Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden

Verhandlungen des Internat. Mathematikerkongresses, Zürich 1932, II, pp. 24--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500734

ÜBER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN

Von V. JARNÍK, Prag

In diesem ganzen Artikel seien zwei ganze Zahlen k_1, k_2 fest gegeben; $k_1 \geqq 4$, $k_2 \geqq 4$; weiter sei $k = k_1 + k_2$, $s = \min(k_1, k_2)$. Wenn $f(x)$, $g(x)$ für alle hinreichend großen x definiert sind, $g(x) > 0$, so soll die Formel $f(x) = O(g(x))$ bedeuten, daß $\limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$ ist. Analog sollen die Formeln $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = \Omega(g(x))$, $f(x) = \underline{O}(g(x))$, $f(x) = \underline{o}(g(x))$, $f(x) = \underline{\Omega}(g(x))$ bedeuten, daß bzw. $\limsup \frac{|f|}{g} = 0$, $\limsup \frac{|f|}{g} > 0$, $\liminf \frac{|f|}{g} < \infty$, $\liminf \frac{|f|}{g} = 0$, $\liminf \frac{|f|}{g} > 0$. Es seien nun α_1, α_2 zwei positive Zahlen; mit $Q(u)$ bezeichnen wir dann die quadratische Form $\alpha_1 \sum_{i=1}^{k_1} u_i^2 + \alpha_2 \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} u_j^2$ [1]).

Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; $V(x)$ sei das Volumen dieses Ellipsoids; endlich sei

$$P(x) = A(x) - V(x), \quad S(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |P(y)|\, dy.$$

Um die „maximale" und „minimale" Größenordnung von $S(x)$ zu charakterisieren, definieren wir $f_1 = f_1(Q)$ und $f_2 = f_2(Q)$ folgendermaßen: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$S(x) = O(x^{f_1+\varepsilon}), \quad S(x) = \Omega(x^{f_1-\varepsilon}), \quad S(x) = \underline{O}(x^{f_2+\varepsilon}), \quad S(x) = \underline{\Omega}(x^{f_2-\varepsilon}).$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz 1: Für rationale Q ist

$$f_1(Q) = f_2(Q) = \frac{k}{2} - 1; \quad \text{genauer:} \quad S(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right), \quad S(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Satz 2: Für irrationale Q ist $f_1(Q) \leqq \frac{k}{2} - 1$, es gibt aber irrationale Q mit $f_1(Q) = \frac{k}{2} - 1$; genauer: für irrationale Q ist $S(x) = o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$; wenn aber $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \to 0$ (für $x \to \infty$), so gibt es ein irrationales Q mit $S(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\varphi(x)\right)$.

Dagegen gilt *Satz 3:* Für irrationales Q ist stets

$$f_2(Q) \leqq \frac{k}{2} - 1 - \frac{s-2}{s} \quad \left(\text{also} < \frac{k}{2} - 1\right);$$

---

[1]) wenn $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational bzw. irrational ist, so soll auch Q rational bzw. irrational heißen.

es gibt aber ein irrationales Q mit $f_2(Q) \leqq \frac{k}{2} - 1 - \frac{k}{k+2}$ (also $> \frac{k}{2} - 2$). Der Spielraum von f_1, f_2 ist nach unten abgegrenzt durch den *Satz 4:* Es ist $f_1(Q) \geqq f_2(Q) \geqq \frac{k}{2} - 2$; schärfer: Es ist $S(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{k}{2}-2}\right)$.

Wir klassifizieren nun die irrationalen Q folgendermaßen:

Es seien $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die Näherungsnenner von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; es sei $\nu = \nu(Q)$ die obere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche (bei $n \to \infty$) $q_{n+1} = \Omega(q_n^{1+a})$ gilt. Dann gilt *Satz 5:*

$$f_1 = \frac{k}{2} - 1 - \frac{1}{\nu + 1}, \quad f_2 \leqq \frac{k}{2} - 1 - \frac{s-2}{s - \frac{2}{\nu+1}} \quad \text{(für } \nu = \infty \text{ ist } \frac{1}{\nu+1} = \frac{2}{\nu+1} = 0$$

zu setzen).

Daraus folgt sofort *Satz 6:* a) Wenn Q rational ist, so ist $f_1 = f_2 = \frac{k}{2} - 1$; b) Wenn $\nu(Q) = 0$ ist[1]), so ist $f_1 = f_2 = \frac{k}{2} - 2$; c) In allen anderen Fällen ist $f_1 > f_2$.

Eine ausführliche Darstellung dieser Ergebnisse soll in der Mathematischen Zeitschrift (Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 3. Abh.) erscheinen.

ÜBER GITTER UND QUADRATISCHE FORMEN

Von N. HOFREITER, Wien

Es sei ein n-dim. Gitter gegeben, O sei ein beliebiger Gitterpunkt. Es gibt nur endlich viele Gitterpunkte, die O am nächsten liegen. Ich wähle ein Paar aus: E_1 (x_{1i}) und $\overline{E}_1$ $(-x_{1i})$. Nun wähle ich ein zweites Paar von Gitterpunkten aus: E_2 (x_{2i}) und $\overline{E}_2$ $(-x_{2i})$, das O am nächsten liegt und nicht auf der Geraden (OE_1) liegt, nun das nächste (es darf nicht in der Ebene $(OE_1 E_2)$ liegen) usw. bis zum n-ten Paar. Die Strecken OE_i heißen das 1., 2., ..., n-te Minimum. Es fragt sich nun, wann erzeugen die ersten n Minima ein Fundamentalparallelepiped. Diese Frage ist für die meisten Reduktionstheorien von großer Bedeutung. Es ist bekannt, daß die ersten 2 Minima in der Ebene ein Fundamentalparallelogramm erzeugen, ferner, daß die ersten 3 Minima im R_3 ein Fundamentalparallelepiped bestimmen (euklidische Maßbestimmung). Im R_4 erzeugen die ersten 4 Minima stets ein Fundamentalparallelepiped, ausgenommen ist nur ein einziges Gitter. In diesem Fall brauchen 4 erste

[1]) Bekanntlich ist $\nu = 0$ für fast alle positiven Werte von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ (im Lebesgueschen Sinne).