny integrály poloperiodické (periodické) s π právě tehdy, když některá její centrální disperse φ_n s lichým (sudým) indexem n a její derivace φ_n', φ_n'' mají v některém čísle $x \in j$ hodnoty:

$$\varphi_n(x) = x + \pi, \quad \varphi_n'(x) = 1, \quad \varphi_n''(x) = 0. \tag{15}$$

2. Rovnice (q) s imaginárními charakteristickými kořeny

O rovnicích (q) s imaginárními charakteristickými kořeny platí tato věta ([6]):

Rovnice (q) má imaginární charakteristické kořeny $s_\sigma = \exp(\sigma a \pi i)$, $0 < a < 1$, $\sigma = \pm 1$, právě tehdy, když připouští fázi α s vlastností:

$$\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + (a+2n)\pi \quad (n \text{ celé}, t \in j). \tag{16}$$

3. Věta o setrvačnosti charakteristických kořenů

Vezměme v úvahu některý blok rovnic (q) s π-periodickými nosiči (II.1.3). O rovnicích (q) z tohoto bloku platí věta, které říkáme věta o setrvačnosti charakteristických kořenů:

Všechny rovnice (q) z téhož bloku mají tytéž charakteristické kořeny a všechny současně mají nebo nemají všechny integrály poloperiodické (periodické) s π.

Důkaz. Nechť (q), (q^*) jsou sdružené rovnice s π-periodickými nosiči, přičemž rovnice (q^*) je sdružená s (q) translací ε; označme $\sigma = \operatorname{sgn} \varepsilon' (= \pm 1)$.

a. Nechť charakteristické kořeny rovnice (q) jsou reálné. Nechť x je význačné číslo typu n rovnice (q). Z (8) plyne, že $x^* = \varepsilon^{-1}(x)$ je význačné číslo téhož typu n rovnice (q^*). Podle (14) je

$s = (-1)^n \sqrt{\varphi'_{n\sigma}(x)}$ charakteristický kořen rovnice (q) a

$s^* = (-1)^n \sqrt{\varphi^{*\prime}_n(x^*)}$ charakteristický kořen rovnice (q^*).

Centrální disperse $\varphi_{\nu\sigma}$, φ^*_ν (ν celé) rovnic (q), (q^*) souvisí podle vzorce (3). Z něj a ze zřejmé relace $\varepsilon^{-1}\varepsilon(t) = t$ $(\in j)$ obdržíme dvojím derivováním (pro $\nu = n$, $t = x^*$):

$$\varphi^{*\prime}_n(x^*) = \varphi'_{n\sigma}(x), \tag{17}$$

$$\varphi^{*\prime\prime}_n(x^*) = \varepsilon^{-1\prime\prime}(x) . \varepsilon''[\varepsilon^{-1}(x)] . \varphi'_{n\sigma}(x) . [1 - \varphi'_{n\sigma}(x)] + \varepsilon'[\varepsilon^{-1}(x)] . \varphi''_{n\sigma}(x). \tag{18}$$

Z (17) vychází: $s^* = s$.

Má-li např. rovnice (q) všechny integrály poloperiodické (periodické) s π, máme podle 2. a vzorců (15), (17): $\varphi'_{-n}(x) = \varphi'_n(x) = 1$, $\varphi''_{-n}(x) = \varphi''_n(x) = 0$, n liché (sudé), a dále, podle (17), (18): $\varphi^{*\prime}_n(x) = 1$, $\varphi^{*\prime\prime}_n(x^*) = 0$. Odtud vychází podle (15), že všechny integrály rovnice (q^*) jsou poloperiodické (periodické) s π.

b. Nechť charakteristické kořeny rovnice (q) jsou imaginární, a jeden z nich je $s_\sigma = \exp(\sigma a \pi i)$; $0 < a < 1$. Podle 3.2 existuje fáze α rovnice (q) s vlastností (16). Funkce $\sigma\alpha^*(t) = \sigma\alpha\,\varepsilon(t)$ je fází rovnice (q^*) a splňuje pro $t \in j$ rovnici:

$$\sigma\alpha^*(t+\pi) = \sigma\alpha\,\varepsilon(t+\pi) = \sigma\alpha[\varepsilon(t) + \sigma\pi] = \sigma(\alpha\,\varepsilon(t) + \sigma(a+2n)\pi] = \sigma\alpha^*(t) + (a+2n)\pi.$$

Odtud a z 3.2 vychází, že s_σ je charakteristický kořen rovnice (q^*).

Došlo 20. 2. 1976

Literatura

[1]BORŮVKA, O.: Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967

[2]BORŮVKA, O.: Linear Differential Transformations of the Second Order. The English Universities Press, London 1971

[3]BORŮVKA, O.: Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle y"=q(t)y. Tensor, N.S. 26 (1972), 121-128

[4]NEUMAN, F.: On the Coexistence of Periodic Solutions. Journal of Differential Equations, 8 (1970), 277-282

[5]BORŮVKA, O.: Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre. Ann. di mat. p. ed app. (v tisku)

[6]NEUMAN, F.: Note on Bounded Non-periodic Solutions of Secondorder Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. Math. Nachrichten, 39 (1969),217-222

Резюме

О.Борувка

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $Y''=Q(T)Y$ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ ДИСПЕРСИЙ

В статье описываются зависимости между характеристическими корнями дифференциального уравнения Гилла и некоторыми элементами теории дисперсий,в особенности фазами и центральными дисперсиями.Особое внимание уделяется так называемым блокам уравнений колебания $y''=q(t)y$ $(q(t)\in C_j^0,\ j=(-\infty,\infty))$.Последние характеризуются тем,что все уравнения того же блока получаются из некоторой из них преобразованиями независимой переменной фазы $\varepsilon(t)$ уравнения $y''=-y: t\to\varepsilon(t)$. Все уравнения того же блока одновременно имеют или не имеют периодические носители например с π .О блоках действует так называемая теорема инерции характеристических корней:Уравнения того же блока с π-периодическими носителями имеют те же самые характеристические корни и все имеют или не имеют одновременно все интегралы π -полупериодические,или же π -периодические.

Summary

O. BORŮVKA

DIFFERENTIAL EQUATIONS $Y'' = Q(T)Y$ WITH PERIODIC COEFFICIENTS IN CONNECTION WITH DISPERSION THEORY

In the article, the relations are described between the characteristic roots of the Hill differential equation and some elements of the dispersion theory, especially phases and central dispersions. Special attention is devoted to the so-called blocks of oscillatoric equations $y'' = q(t)y$ $\left(q(t) \in C^0_j,\ j = (-\infty, \infty)\right)$. These are characterized by that all equations of the same block originate from one of them by transformations of the independent variable by phases $\varepsilon(t)$ of the equation $y'' = -y$: $t \rightarrow \varepsilon(t)$. Simultaneously, all the equations of the same block have or have not periodic carriers, e. g. with π For the blocks the so colled theorem of inertia of characteristic roots holds: Equations of the same block with π -periodic carriers have identical characteristic roots and, at the same time, they all have or have not all their integrals π-semiperiodic or π -periodic.