Eduard Čech

O obecné příbuznosti mezi dvěma plochami

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (36) 30 (1921), 4 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500838

O obecné příbuznosti mezi dvěma plochami.

Napsal

Dr. Eduard Čech.

Předloženo dne 24. června 1921.

---

1. V posledním odstavci pojednání „O trilineárních systémech čar na ploše a projektivné aplikaci ploch", předloženého této Akademii dne 21. února t. r., zabýval jsem se korespondencí trsů oskulačních rovin v páru příslušných bodů P_y, P_η dvou ploch S_y, S_η, které jsem předpokládal tak na sebe zobrazeny, že *asymptotické čáry obou soustav si odpovídají.* Za tohoto předpokladu jsme shledali, že kdykoli korespondence mezi těmito trsy jest (pro každou dvojici příslušných bodů) kolineární, je příbuznost mezi S_y, S_η projektivní aplikace složitějším způsobem definovaná Fubinim.

V dalším budeme předpokládati *jakoukoli* příbuznost mezi plochami S_y, S_η. Pro krátkost nazveme R korespondenci trsů P_y, P_η oskulačních rovin. Je-li S_y dána diferenciálními rovnicemi

$$y_{uu} + 2\,b\,y_v + f\,y = 0,\; y_{vv} + 2\,a'\,y_u + g\,y = 0, \tag{1}$$

a jsou-li ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 rovinové souřadnice v lokální soustavě souřadné o základním tetraedru $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$, ukázal jsem l. c., že oskulační rovina plošné křivky C

$$v - v_0 = \tau\,(u - u_0) + \frac{\bar\tau}{2}\,(u - u_0)^2 + \dots \tag{2}$$

v bodě P_y (u_0, v_0) má souřadnice

$$\xi_1 = 0,\; \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \tau^2 : -\tau : (\bar\tau - 2\,b + 2\,\tau^3\,a'). \tag{3}$$

Druhá plocha S_η buď dána diferenciálními rovnicemi

$$\eta_{u'u'} + 2\,\beta\,\eta_{v'} + \varphi\,\eta = 0,\; \eta_{v'v'} + 2\,\alpha'\,\eta_{u'} + \gamma\,\eta = 0. \tag{4}$$

Oskulační rovina křivky c' na ploše S_η

$$v' - v_0' = \tau' (u' - u_0') + \frac{\bar{\tau}'}{2} (u' - u_0')^2 + \dots \tag{5}$$

v bodě P_η (u_0', v_0') má v lokální soustavě souřadné příslušné bodu P_η souřadnice

$$\xi_1' = 0,\ \xi_2' : \xi_3' : \xi_4' = \tau'^2 : -\tau' : (\bar{\tau}' - 2\beta + 2 \,.\, \tau'^2 \alpha'). \tag{6}$$

Zobrazení S_y na S_η buď dáno rovnicemi

$$u' = \varphi (u, v),\quad v' = \psi (u, v), \tag{7}$$

z nichž plynou rozvoje

$$\begin{aligned} u' - u_0' &= \varphi_u (u - u_0) + \varphi_v (v - v_0) + \frac{1}{2} [\varphi_{uu} (u - u_0)^2 + \\ &\quad + 2 \varphi_{uv} (u - u_0) (v - v_0) + \varphi_{vv} (v - v_0)^2] + \dots, \\ v' - v'_0 &= \psi_u (u - u_0) + \psi_v (v - v_0) + \frac{1}{2} [\psi_{uu} (u - u_0)^2 + \\ &\quad + 2 \psi_{uv} (u - u_0) (v - v_0) + \psi_{vv} (v - v_0)^2] + \dots, \end{aligned} \tag{8}$$

kde φ_u, φ_v atd. jsou hodnoty derivací pro $u = u_0$, $v = v_0$. Z rovnic (2), (5), (8) plyne krátkým počtem, že, přísluší-li si v našem zobrazení C a C', P_y a P_η, jest

$$\tau' = \frac{\psi_u + \tau \psi_v}{\varphi_u + \tau \varphi_v},\quad \bar{\tau}' = \frac{(\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)\,\bar{\tau} + \begin{vmatrix} \varphi_u + \tau \varphi_v, & \varphi_{uu} + 2\tau \varphi_{uv} + \tau^2 \varphi_{vv} \\ \psi_u + \tau \psi_v, & \psi_{uu} + 2\tau \varphi_{uv} + \tau^2 \psi_{vv} \end{vmatrix}}{(\varphi_u + \tau \varphi_v)^3}. \tag{9}$$

Dosadíme-li z (9) do (6), obdržíme

$$\begin{aligned} &\xi_1' = 0,\ \xi_2' : \xi_3' : \xi_4' = (\psi_u + \tau \psi_v)^2 (\varphi_u + \tau \varphi_v) : - (\psi_u + \tau \psi_v) (\varphi_u + \tau \varphi_v)^2 \\ &\quad : [(\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)\,\bar{\tau} + \begin{vmatrix} \varphi_u + \tau \varphi_v, & \varphi_{uu} + 2 \tau \varphi_{uv} + \tau^2 \varphi_{vv} \\ \psi_u + \tau \psi_v, & \psi_{uu} + 2 \tau \psi_{uv} + \tau^2 \psi_{vv} \end{vmatrix} - \\ &\quad - 2 \beta (\varphi_u + \tau \varphi_v)^3 + 2 \alpha' (\psi_u + \tau \psi_v)^3]. \end{aligned} \tag{10}$$

Vyloučíme-li τ a $\bar{\tau}$ z rovnic (3) a (10) dostáváme rovnice korespondence R:

$$\begin{aligned} \varrho\, \xi_2' &= (\psi_v \xi_2 - \psi_u \xi_3)^2 (\varphi_u \xi_3 - \varphi_v \xi_2), \\ \varrho\, \xi_3' &= (\psi_v \xi_2 - \psi_u \xi_3) (\varphi_u \xi_3 - \varphi_v \xi_2)^2, \\ \varrho\, \xi_4' &= (\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v) (\xi_2 \xi_3 \xi_4 + 2 b\, \xi_3^3 + 2 a' \xi_2^3) \\ &\quad - 2 \beta (\varphi_u \xi_3 - \varphi_v \xi_2)^3 - 2 \alpha' (\psi_v \xi_2 - \psi_u \xi_3)^3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} \varphi_u \xi_3 - \varphi_v \xi_2, & \varphi_{uu} \xi_3^2 - 2 \varphi_{uv} \xi_2 \xi_3 + \varphi_{vv} \xi_2^2 \\ \psi_u \xi_3 - \psi_v \xi_2, & \psi_{uu} \xi_3^2 - 2 \psi_{uv} \xi_2 \xi_3 + \psi_{vv} \xi_2^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

2. Z rovnic (11) vidíme, že R jest obecně *kubická* Cremonova příbuznost mezi oběma trsy. Stupeň se sníží, dá-li se na pravo vytknouti ξ_2 nebo ξ_3. Podmínky, aby bylo lze vytknouti ξ_2, jsou

$$\varphi_u \psi_u = 0,\ (\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)\, b - \varphi_u^3 \beta + \psi_u^3 \alpha' + \tfrac{1}{2} (\varphi_u \psi_{uu} - \psi_u \varphi_{uu}) = 0. \tag{12}$$

Podobně jsou podmínky, aby bylo lze vytknouti l_3,

(13) $\varphi_v \psi_v = 0, \ (\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v) a' + \varphi_v^3 \beta - \psi_v^3 \alpha' - \frac{1}{2} (\varphi_v \psi_{vv} - \psi_v \varphi_{vv}) = 0.$

Jsou-li splněny rovnice (12) *nebo* (13) jest, *R kvadratická*, jsou-li však *současně* splněny (12) i (13), jest *R lineární*. Rovnice (12) mohou býti splněny buď tak, že jest

(12ª) $$\psi_u = 0, \ \psi_v b - \varphi_u^2 \beta + \tfrac{1}{2} \psi_{uu} = 0,$$

nebo tak, že

(12ᵇ) $$\varphi_u = 0, \ \varphi_v b - \psi_u^2 a' + \tfrac{1}{2} \varphi_{uu} = 0.$$

Podobně rozpadají se podmínky (13):

(13ª) $$\varphi_v = 0, \ \varphi_u a' - \psi^2_v \alpha' + \tfrac{1}{2} \varphi_{vv} = 0,$$

(13ᵇ) $$\psi_v = 0, \ \psi_u a' - \varphi_v^2 \beta + \tfrac{1}{2} \psi_{vv} = 0.$$

Odtud vysvítá okamžitě, že stupeň korespondence R jistě rovná se třem, když žádné z obou asymptotických tečen plochy S_y v P_y neodpovídá asymptotická tečna plochy S_η. V tomto případě příslušejí svazkům rovin trsu P_η v trsu P_y kužele třetí třídy, které mají vesměs: v tečné rovině plochy S_y v P_y dvojnou rovinu tečnou a v asymptotických tečnách pevné dotyčné přímky vytvořující; mimo to dvě jednoduché pevné tečné roviny ω_1, ω_2, z nichž každá obsahuje o raz jedné asymptotické tečny plochy S_η. Jeden z těchto kuželu rozpadá se ve svazek $(\omega_1 \omega_2)$ a v oba svazky rovin asymptotickými tečnami. Uvažujme na S_y soustavu ∞^2 křivek $[C]$ takových, že oskulační rovina každé z nich v obecném bodě P_y plochy jde přímkou $(\omega_1 \omega_2)$. Této soustavě odpovídá na S_η soustava ∞^2 křivek $(C']$; a v každém bodě P_η plochy S_η obsahují oskulační roviny všech jím jdoucích křivek soustavy $[C')$ pevnou přímku. Geodeticke zobrazení poskytuje známou ilustraci této okolnosti; ale na existenci soustav $[C]$, $[C')$ při *jakémkoli* zobrazení, ve kterém si nepříslušejí asymptotické čáry, nebylo tuším dosud poukázáno. Když jedné (nebo oběma) soustavě asymptotických křivek plochy S_y příslušejí asymptotické křivky na S_η, ale tak, že korespondence R zustává kubická, neexistují soustavy $[C]$, $[C')$. Obraťme se ku případu, kdy R je *kvadratická*. Buďte na př. splněny rovnice (12ª). Je-li tomu tak *pro všecka u, v*, jest následkem $\psi_u = 0$ také $\psi_{uu} = 0$ a druhá z rovnic (12ª) dá se psáti jednodušeji

(14) $$\psi_v b - \varphi_u^2 \beta = 0.$$

Odtud plyne, ježto při přechodu k adjungovanému systému diferenciálních rovnic b, β mění pouze znamení: Je-li příbuznost R kvadratická pro *každou* dvojici příslušných bodu, je také korelativní příbuznost kvadratická. Prvá z rovnic (12ª) praví, že asymptotické tečně $d\,v = 0$ plochy S_η v P_η přísluší asymptotická tečna $d\,v' = 0$ plochy S_η v P_η. Svazkum rovin trsu P_y příslušejí nyní v trsu P_y kužele druhé třídy, dotýkající se tečné roviny plochy S_y podél asymptotické tečny $d\,u = 0$ a mající mimo to další pevnou tečnou rovinu ω. Tato nesplyne s tečnou rovinou plochy S_y, jestliže asymptotické tečně $d\,u = 0$ plochy S_y v P_y nepřísluší asymptotická tečna plochy S_y. Zvolíme-li pro každý bod P_y libovolnou přímku v rovině ω, sestrojíme nekonečné množství soustav [C], [C']. Poznamenejme, že R jest jistě kvadratická (nebo lineární), je-li $b = \beta = 0$, $\psi_u = 0$, t. j. jsou-li obě plochy zborcené a odpovídají-li si přímky vytvořující. I když obojí asymptotiky si odpovídají, muže býti R kvadratická; pak ale splyne ω s tečnou rovinou plochy S_y (kužele odpovídající svazkum rovin mají styk druhého řádu podél jedné z asymptotických tečen) a soustavy [C], [C'] neexistují.

Konečně, aby R byla lineární, musí býti splněny rovnice (12) i (13). To lze jen tak, že jsou splněny (12^a) a (13^a), nebo, což jen označením se liší, (12^b) a (13^b); jinak by bylo $\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v = 0$. Také zde platí: je-li R lineární pro *každou* dvojici příslušných bodů, jest i korelativní korespondence lineární. Soustav [C], [C') existuje ovšem nyní nekonečně mnoho. Jelikož tento případ vyžaduje $\psi_u = \varphi_v = 0$, nebo $\varphi_u = \psi_v = 0$, tedy v každém případě korespondenci asymptotických čar, vidíme, že lze náš výsledek z cit. poj. doplniti takto: *Každá korespondence mezi dvěma nerozvinutelnými plochami, při níž v každé dvojici příslušných bodů oskulační roviny křivek si odpovídají kolineárně, jest projektivní aplikace.*