Otakar Borůvka
O klasických matematických problémech

Věda a život, 1957, 10-12

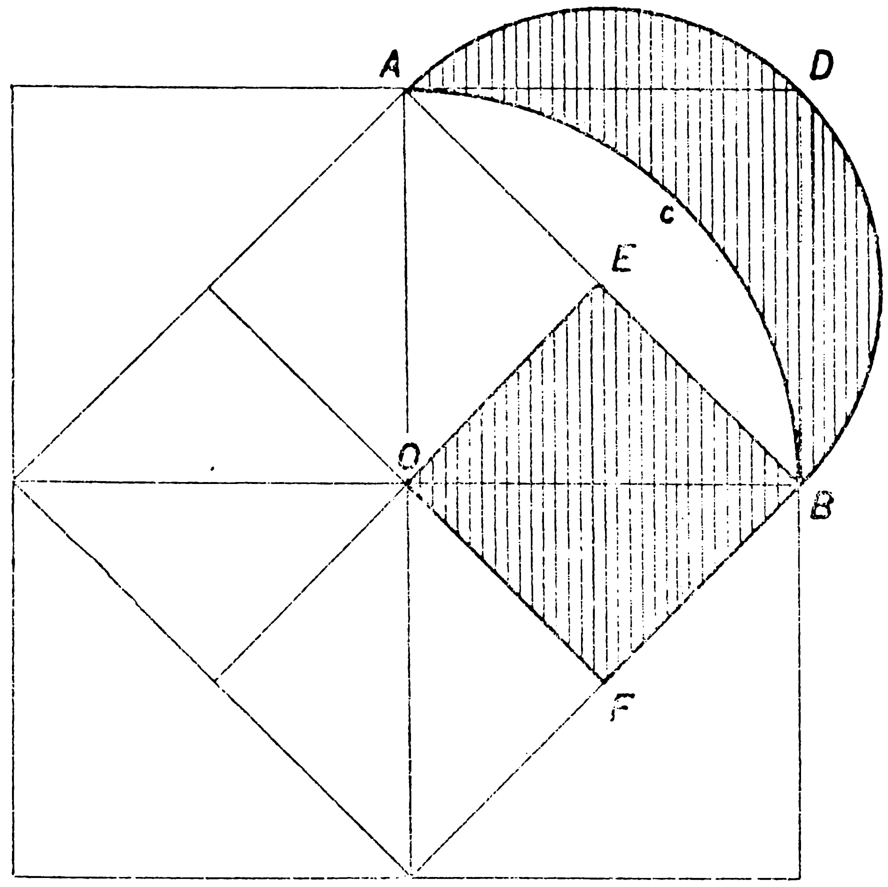
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500237

O KLASICKÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMECH

Člen korespondent ČSAV OTAKAR BORŮVKA

Z matematických problémů jistě nejpopulárnějšími jsou tři klasické problémy: kvadratury kruhu, trisekce úhlu a zdvojení krychle. Tyto problémy, již přes sedmdesát let po každé stránce rozřešené, lákají neodborníky dodnes, jak o tom svědčí zejména neveřejné, avšak tím častější přípisy a dotazy matematickým ústavům.

O kvadratuře kruhu. Kvadraturou kruhu v širším smyslu se rozumí určení plošného obsahu kruhu. Každému je známo, že se k jednoduchým rovinným obrazcům, jako jsou trojúhelníky, obdélníky, po př. čtverce a obecněji mnohoúhelníky, přiřazují jakási kladná čísla, t. zv. plošné obsahy, jež jsou měrou pro část roviny takovým obrazcem vymezenou. Tato čísla se počítají podle jednoduchých pravidel. Tak na př. čtverec, jehož každá strana má určitý počet — řekněme a — jednotek délky, na př. cm, má plošný obsah $a \times a$, t. j. a^2 plošných jednotek, na př. cm^2. — Také kruh jest jednoduchý rovinný obrazec a přiřazuje se k němu plošný obsah. Avšak pravidlo pro jeho výpočet není tak bezprostřední a jednoduché jako v předcházejících případech; je to pochopitelné vzhledem k tomu,



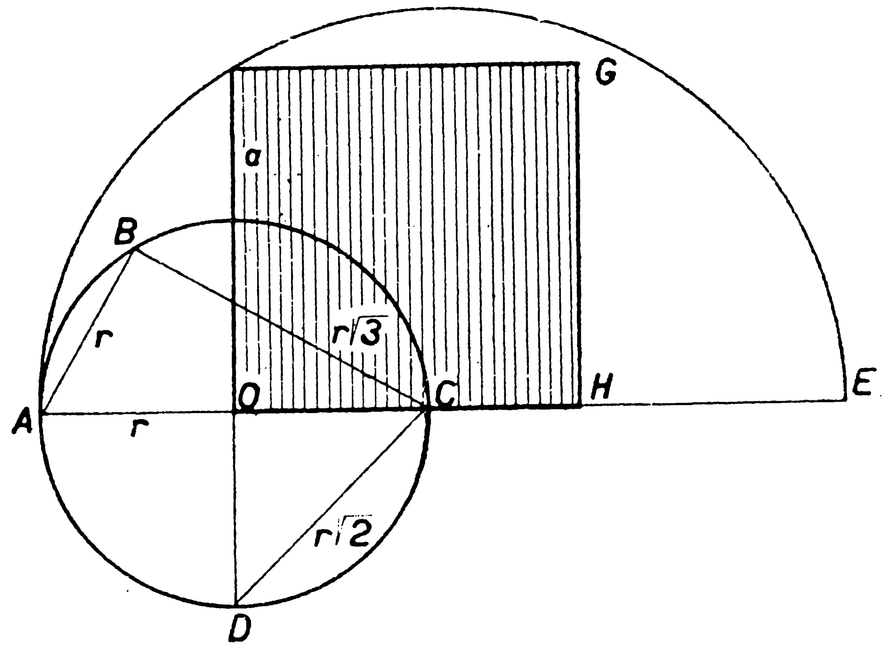
Plošný obsah měsíčku *ACBD* jest roven plošnému obsahu čtverce *OFBE*. To plyne snadno z toho, že plošné obsahy dvou kruhů mají týž poměr jako plošné obsahy čtverců, jejichž strany jsou průměry těch kruhů. — Kromě tohoto měsíčku znal Hippokrates ještě další dva měsíčky, jejichž kvadratura se dá provésti jenom pravítkem a kružidlem.

že kruh je zakřivený, kdežto na př. čtverec je obrazec přímočarý. Udati pravidlo, podle něhož by bylo možno vypočítat plošný obsah každého kruhu, když známe délku jeho poloměru, je problém, který se označuje jako problém kvadratury kruhu v širším smyslu. Jak uslyšíme, byl rozřešen již dávno př. n. l.

Naproti tomu kvadraturou kruhu v užším smyslu se rozumí geometrická konstrukce vedoucí od poloměru daného kruhu ke straně čtverce, který má týž plošný obsah jako kruh; a to geometrická konstrukce pomocí jenom pravítka a kružidla. To znamená, že se při ní konstruují jenom průsečíky přímek a kružnic. Právě k nalezení takové konstrukce směřují dodnes snahy neodborníků — avšak marně. Taková konstrukce neexistuje; jinými slovy, problém kvadratury v užším smyslu není řešitelný.

Dějiny problému kvadratury kruhu jsou slavné. O kvadratuře kruhu jest psáno v jednom z nejstarších známých matematických dokumentů vůbec, t. zv. Papyrus Rhind, z r. asi 2000 před n. l., jenž je dnes uložen v Britském museu. V něm se udává toto pravidlo pro výpočet plošného obsahu kruhu: Plošný obsah kruhu je stejně velký jako plošný obsah čtverce, jehož každá strana je $\frac{8}{9}$ průměru toho kruhu. Ku podivu je toto pravidlo dobré, neboť udává plošný obsah kruhu jenom asi o 6 desetin procenta větší, než ve skutečnosti je. V starověké řecké matematice zaujímal problém kvadratury kruhu vedle druhých dvou uvedených klasických problémů čelné místo a pokud se týče kvadratury v širším smyslu, byl také již tehdy úplně rozřešen. Hippokrates z Chia v 5. století před n. l. dokázal, že plošné obsahy dvou kruhů mají týž poměr jako plošné obsahy čtverců, jejichž strany jsou průměry těchto kruhů. Bezprostředním důsledkem této Hippokratovy věty je to, že poměr plošného obsahu každého kruhu k plošnému obsahu čtverce, jehož každá strana je poloměr toho kruhu, je pro všechny kruhy totéž číslo; podrobněji řečeno, ať je kruh velký nebo malý, jeho plošný obsah je vždy stejněkrát větší než plošný obsah čtverce, jehož každá strana má délku poloměru toho kruhu. Stejněkrát větší; avšak kolikrát? Číslo, které udává, kolikrát větší, značí se řeckým písmenem π, takže vychází pravidlo, že plošný obsah každého kruhu jest πr^2, při čemž r značí délku poloměru toho kruhu. Tímto pravidlem je problém kvadratury kruhu v širším smyslu po teoretické stránce rozřešen. Pro praktickou stránku zbývá ukázat, jak se číslo π vypočte a jaká jest jeho hodnota. To ukázal po prvé Archimedes v 3. století před n. l., jenž vypočetl hodnotu čísla π na dvě desetinná místa, a to $\pi = 3{,}14\ldots$ Mnohem později, kolem r. 1600, metodou podobnou Archimedově vypočetl Ludolf van Ceulen číslo π na 35 desetinných míst. Po něm se číslu π říká číslo Ludolfovo. Ještě později v 18. století, po objevení infinitesimálního počtu, byly k výpočtu čísla π nalezeny mnohem vhodnější metody, než je Archimedova, a číslo π bylo jimi vypočteno na víc než 100 desetinných míst.

Avšak i problém kvadratury kruhu v užším smyslu má své slavné dějiny. Také tímto problémem se zabývali již řečtí matematikové dávno před n. l. Týž Hippokrates v 5. století před n. l. při pokusech o rozřešení tohoto problému objevil své proslulé obrazce, t. zv. Hippokratovy měsíčky, t. j. určité dvojúhelníky, ohraničené kruhovými oblouky, jejichž kvadraturu lze skutečně provést jenom pravítkem a kružidlem. Během dlouhých dob se pokusy o rozřešení problému hromadily, avšak nedařily, problém odolával a stával se proslulým. Nezdařených pokusů bylo tolik, že se pařížská Akademie r. 1775 usnesla, že v budoucnu dalších předložených řešení problému kvadratury kruhu — rozumí se v užším smyslu — trisekce úhlu, zdvojení krychle a perpetua mobile už zkoumati nebude. Již tehdy bylo zřejmé, že se problém nerozřeší pokusy amatérů a že naopak vyžaduje mnohem hlubších úvah a mocnějších metod. A skutečně předcházelo ještě mnoho slavných jmen, mnoho hlubokých myšlenek a mnoho práce, než r. 1882 německý matematik Lindemann dokázal tento konečný výsledek: problém kvadratury kruhu v užším smyslu není řešitelný. Podrobněji řečeno: geometrická konstrukce pomocí jenom pravítka a kružidla, vedoucí od poloměru daného kruhu ke straně čtverce, který má týž plošný obsah jako onen kruh, neexistuje. Vedlo by příliš daleko, kdybych chtěl i jenom naznačit, jak se tento výsledek dokáže; tak hluboko tkví v moři matematických pojmů a metod. Spokojíme se proto jenom s poznámkou, že podstatná část důkazu se týká toho, že číslo π nehoví žádné algebraické rovnici, jejíž koeficienty jsou celá čísla. — Tento záporný výsledek o kvadratuře kruhu v užším smyslu nemá ovšem nic společného s proslulým *ignorabimus.* Jeho obsah naopak rozšiřuje naše poznání v tom směru, že k řešení onoho problému pravítko a kružidlo nestačí. S podobnými zjevy se v denním životě setkáváme napořád; na př. k holení nestačí pilka. Poznamenejme ještě, že je známo mnoho konstrukcí jenom pravítkem a kružidlem řešících úlohu o kvadratuře kruhu p ř i b l i ž n ě. Na př. jedna



Z daného poloměru r kruhu $ABCD$, jehož kvadratura se má *přibližně* provésti, sestrojí se nejprve úsečky $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ o délkách $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$ a jejich součet $\overline{OE}$. Kruh nad $\overline{AE}$ protne kolmici v O na AE v bodě F a úsečka $\overline{OF}$, délky a, jest stranou čtverce $OFGH$, jenž má přibližně týž plošný obsah jako kruh $ABCD$.

z nejjednodušších se opírá o to, že se úsečky délky $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$ z dané úsečky délky r pravítkem a kružidlem snadno sestrojí a jejich součet má délku přibližně πr.

O t r i s e k c i ú h l u a z d v o j e n í k r y c h l e. Problémem trisekce úhlu se rozumí úloha rozdělit daný úhel na tři stejné díly. Problémem zdvojení krychle se rozumí úloha, k dané úsečce sestrojit novou úsečku takovou, aby krychle, jejíž každá hrana má délku této nové úsečky, měla objem právě dvakrát tak velký jako krychle, jejíž hrana má délku úsečky dané. Oba problémy se chápou buď v širším smyslu, totiž že jde o rozdělení daného úhlu po př. sestrojení hledané úsečky pomocí vhodných prostředků, jejichž volba je zcela na naší vůli; anebo se chápou v užším smyslu, že jde o geometrické konstrukce opět pomocí jenom pravítka a kružidla. Řešení obou problémů v širším smyslu neskýtá vůbec žádných obtíží a již ze starověku pocházejí četné způsoby řešení na př. od Hippia, Platona, Archimeda a jiných. Kromě pravítka a kružidla se při nich užívá jednodušších nebo složitějších přístrojů, na př. t. zv. konchoidního kružidla. Naproti tomu oba problémy v užším smyslu jsou opět neřešitelné, t. j. hledané geometrické konstrukce pomocí jenom pravítka a kružidla neexistují.

Podobně jako problém kvadratury kruhu mají oba problémy slavné dějiny. Problém zdvojení krychle prý nabyl na významu, když se Délští, zlou nemocí týraní, obrátili do věštírny o radu a věšteckým výrokem byli vyzváni, aby kterýsi oltář, v podobě krychle, zdvojili. Tehdy prý byli vysláni poslové k matematikům akademie Platonovy, aby si rozřešení problému vyžádali. Odtud se problému zdvojení krychle také říká délský problém. Problémy trisekce úhlu i zdvojení krychle v širším smyslu byly již starověkými matematiky skvěle rozřešeny a zdá se, že již oni také tušili neřešitelnost obou problémů ve smyslu užším. Nicméně snahy o rozřešení těchto obou problémů pokračovaly, přenášejíce se — jako epidemická nemoc — se století na století, vyvolávajíce záplavu pojednání. Početnost nepodařených pokusů o rozřešení obou problémů v užším smyslu spolupůsobila k výše připomenutému usnesení pařížské Akademie z r. 1775. Avšak na rozdíl od kvadratury kruhu bylo v té době již známo, že geometrická konstrukce pro trisekci úhlu a zdvojení krychle pomocí jenom pravítka a kružidla neexistuje. Dnes známe velmi elegantní metody, jimiž se tato skutečnost dá dokázat. V podstatné části záleží v tom, že se dokáže, že délka žádné úsečky, kterou z dané jednotkové úsečky je možno sestrojit pomocí jenom pravítka a kružidla, nehoví ireducibilní algebraické rovnici třetího stupně. — Přibližné konstrukce ovšem opět existují.

S hlediska moderní matematiky nejeví se nám klasické problémy, o nichž jsem hovořil, zajímavými. Jednak proto, že jejich řešení již dlouho známe, jednak i proto, že proti cílům, které sleduje dnešní matematika, mají nepatrný rozsah. Tím méně zajímavé ovšem mohou býti všechny pokusy amatérů o jejich rozřešení a zejména takové, které sledují cíl, o němž bezpečně víme, že neexistuje.

Ukázka z populárně vědeckého filmu »Roentgenovy paprsky«.