Eduard Čech

Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 4 (1921), 37 pp.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500842`

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1921 Čís. 4

PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE PĚTI SOUMEZNÝCH MIMOBĚŽEK

(GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DE CINQ DROITES INFINEMENT VOISINES)

NAPSAL

DR. EDUARD ČECH

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 59.

PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE PĚTI SOUMEZNÝCH MIMOBĚŽEK.

(AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS.)

Ve svém pojednání „Moutardovy kvadriky“ (Spisy vydávané přírodov. fakultou v Brně, č. 3.) zavedl jsem pro projektivní studium plochy Π v okolí neparabolického bodu O jistou křivku C^λ, ležící v tečné rovině Π, a kužel Γ^λ o vrcholu v O, a provedl jsem užitím těchto útvarů konstrukci Moutardových kvadrik. C^λ a Γ^λ nejsou plochou úplně určeny, nýbrž závisejí od libovolného parametru λ kvadriky Q^λ svazku (Q), tamtéž definovaného. V tomto pojednání aplikuji tyto úvahy na plochy zborcené a rozšiřuji je tak, že uvažuji okolí celé vytvořující přímky. Jest tedy poměr této a citované práce obdobný, jako byl poměr třetí a druhé části mého pojednání „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivného prostoru“*

Pojednání rozděleno je na tři části. Prvé dvě části zabývají se elementem plochy v souvislosti s Moutardovými kvadrikami a automorfními projektivními transformacemi; v prvé jedná se o plochách se dvěma, ve druhé o plochách s jedinou větví fleknodální čáry. Ve třetí části je poukázáno na souvislost zavedených prvků s jinými geometrickými otázkami.

ČÁST I.

Plochy zborcené o dvou různých větvích fleknodální čáry. Kvadriky W_1 a W_2.

1. Buď přímka p $(x_2 = x_3 = 0)$ vytvořující přímkou zborcené plochy Π. Fleknody F_1, F_2 na p buďte *různé*; pak lze rovnice Π předpokládati ve tvaru**

$$\frac{p_{12}}{p_{14}} = z + z^3 + \alpha z^4 + \quad \frac{p_{23}}{p_{14}} = -z^2 - z^4 + \tag{1}$$
$$\frac{p_{31}}{p_{14}} = \gamma z^4 + \ldots, \frac{p_{24}}{p_{14}} = \delta z^4 + \ldots, \frac{p_{34}}{p_{14}} = z.$$

Body F_1, F_2 mají resp. souřadnice $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Přímky f_1 $(x_2 = x_4 = 0)$ a f_2 $(x_1 = x_3 = 0)$ jsou fleknodální tečny. Oskulační hyperboloid H má rovnici

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0. \tag{2}$$

* Dvě zmíněná, pro další důležitá pojednání budu citovati krátce M, E_3. E_3 III 4 (16) (t. j. E_3, část III, odst. 4, rovn. (16)).

Tu soustavu přímek na H, jíž náleží p, nazveme *prvou*; podobně později při W_1, W_2*.

Rovnici Π v souřadnicích bodových obdržíme eliminací p_{ik} z rovnic (1) a rovnic

(3) $$p_{24}x_1 + p_{41}x_2 + p_{12}x_4 = p_{34}x_1 + p_{41}x_3 + p_{13}x_4 = 0.$$

Zaveďme novou soustavu souřadnou substitucí

(4) $$\begin{gathered} x_1 = y_4, x_2 = y_3 - \mu y_1, \; x_3 = -y_1, \; x_4 = \mu y_4 - y_2, \\ y_1 = -x_3, \; y_2 = \mu x_1 - x_4, \; y_3 = x_2 - \mu x_3, \; y_4 = x_1. \end{gathered}$$

Dosadíme-li do (3) z (1) a přejdeme k nové soustavě souřadné, máme

$$\begin{gathered} [\delta z^4 + \ldots] y_4 - y_3 + \mu y_1 + [z + z^3 + \alpha z^4 + \ldots](\mu y_4 - y_2) = 0, \\ z y_4 + y_1 - (\gamma z^4 + \ldots)(\mu y_4 - y_2) = 0. \end{gathered}$$

Ze druhé z těchto rovnic plyne

$$z = -\frac{y_1}{y_4} + \mu\gamma\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^4 + \ldots.$$

Dosadíme-li do prvé, dospějeme k vyjádření $\frac{y_3}{y_4}$ řadou mocnin $\frac{y_1}{y_4}$, $\frac{y_2}{y_4}$:

(5) $$\frac{y_3}{y_4} = \frac{y_1 y_2}{y_4^2} - \mu\frac{y_1^3}{y_4^3} + (\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)\frac{y_1^4}{y_4^4} + \frac{y_1^3 y_2}{y_4^4} + \ldots,$$

kde vynechané členy jsou aspoň pátého stupně. Rovnice H je v nových souřadnicích

(6) $$y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0.$$

Rovnice (5) je rovnicí Π v souřadnicích y v okolí bodu $M(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 0 : 0 : \mu)$. Zabývejme se okolím tohoto bodu (předpokládajíce $\mu \neq 0$). Ježto H náleží svazku (Q), jest rovnice kvadriky Q^λ obecně**

(7) $$2(y_1 y_2 - y_3 y_4) + \lambda y_3^2 = 0.$$

Rovnice C^λ je***

(8) $$-5\mu^2 y_1^3 + 4(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta) y_1^2 y_2 - 2 y_1 y_2^2 - 2\lambda y_2^3 + 4\mu y_1 y_2 y_4 = 0$$

a rovnice Γ^λ †

(9) $$-5\mu^2 v_2^3 - 4(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta) v_1 v_2^2 + 2 v_1^2 v_2 + 2\lambda v_1^3 + 4\mu v_1 v_2 v_3 = 0.$$

Volíme-li $\lambda \neq 0$, je tudíž řád C^λ i třída Γ^λ rovna třem.

2. *Volíme-li však* — jak můžeme učiniti — *oskulační hyperboloid H za kvadriku Q^λ* $(\lambda = 0)$, jest C^0 *kuželosečka*

(10) $$-5\mu^2 y_1^2 + 4(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta) y_1 y_2 - 2 y_2^2 + 4\mu y_2 y_4 = 0,$$

a Γ^0 je *kvadratický kužel*

(11) $$2 v_1^2 - 4(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta) v_1 v_2 - 5\mu^2 v_2^2 + 4\mu v_1 v_3 = 0.$$

---

* Litery Π, p, F_1, F_2, f_1, f_2, H podrží v dalším právě definovaný význam.

** M 4 (10).

*** M 5 (21).

† M 5 (23); v_i jsou kontragredientní k y_i.

*C^0 dotýká se v M křivé čáry asymptotické, majíc zde křivost rovnu pěti šestinám této**. Vytvořující přímku p protne C^0 po druhé v bodě M', pro nějž jest

$$y_1:y_2:y_3:y_4 = 0:2\mu:0:1,$$

čili

$$x_1:x_2:x_3:x_4 = 1:0:0:-\mu,$$

t. j. *bod M' jest harmonicky sdružen s M vzhledem k fleknodům $F_1\,F_2$*. Tečna t_μ v M' k C^0 jest

$$y_3 = 2(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)y_1 - y_2 + 2\mu y_4 = 0,$$

čili v původních souřadnicích

(12) $$x_2 - \mu x_3 = \mu x_1 + x_4 - 2(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)x_3 = 0.$$

Eliminujeme-li μ, vidíme, že místem tečny t_μ, opisuje-li M přímku p, je *kvadrika*

(13) $$x_1x_2 + x_3x_4 - 2(\gamma x_2^2 + \alpha x_2x_3 + \delta x_3^2) = 0.$$

Tuto kvadriku budeme značiti W_1. Korelativně: Γ^0 dotýká se teční roviny Π v M podél asymptotické tečny; druhá tečná rovina ke Γ^0 přímkou p je tečná rovina k Π v M' a dotýká se Γ^0 podél přímky t'_μ, dané rovnicemi

$$v_4 = v_1 - 2(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)v_2 + 2\mu v_3 = 0,$$

čili v původních souřadnicích

(14) $$u_1 + \mu u_4 = \mu u_2 - u_3 + 2(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)u_4 = 0.$$

Eliminujeme-li opět μ, nalézáme zase *kvadriku* jako místo přímky t'_μ, opisuje-li M přímku p. Rovnice této kvadriky, kterou budeme značiti W_2, jest

(15) $$u_1u_2 + u_3u_4 - 2(\gamma u_1^2 - \alpha u_1u_4 + \delta u_4^2) = 0.$$

V bodových souřadnicích jest rovnice W_2

(16) $$x_1x_2 + x_3x_4 + 2(\gamma x_2^2 - \alpha x_2x_3 + \delta x_3^2) = 0.$$

W_1 a W_2 jsou vždy *obecné* kvadriky. Porovnáním rovnic (13) a (16) vidíme, že jest rozeznávati tři případy

1. $\gamma\delta \neq 0$, 2. $\gamma = 0,\ \delta \neq 0$ nebo $\gamma \neq 0,\ \delta = 0$, 3. $\gamma = \delta = 0$.

Pro $\gamma = \delta = 0$, a jen tehdy, *splynou* W_1, W_2. Jinak dotýkají se W_1 a W_2 podél přímky p**, a protínají se tedy mimo to ve dvou přímkách druhé soustavy, jichž rovnice jsou

(17) $$\begin{aligned}\sqrt{\delta}\,x_3 + \sqrt{-\gamma}\,x_2 &= \sqrt{\delta}\,x_1 - \sqrt{-\gamma}\,(x_4 - 2\alpha x_2) = 0,\\ \sqrt{\delta}\,x_3 - \sqrt{-\gamma}\,x_2 &= \sqrt{\delta}\,x_1 + \sqrt{-\gamma}\,(x_4 - 2\alpha x_2) = 0.\end{aligned}$$

Pro $\gamma\delta \neq 0$ jsou tyto dvě přímky různé, pro $\gamma = 0$ splynou v f_2, pro $\delta = 0$ v f_1. Přímky druhé soustavy na W_1 obsahující resp. F_1, F_2 jsou

(18) $$x_2 = x_4 - 2\delta x_3 = 0,\quad x_3 = x_1 - 2\gamma x_2 = 0.$$

---

* M 5.

** Jak je bez počtu patrno; neboť tečná rovina k W_1 i k W_2 ve kterémkoli bodě M přímky p je dle definice těchto kvadrik tečná rovina Π v bodě M', určeném rovnicí $(MM'F_1F_2) = -1$.

Pro $\delta = 0$ je prvá, pro $\gamma = 0$ druhá z nich fleknodální tečnou. Analogické přímky na W_2 jsou

$$(19) \qquad x_2 = x_4 + 2\delta x_3 = 0, \; x_3 = x_1 + 2\gamma x_2 = 0,$$

jež jsou patrně tečny Π konjugované s tečnami (18). To ostatně také odtud je patrno, že, jak snadno verifikujeme, W_1 a W_2 *jsou navzájem polární vzhledem ku* Π.

3. Z (1) nalezneme ihned

$$(20) \qquad \delta p_{31} - \gamma p_{24} = 0$$

jako rovnici *oskulačního lineárního komplexu* Ω plochy Π v okolí p. Pro $\gamma\delta = 0$ je Ω speciální; přímkou řídící jest pro $\gamma = 0$ fleknodální tečna f_2, pro $\delta = 0$ f_1. Pro $\gamma = \delta = 0$ je (20) identitou; je-li tudíž *identicky* $\gamma = \delta = 0$, náleží Π (nespecielní) lineární kongruenci, což později znovu potvrdíme. Buď nyní $\gamma\delta \neq 0$, tedy Ω nespeciální; polarita vzhledem k Ω jest

$$(21) \qquad \begin{aligned} u_1 : u_2 : u_3 : u_4 &= \delta x_3 : \gamma x_4 : -\delta x_1 : -\gamma x_2, \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= \gamma u_3 : \delta u_4 : -\gamma u_1 : -\delta u_2. \end{aligned}$$

Odtud pak vychází okamžitě: W_1 a W_2 *jsou navzájem polární vzhledem k* Ω. Je známo, že existují na p dva body, jimž příslušejí v Ω jejich roviny tečné. Rovnice těchto bodů, Wilczynskim* nazvaných komplexovými body (complex points) přímky p, jest

$$(22) \qquad \gamma u_1^2 - \delta u_4^2 = 0.$$

Dvojné body involuce na p, jíž náleží jak dvojice fleknodů, tak dvojice komplexových bodů, jmenuje Wilczynski** *involuční body* (involute points) přímky p. Rovnice těchto jest tedy

$$(23) \qquad \gamma u_1^2 + \delta u_4^2 = 0.$$

Z rovnic (17) vidíme nyní, že každá z obou přímek společných kvadrikám W_1, W_2 jde jedním z obou involučních bodů.

4. Klademe-li v rovnicích (1) $s = \varepsilon$, kde $|\varepsilon|$ je malá, obdržíme vytvořující přímku p_ε plochy Π, blízkou přímce p. Rovnice oskulační lineární kongruence K_ε plochy Π v místě p_ε obdrží se anulováním determinantů pátého stupně matice

$$\left|\begin{array}{lllll} p_{12}, & \varepsilon + \varepsilon^3 + \alpha\varepsilon^4 + \ldots, & 1 + 3\varepsilon^2 + 4\alpha\varepsilon^3 + \ldots, & 6\varepsilon + 12\alpha\varepsilon^2 + \ldots, & 6 + 24\alpha\varepsilon + \ldots \\ p_{23}, & -\varepsilon^2 - \varepsilon^4 + & -2\varepsilon - 4\varepsilon^3 + \ldots, & -2 - 12\varepsilon^2 + \ldots, & -24\varepsilon + \\ p_{31}, & \gamma\varepsilon^4 + \ldots, & 4\gamma\varepsilon^3 + \ldots, & 12\gamma\varepsilon^2 + & 24\gamma\varepsilon + \\ p_{14}, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ p_{24}, & \delta\varepsilon^4 + \ldots, & 4\delta\varepsilon^3 + \ldots, & 12\delta\varepsilon^2 + \ldots, & 24\delta\varepsilon \\ p_{34}, & \varepsilon, & 1, & 0, & 0 \end{array}\right|$$

* Wilczynski, Projektive differential geometry of curves and ruled surfaces, str. 208.

** Wilczynski, op. cit. str. 206.

Uvažujme ty determinanty, jež vzniknou resp. vynecháním 3. a 5. řádků. Máme takto rovnice K_ε:

$$(24)\quad \begin{aligned} -(1+4\alpha\varepsilon)p_{24}+4\varepsilon\delta(p_{12}-p_{34})+(2)=0,\\ -(1+4\alpha\varepsilon)p_{31}+4\varepsilon\gamma(p_{12}-p_{34})+(2)=0,\end{aligned}$$

značí-li (k) členy dělitelné ε^k. Rovnice obecného lineárního komplexu kongruencí K_ε je tedy

$$(25)\quad -(1+4\alpha\varepsilon)(\lambda_1 p_{24}+\lambda_2 p_{31})+4\varepsilon(\lambda_1\delta+\lambda_2\gamma)(p_{12}-p_{34})+(2)=0.$$

Invariant tohoto komplexu je $\lambda_1\lambda_2+(2)$. Pro speciální komplexy je tedy buď $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=(2)$, nebo $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=(2)$. Souřadnice řídících přímek kongruence K_ε jsou tedy

$$(26)\quad \begin{aligned} &p_{12}:p_{23}:p_{31}:p_{14}:p_{24}:p_{34}=\\ &=-4\varepsilon\gamma+(2):(2):(2):(2):-[1+4\alpha+(2)]:4\varepsilon\gamma+(2),\\ &p_{12}:p_{23}:p_{31}:p_{14}:p_{24}:p_{34}=\\ &=-4\varepsilon\delta+(2):(2):-(1+4\alpha\varepsilon+(2):(2):(2):4\varepsilon\delta+(2).\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že, je-li *identicky* γ *nebo* δ rovno nule, má plocha Π *jednu*, je-li identicky $\gamma=\delta=0$, *dvě* přímky řídící. Přímky (26) protínají ovšem p^ε; pro souřadnice průsečíků nalezneme

$$(27)\quad \begin{aligned} x_1:x_2:x_3:x_4&=-4\varepsilon\gamma+(2):\varepsilon+(2):(2):1,\\ x_1:x_2:x_3:x_4&=1:(2):\varepsilon+(2):-4\varepsilon\delta+(2).\end{aligned}$$

Jsou tudíž *rovnice tečen fleknodální křivky* v bodech na p

$$(28)\quad x_2=x_4+4\delta x_3=0,\quad x_3=x_1+4\gamma x_2=0.$$

Srovnáním s rovnicemi (18) nalézáme výsledek: ***Přímka harmonicky sdružená s vytvořující přímkou p vzhledem k fleknodální tečně f_1 (f_2) a tečně fleknodální křivky v F_1 (F_2) náleží kvadrice W_2.***

5. Kvadriky H a W_1 protínají se v přímce p a v kubické křivce C_3. C_3 může se ovšem rozpadnouti; a to v kuželosečku a jednu z fleknodálních tečen, je-li γ *nebo* $\delta=0$, a v obě fleknodální tečny a jednu přímku prvé soustavy pro $\gamma=\delta=0$. Vždy však jsou přímky prvé soustavy na H (na W_1) bisekantami C_3. Dvě z nich dotýkají se tedy C_3 (pro $\gamma=\delta=0$: jedna z nich náleží C_3). Tu přímku h (w_1) prvé soustavy na H (na W_1), která je harmonicky sdružena s p vzhledem k těmto dvěma tečnám (pro $\gamma=\delta=0$: onu přímku, jež náleží C_3) nazveme *hlavní přímkou kvadriky* H (W_1). Souřadnice průsečíků přímky

$$(29)\quad x_2+\lambda x_4=x_3+\lambda x_1=0$$

prvé soustavy na H s C_3 jsou

$$x_1:x_2:x_3:x_4=1:-\lambda\tau:-\lambda:\tau,$$

kde za τ je vzíti kořeny rovnice

$$\gamma\lambda\tau^2+(\alpha\lambda+1)\tau+\delta\lambda=0,$$

jejíž diskriminant jest

$$(30) \qquad (\alpha^2 - 4\gamma\delta)\,\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1.$$

Obě zmíněné tečny odpovídají těm hodnotám λ_1, λ_2 parametru λ, pro něž výraz (30) rovná se nule. Přímka p odpovídá hodnotě $\lambda = 0$; tedy pro hlavní přímku h kvadriky H bude

$$\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2},$$

čili

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha},$$

a rovnice přímky h jsou tudíž

$$(31) \qquad \alpha x_2 - x_4 = \alpha x_3 - x_1 = 0.$$

Zcela stejně postupujeme pro W_1. Rovnice obecné přímky prvé soustavy na W_1 jest

$$(32) \qquad 2\gamma x_2 - (\lambda - \alpha) x_3 - x_1 = 2\delta x_3 + (\lambda + \alpha) x_2 - x_4 = 0.$$

Její průsečíky s C_3 naleznou se, řešíme-li rovnice (32) spolu s rovnicí (2) Dosadíme-li do (2) za x_1 a x_4 z (32), obdržíme rovnice

$$\gamma x_2^2 - \lambda x_2 x_3 - \delta x_3^2 = 0,$$

jejíž diskriminant je $\lambda^2 + 4\gamma\delta$. Ježto v něm schází člen s λ^1, a přímka p přísluší dle (32) hodnotě $\lambda = \infty$, vidíme, že pro hlavní přímku w_1 kvadriky W_1 jest $\lambda = 0$, a její rovnice jsou tudíž

$$(33) \qquad x_1 - 2\gamma x_2 - \alpha x_3 = x_4 - 2\delta x_3 - \alpha x_2 = 0.$$

V úvaze právě provedené můžeme místo W_1 vzíti také W_2; ježto však W_2 jest polární k W_1 vzhledem ku H, jest *hlavní přímkou w_2 kvadriky W_2* polára přímky w_1 vzhledem ku H, tedy přímka

$$(34) \qquad x_1 + 2\gamma x_2 - \alpha x_3 = x_4 + 2\delta x_3 - \alpha x_2 = 0.$$

6. Souřadný tetraedr pro soustavu souřadnou, v níž rovnice Π mají tvar (1), není zcela určen; hranami jeho jsou vždy p, f_1, f_2, a hrana protější k p jest libovolná přímka prvé soustavy na H. *Zvolme za tuto hranu hlavní přímku h kvadriky H.* Pak bude

$$\alpha = 0,$$

a rovnice h, w_1, w_2 budou jednodušeji

$$(35) \qquad \begin{aligned} &(h) && x_1 = x_4 = 0, \\ &(w_1) && x_1 - 2\gamma x_2 = x_4 - 2\delta x_3 = 0, \\ &(w_2) && x_1 + 2\gamma x_2 = x_4 + 2\delta x_3 = 0. \end{aligned}$$

Vrcholy tohoto *kanonického souřadného tetraedru* jsou: oba fleknody F_1, F_2 a průsečíky G_1, G_2 přímky h s fleknodálními tečnami f_1, f_2. Rovnice (35) ukazují, že přímky p, h; w_1, w_2 protínají obě přímky F_1G_2, F_2G_1, a to každou z obou ve dvou harmonických pářech bodů. Leží tedy p, h, w_1, w_2 na kvadrice, jejíž rovnice jest

$$\delta x_1 x_3 - \gamma x_2 x_4 = 0. \tag{36}$$

Předpokládejme souřadný tetraedr tak volen, jak právě řečeno. Rovnice plochy Π jsou

$$\begin{aligned} p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \\ = z + z^3 + 0 \,.\, z^4 + \quad - z^2 - z^4 + \ldots : \gamma z^4 + \ldots : 1 : \delta z^4 - \end{aligned} \tag{37}$$

Je-li $\gamma \neq 0$, transformujme jednotkový bod substitucí

$$x_1 = \gamma \bar{x}_1, \; x_2 = \bar{x}_2, \; x_3 = \gamma \bar{x}_3, \; x_4 = \bar{x}_4.$$

Tvar rovnic (37) změní se jen potud, že místo γ, δ bude resp. 1, $\gamma\delta$. To jest, pro $\gamma \neq 0$ lze rovnice Π uvésti na *kanonický tvar*

$$\begin{aligned} p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \\ = z + z^3 + \ldots : - z^2 - z^4 + \ldots : I z^4 + \ldots : 1 : \quad : z, \end{aligned} \tag{38}$$

kde vynechané členy jsou aspoň pátého stupně v z, a kde

$$I = \gamma\delta.$$

Předpokládejme nejprve $\gamma\delta \neq 0$ (obecný případ. Vedle identity jediná kolineace, totiž

$$\varrho x_1 = \bar{x}_1, \; \varrho x_2 = \bar{x}_2, \; \varrho x_3 = -\bar{x}_3, \; \varrho x_4 = -\bar{x}_4 \tag{39}$$

nemění rovnic (38) ve členech vypsaných. Tato kolineace je *zborcená involuce o osách* $F_1 G_2$, $F_2 G_1$, jež je tedy jediná (mimo identitu) kolineace, převádějící Π v plochu mající s Π v každém bodě přímky p styk čtvrtého řádu. Geometricky i analyticky je patrno, že *polarita vzhledem k oskulačnímu lineárnímu komplexu* Ω má tutéž vlastnost, a tedy i součin obou, jenž jest (ježto $F_1 G_2$, $F_2 G_1$ náležejí komplexu, protínajíce w_1 i w_2, jež jsou patrně reciproké poláry vzhledem k Ω) *polarita vzhledem ke kvadrice*, jejíž rovnice jest

$$\delta x_1 x_3 + \gamma x_2 x_4 = 0. \tag{40}$$

Srovnání s rovnicí (36) ukazuje, že obě kvadriky (36) a (40) jsou vepsány do téhož čtyřúhelníka $F_1 G_2$, GF_2 a že jsou *harmonické*.

Provedeme-li substituci

$$x_1 = \bar{x}_4, \; x_2 = -I\bar{x}_3, \; x_3 = i\bar{x}_2, \; x_4 = iI\bar{x}_1, \; (i^2 + 1 = 0), \tag{41}$$

přejdou rovnice (38) v podobné, jež se v koeficientech vypsaných liší jen tím, že místo I vystoupí $-I$. *I^2 jest absolutní invariant pěti soumezných přímek.* Jestliže však rozlišujeme oba fleknody, *určitý* berouce za F_1 a druhý za F_2, jest již I absolutní invariant; vyměníme-li F_1, F_2, přejde I v $-I$.

Buď nyní za druhé $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$. V rovnicích (38) jest nyní $I = 0$. Zborcená involuce o osách $F_1 G_2$, $F_2 G_1$ jest opět kromě identity jediná kolineace, jež přejde Π v plochu mající s ní podél p styk čtvrtého řádu. Korelace této vlastnosti jsou opět dvě, ale jiného typu než dříve. Jest to korelace

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \bar{x}_2 : \bar{x}_1 : -i\bar{x}_4 : +i\bar{x}_3 \quad (i^2+1=0) \tag{42}$$

a její inversní. Korelace (42) je cyklická řádu čtyři a grupa našich čtyř transformací má jiné složení než dříve. Charakterisovati můžeme korelaci (42) takto: Kterémukoli bodu na $F_2 G_1$ přísluší v korelaci s ním incidentní rovina svazku $F_1 G_2$; kterémukoli bodu na $F_1 G_2$ přísluší ta rovina svazku $F_2 G_1$, jež spolu s oním bodem dělí harmonicky $F_1 G_2$; kterémukoli bodu M na p přísluší tečná rovina Π v tom bodě M' na p, pro který je $(MM'F_1F_2) = i$.

Je-li konečně $\gamma = \delta = 0$, lze rovnice Π uvésti na tvar

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = z + z^3 + \ldots : -z^2 - z^4 + \ldots : \ldots : 1 : \ldots : z,$$

kde vynechané členy počínají pátou mocninou z. Kolineací, jimiž přejde Π v plochu mající s ní podél p styk čtvrtého řádu, jest nyní nekonečné množství. Jsou to především kolineace

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \bar{x}_1 : k\bar{x}_2 : \bar{x}_3 : k\bar{x}_4, \tag{43}$$

jež jsou biaksiální kolineace o osách f_1, f_2 a libovolném invariantu, dále kolineace

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1 : k\bar{x}_2 : -\bar{x}_3 : -k\bar{x}_4, \tag{44}$$

jež obdržíme, násobíme-li předchozí zborcenou involucí o osách $F_1 G_2$, $F_2 G_1$, a konečně kolineace

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \bar{x}_4 : \pm ik\bar{x}_3 : \pm ix_2 : kx_1. \tag{45}$$

Korelace obdržíme, násobíme-li všecky tyto kolineace na př. korelací

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \bar{x}_3 : \bar{x}_4 : \bar{x}_1 : x_2. \tag{46}$$

7. Kvadriky W_1, W_2 slouží ke stanovení oskulačních kuželoseček rovinných řezů plochy Π v bodech přímky p. Abychom stanovili oskulační kuželosečku průseku Π s rovinou ϱ v bodě $M \equiv (p\varrho)$, máme následující postup*: Buď t průsečnice ϱ s tečnou rovinou μ plochy Π v M (tečna průseku) a r libovolna (neincidentní s M) přímka roviny ϱ, R průsečík (tr). V $\Sigma_{\frac{3}{2}}$ nechť přísluší bodu R rovina ϱ' a rovině ϱ bod R'. Buď m_1 vytvořující přímka druhé soustavy kvadriky W_1 v rovině μ, a m_2 vytvořující přímka druhé soustavy kvadriky W_2 bodem M. Nechť kuželosečka C dotýká se v M asymptotické tečny Π, má zde křivost rovnu $+\frac{5}{6}$ křivosti asymptotické křivky a dotýká se m_1 v průsečíku jejím s p; nechť kužel druhého stupně Γ dotýká se μ podél asymptotické tečny Π v M, maje podél této přímky křivost (lim poměru úhlu tečných rovin k úhlu přímek vytvořujících) rovnu $+\frac{6}{5}$ křivosti plochy

* Viz M5.

tečen asymptotické křivky, a dotýká se roviny $(m_2 p)$ podél m_2. Přímka t protne C mimo v M v bodě N; přímkou t jde ku Γ mimo μ druhá tečná rovina ν. Určeme bod R'' na t a rovinu ϱ'' přímkou t tak, aby $(MNRR'') = (\mu\nu\varrho\varrho'') = -1$. Buď r_1 reciproká polára r vzhledem ku H. Ve zborceném svazku určeném přímkami r_1, $R'R'' \equiv r_2$, $(\varrho'\varrho'') \equiv r_3$ určeme přímku r_0 tak, aby $(r_2 r_3 r_1 r_0) = \frac{1}{3}$. Přímka r_0 protne ϱ v bodě R_0. Hledaná kuželosečka oskulační jest pak určena tím, že v bodě M má styk druhého řádu s H a že polárou bodu R_0 vzhledem k ní je přímka r.

8. Konstrukce právě popsaná má význam jen tehdy, není-li M fleknod. Uvažujme na př. fleknod F_1. Rovnice Π v okolí F_1 jest*

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3 x_4}{x_1^2} + \delta\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^4 - \frac{x_2 x_3^3}{x_1^4} + \dots \tag{46}$$

Tečně

$$x_2 = x_4 - n x_3 = 0 \tag{47}$$

přísluší Moutardova kvadrika

$$n^2 (x_1 x_2 - x_3 x_4) - (n + \delta) x_2^2 = 0. \tag{48}$$

Jinak řečeno: Uvažujme svazek kvadrik, dotýkajících se H podél p i podél f_1; kvadrika

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 + \lambda x_2^2 = 0 \tag{49}$$

jest Moutardovou kvadrikou pro dvě tečny (47), totiž pro ty, pro něž je

$$\lambda n^2 + n + \delta = 0. \tag{50}$$

Pro krátkost nazveme *ukazatelkou kvadriky* (49) přímku

$$x_2 = x_3 + 2\lambda x_4 = 0. \tag{51}$$

Kvadriku (49) můžeme, známe-li její ukazatelku, takto sestrojiti: Přímka (51) leží na určité kvadrice, jež se dotýká H podél p a podél *druhé* fleknodální tečny f_2; rovnice této kvadriky jest

$$x_3^2 - 2\lambda (x_1 x_2 - x_3 x_4) = 0. \tag{52}$$

Buď R libovolný bod kvadriky (52) a ϱ rovina příslušná bodu R v transformaci Σ_1. Nechť ϱ protne tečnou rovinu Π ve *druhém* fleknodu F_2 v přímce r. Kvadrika (49) jest pak stanovena tím, že polární rovina bodu R vzhledem k ní prochází přímkou r. Jsou-li totiž x_1, x_2, x_3, x_4 souřadnice R, jsou souřadnice ϱ**

$$u_1 = x_2 H,\ u_2 = x_2 x_3^2 + x_1 H,\ u_3 = -x_2^2 x_3 - x_4 H,\ u_4 = -x_3 H,$$
$$(H = x_1 x_2 - x_3 x_4).$$

Polární rovina bodu R vzhledem ke kvadrice (49) má souřadnice

$$u'_1 = x_2,\ u'_2 = x_1 + 2\lambda x_2,\ u'_3 = -x_4,\ u'_4 = -x_3.$$

---

* Viz rovnici (5).

** E_3 III 4 (17).

Odtud vychází

$$u_1 - Hu'_1 = 0,\ u_2 - Hu'_2 = x_2[x_3^2 - 2\lambda(x_1x_2 - x_3x_4)] = 0,$$
$$u_3 - Hu'_3 = -x_2^2 x_3,\ u_4 - Hu'_4 = 0,$$

t. j. roviny u_i, u'_i, $x_3 = 0$ náležejí svazku, jak bylo dokázati.

Obě přímky svazku (47), jimž přísluší táž Moutardova kvadrika, tvoří dle (50) kvadratickou involuci, jejíž dvojné prvky příslušejí hodnotám

(53) $$n = 0,\ n + 2\delta = 0,$$

t. j. jsou to: fleknodální tečna f_1 a přímka druhé soustavy kvadriky W_2, jdoucí bodem F_1. Tvoří-li přímky

(54) $$x_2 = x_4 - n_1x_3 = 0;\ x_2 = x_4 - n_2x_3 = 0$$

pár této involuce, jest dle (50)

(55) $$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{\delta} = 0.$$

Ukazatelka jejich Moutardovy kvadriky jest přímka

$$x_2 = n_i^2 x_3 - 2(n_i + \delta)x_4 = 0 \qquad (i = 1, \text{ nebo } i = 2)$$

čili, vzhledem k rovnici (55),

(56) $$x_2 = x_4 - n_1x_3 + x_4 - n_2x_3 = 0.$$

Tedy: Je-li t_1 jakákoli tečna plochy Π v F_1, sestrojme přímku t_2, harmonicky sdruženou s t_1 vzhledem k f_1 a přímce druhé soustavy kvadriky W_2 jdoucí bodem F_1, a pak přímku u harmonicky sdruženou s p vzhledem k t_1, t_2. Přímkám t_1, t_2 přísluší táž Moutardova kvadrika, jejíž ukazatelkou jest u.

9. Pro konstrukci oskulačních kuželoseček rovinných řezů plochy Π v bodech přímky p, jak byla v odst. 7. popsána, je třeba znáti H, W_1, W_2, Σ_k. Ukážeme nyní, že *stačí znáti H, W_1 (nebo W_2) a invariant I.* Nejprve poznamenejme, že, známe-li p, H, W_1, můžeme určiti F_1, F_2, W_2. F_1 a F_2 jsou totiž ony body na p, v nichž se W_1 dotýká H, a W_2 je polární k W_1 vzhledem ku H.

Předložme si úlohu, vyšetřiti, existuje-li přímka q mimoběžná s p, a taková, že pro určitě zvolené a *od nuly různé k* body příslušné v Σ_k všem rovinám svazku *q leží na kvadrice W_1*. Považujíce W_1 za místo bodů, proveďme transformaci Σ_k.

(57) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = [-ku_1u_4^2 + u_2(u_1u_2 - u_3u_4)] : u_1(u_1u_2 - u_3u_4) :$$
$$- u_4(u_1u_2 - u_3u_4) : [ku_1^2 u_4 - u_3(u_1u_2 - u_3u_4)].^*$$

Obdržíme obálku ∞^2 rovin $(W_1)_k$. Existuje-li na $(W_1)_k$ svazek přímek o ose q mimoběžné s p, je q hledaná přímka. Rovnice $(W_1)^k$ jest, odstra-

---

E_3 III 4 (17).
Viz odst. 6.

níme-li faktor $u_1u_2 - u_3u_4$ a předpokládáme-li pro jednoduchost $\alpha = 0$**

(58) $$2ku_1^2u_4^2 - (u_1u_2 - u_3u_4)[u_1u_2 + u_3u_4 - 2(\gamma u_1^2 + \delta u_4^2)] = 0.$$

Předpokládejme, že přímka q existuje a má rovnice

(59) $$u_2 + au_1 + bu_4 = 0,\ u_3 + cu_1 + du_4 = 0^*.$$

Zavedeme-li do (58) nové souřadnice substitucí

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = v_1 : (v_2 - av_1 - bv_4) : (v_3 - cv_1 - dv_4) : v_4,$$

musí býti transformovaná rovnice splněna identicky ve v_1, v_4, učiníme-li $v_2 = v_3 = 0$; jinak řečeno, bikvadratická forma

$$2kv_1^2v_4^2 - 2(\gamma v_1^2 + \delta v_4^2)[v_1(av_1 + bv_4) - v_4(cv_1 + dv_4)] - \\ - v_1^2(av_1 + bv_4)^2 + v_4^2(cv_1 + dv_4)^2$$

musí býti identicky rovna nule. Tato podmínka, která se rozpadá v těchto pět:

(60) $$\begin{aligned} &a(2\gamma + a) = 0, && d(2\delta + d) = 0, \\ &\gamma(b - c) + ab = 0, && \delta(b - c) - cd = 0, \\ &k = a\delta - d\gamma + \tfrac{1}{2}(b^2 - c^2), \end{aligned}$$

také stačí, je-li $k \neq 0$. *Buď* $\gamma\delta \neq 0$. Rovnice (60) lze splniti čtverým způsobem, a to

1. $a = d = 0,\ b = c,\ k = 0,$
2. $a = -2\gamma,\ d = -2\delta,\ b + c = 0,\ k = 0,$
3. $a = 0,\ d = -2\delta,\ b = c = 0,\ k = 2\gamma\delta = 2I,$
4. $a = -2\gamma,\ d = 0,\ b = c = 0,\ k = -2\gamma\delta = -2I.$

Prvá dvě řešení jsou triviální a pro náš účel nevhodná, ježto $k = 0$. 3. a 4. řešení naproti tomu vede k výsledku: Na *obálce* $(W_1)_{2I}$ leží přímka

(61 a) $$u_2 = u_3 - 2\delta u_4 = 0$$

a na obálce $(W_1)_{-2I}$ leží přímka

(61 b) $$u_3 = u_2 - 2\gamma u_1 = 0.$$

Poloha těchto přímek stanoví se okamžitě dle odst. 5. Jsou-li opět G_1, G_2 průsečíky hlavní přímky h kvadriky H s fleknodálními tečnami f_1, f_2, spojuje přímka (61 a) bod G_2 s průsečíkem přímek F_2G_1, w_2 (w_2 je hlavní přímka kvadriky W_2); přímka (61 b) spojuje G_1 s průsečíkem přímek F_1G_2, w_2.

Ježto přímka (61 a) protíná fleknodální tečnu f_2, tvoří body, příslušející jejím rovinám v Σ_k pro jakékoli k ($\neq 0$), *kuželosečku***; pro $k = 2I$ leží tato kuželosečka na W_1 a souřadnice jejích bodů jsou dle (57) ($k = 2I$) a (61 a)

(62) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \gamma\lambda : \lambda : -1 : -(\gamma\lambda^2 + 2\delta).$$

* Tak že jistě je mimoběžná s p.

** E_3 III 5.

Rovnice roviny této kuželosečky jest

(63) $$x_1 - \gamma x_2 = 0.$$

Buď v_1 (v_2) přímka druhé soustavy kvadriky W_1 jdoucí fleknodem F_1 (F_2), a u_1 (u_2) ona tečna plochy Π v F_1 (F_2), jež spolu s p dělí harmonicky přímky f_1 a v_1 (f_2 a v_2); pak (63) je rovina ($G_1 u_2$). Podobně přísluší svazku rovin, jehož osou je přímka (61 b), v transformaci Σ_{-2I} průsečná kuželosečka kvadriky W_1 s rovinou ($G_2 u_1$).

V předchozí úvaze mohli jsme místo W_1 vzíti W_2, což znamená prostě změnu znamení při γ a při δ. Tedy: Svazku rovin, jehož osa spojuje G_2 (G_1) s průsečíkem přímek $F_2 G_1$ a w_1 ($F_1 G_2$ a w_1) přísluší v transformaci Σ_{2I} (Σ_{-2I}) průsečná kuželosečka kvadriky W_2 s rovinou $G_1 u'_2$ ($G_2 u'_1$), je-li u'_1 (u'_2) tečna Π v F_1 (F_2) konjugovaná s u_1 (u_2).

Také korelativní úvahu mohli jsme provésti; to však znamená prostě, nahraditi všecky prvky předchozích vět prvky polárními vzhledem ke komplexu Ω. Celkem máme osmerý způsob konstrukce transformací Σ_k. Zároveň objasňuje se nyní geometricky již dříve konstatovaný fakt, že invariant I mění znamení, vyměníme-li fleknody.

10. Buď nyní $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$. V tomto případě lze rovnice (60) splniti buď tak, že

$$a = d = 0,\ b = c,\ k = 0,$$

nebo tak, že

$$a = 0,\ d = -2\delta,\ b + c = 0,\ k = 0.$$

Žádného řešení nelze užíti. Také v nynějším případě neurčují W_1, W_2 *úplně* transformace Σ_k. Postupujeme však nyní takto: Předpokládáme-li opět $a = 0$, jest rovnice hlavní přímky w_1 kvadriky W_1

$$x_1 = x_4 - 2\delta x_3 = 0.$$

V našem případě protíná tedy w_1 fleknodální tečnu f_2 (v bodě G_2), a rovinám svazku w_1 příslušejí tudíž v Σ_k pro jakékoli k ($\neq 0$) body kuželosečky C_1

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -k\lambda : 2\delta\lambda : -2\delta : (k\lambda^2 + 4\delta^2).$$

Rovnice této kuželosečky můžeme psáti takto

(64) $$2\delta x_1 + k x_2 = k x_2^2 + 4\delta^2 x_3^2 + 2\delta x_3 x_4 = 0.$$

Rovina τ křivky C_1 jde přímkou $F_2 G_1$. Buď τ' ona rovina svazku $F_2 G_1$, jež spolu s τ dělí harmonicky přímky p, f_2; τ' protne kvadriku W_2 v kuželosečce C'

(65) $$2\delta x_1 - k x_2 = k x_2^2 + 4\delta^2 x_3^2 + 2\delta x_3 x_4 = 0.$$

Známe-li τ, obdržíme tudíž C_1, promítneme-li C' s F_1 do τ. Rovina τ obsahuje $F_2 G_1$, ne však p ani f_2, ale jinak je libovolná, známe-li pouze p, H, W_1 (a tedy i W_2); to plyne okamžitě odtud, že v našem případě ($\gamma = 0$) p, H, W_1, W_2 nemění se substitucí

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c\bar{x}_1 : \frac{1}{c}\bar{x}_2 : \bar{x}_3 : \bar{x}_4$$

při jakémkoli c. Mohli jsme místo W_1 vzíti W_2 a říci: Hlavní přímka w_2 kvadriky W_2 protne (pro $\gamma = 0$) fleknodální tečnu f_2. Zvolíme-li jakkoli k ($\neq 0$), přísluší svazku rovin o ose w_2 v Σ_k kuželosečka C_2. Rovina τ' této kuželosečky prochází přímkou F_2G_1. Buď τ rovina svazku F_2G_1, která spolu s τ' dělí harmonicky přímky p_1f_2, pak obdržíme C_2, promítneme-li s F_1 do τ' průsek kvadriky W_1 s rovinou τ. Netřeba již vysloviti výsledky korelativní.

Je-li konečně $\gamma = \delta = 0$, neznamená, jak snadno se shledá, kvadrika $W_1 \equiv W_2$, stanovená úplně již přímkou h ($\equiv w_1 \equiv w_2$), žádného omezení pro transformace Σ_k.

ČÁST II.

Plochy zborcené s jedinou větví fleknodální čáry. Rovina W_1 a bod W_2.

1. Nechť oba fleknody zborcené plochy Π na vytvořující přímce $p\,(x_2 = x_3 = 0)$ splynou v jediný bod $F(1, 0, 0, 0)$. Soustavu souřadnou lze voliti tak, že rovnice Π jsou*

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{p_{12}}{p_{14}} = z + az^4 + \ldots, \quad \frac{p_{23}}{p_{14}} = -z^2 + 0\,.\,z^3 + 0\,.\,z^4 + \ldots, \quad \frac{p_{31}}{p_{14}} = \\ &= z^3 + bz^4 + \ldots, \quad \frac{p_{24}}{p_{14}} = cz^4 + \quad \frac{p_{34}}{p_{14}} = z. \end{aligned}$$

Fleknodální tečnou f v bodě F je přímka $x_2 = x_4 = 0$. Oskulační hyperboloid H má rovnici

$$(2)\qquad x_1x_2 - x_3x_4 = 0.$$

Rovnice Π v bodových souřadnicích dostaneme zase eliminací p_{ik} z rovnic

$$(3)\qquad p_{24}x_1 + p_{41}x_2 + p_{12}x_4 = p_{34}x_1 + p_{41}x_3 + p_{13}x_4 = 0.$$

Zaveďme opět novou soustavu souřadnou substitucí

$$(4)\qquad x_1 = y_4,\ x_2 = y_3 - \mu y_1,\ x_3 = -y_1,\ x_4 = \mu y_4 - y_2.$$

Podobně jako v části prvé obdržíme jako rovnici plochy Π v bodových souřadnicích y v okolí bodu M ($x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 0 : 0 : \mu$):

$$(5)\quad \frac{y_3}{y_4} = \frac{y_1}{y_4}\frac{y_2}{y_4} - \mu^2\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^3 + (\mu^2 b + \mu a + c)\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^4 + 2\mu\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^3\frac{y_2}{y_4} + \ldots$$

Volíme-li za kvadriku Q^λ opět H**, bude křivka C^0 zase kuželosečka

$$(6)\quad y_3 = 5\mu^4 y_1^2 - 4(\mu^2 b + \mu a + c)\, y_1 y_2 + 4\mu y_2^2 - 4\mu^2 y_2 y_4 = 0,$$

dotýkající se v M asymptotické křivky a mající křivost rovnu $+\frac{5}{6}$

---

* E_3 III 4 (18).

** Srovn. část I., odst. 1.

křivosti této křivky; *druhý průsečík* C^0 *s* p *jest nyní pevný fleknod* F. Tečna k C^0 v F jest v původních souřadnicích

$$(7)\qquad x_2 - \mu x_3 = (\mu^2 b + \mu a + c)x_3 - \mu x_4 = 0.$$

Eliminujeme-li μ, vychází jako místo těchto tečen

$$(8)\qquad bx_2^2 + ax_2x_3 + cx_3 - x_2x_4 = 0.$$

Toto místo nazveme opět W_1. Je-li $c \neq 0$, jest W_1 *kužel druhého stupně* o vrcholu F dotýkající se roviny (pf) podél p. Je-li však $c = 0$, jest místo W_1 *rovina*

$$(8')\qquad bx_2 + ax_3 - x_4 = 0,$$

t. j. tečny kuželoseček C^0 v F tvoří pak *svazek*. Je-li $c = a = 0$, prochází rovina W_1 fleknodální tečnou f. Přímkou p nemůže rovina W_1 procházeti, což ovšem a priori je patrno.

Korelativně: Kužel Γ^0 má rovnici

$$(9)\qquad v_4 = 5\mu^4 v_2^2 + 4(\mu^2 b + \mu a + c)\, v_1 v_2 - 4\mu v_1^2 - 4\mu^2 v_1 v_3 = 0,$$

jsou-li v_i kontragredientní k y_i. Rovina (pf) je *pevnou* tečnou rovinou všech ∞^1 kuželů Γ^0; obálka přímek, podél nichž se kužele Γ^0 této roviny dotýkají, jest

$$(10)\qquad bu_1^2 - au_1u_4 + cu_4^2 + u_1u_3 = 0.$$

Tuto obálku nazveme opět W_2. Je-li $c \neq 0$, jest W_2 *kuželosečka*, dotýkající se p v F. Je-li však $c = 0$, jest W_2 *bod*

$$(11)\qquad bu_1 - au_4 + u_3 = 0,$$

t. j. přímky, podél nichž se kužele Γ^0 dotýkají roviny (pf), tvoří pak *svazek*. Je-li $a = c = 0$, leží bod W_2 na f.

2. Z (1) nalezneme snadno rovnici oskulačního lineárního komplexu Ω:

$$(12)\qquad c(p_{12} - p_{34}) - ap_{24} = 0.$$

Je-li $c = 0$, je tento komplex speciální; řídicí přímkou jest ovšem f. Je-li $a = c = 0$, je (12) identita; tedy jest tehdy a jen tehdy *identicky* $a = c = 0$, náleží-li Π specielní lineární kongruenci. Není-li Ω speciální, jsou W_1 a W_2 navzájem polární vzhledem k Ω; *vždy jsou* W_1 *a* W_2 *navzájem polární vzhledem ku* H.

3. Buď nyní p_ε vytvořující přímka plochy Π

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \varepsilon + a\varepsilon^4 + \ldots : -\varepsilon^2 + \ldots : \varepsilon^3 + b\varepsilon^4 + \ldots$$
$$1 : c\varepsilon^4 + \quad : \varepsilon,$$

kde $|\varepsilon|$ je malá. Oskulační lineární kongruence K_ε plochy Π v místě p_ε obdrží se anulováním determinantů matice

$$\begin{vmatrix} p_{12}, & \varepsilon + a\varepsilon^4 + \ldots & 1 + 4a\varepsilon^3 + \ldots, & 12a\varepsilon^2 + \ldots, & 24a\varepsilon + \ldots \\ p_{23}, & -\varepsilon^2 + \ldots & -2\varepsilon + \ldots, & -2 + \ldots, & \\ p_{31}, & \varepsilon^3 + b\varepsilon^4 + \ldots, & 3\varepsilon^2 + 4b\varepsilon^3 + \ldots, & 6\varepsilon + 12b\varepsilon^2 + \ldots, & 6 + 24b\varepsilon + \ldots \\ p_{14}, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ p_{24}, & c\varepsilon^4 + \ldots, & 4c\varepsilon^3 + \ldots & 12c\varepsilon^2 + \ldots, & 24c\varepsilon + \ldots \\ p_{34}, & \varepsilon, & 1 & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

Utvořme ty determinanty, jež vzniknou vynecháním, resp. 1. a 5. řádku. Rovnice K_ε jsou tudíž

$$(13)\qquad \begin{aligned} &p_{24} + 4\varepsilon(bp_{24} - cp_{31}) + (2) = 0, \\ &p_{12} - p_{34} + \varepsilon[4b(p_{12} - p_{34}) - 4ap_{31}] + (2) = 0. \end{aligned}$$

Zde a v dalším znamená opět (k) členy aspoň řádu ε^k. Obecný lineární komplex obsahující K_ε je tedy

$$(14)\; p_{24} + \lambda(p_{12} - p_{34}) + \varepsilon\{4(bp_{24} - cp_{31}) + \lambda[4b(p_{12} - p_{34}) - 4ap_{31}]\} + (2) = 0.$$

Tento komplex je speciální, je-li

$$(15)\qquad (1 + 8b\varepsilon + \ldots)\lambda^2 + (4a\varepsilon + \quad)\lambda + 4c\varepsilon + \ldots = 0,$$

čili *za předpokladu* $c \neq 0$, pro $\lambda = \lambda'$ a $\lambda = \lambda''$, kde

$$(16)\qquad \lambda' = 2\sqrt{-c}\sqrt{\varepsilon} - 2a\varepsilon + \left(\frac{3}{2}\right),\quad \lambda'' = -2\sqrt{-c}\sqrt{\varepsilon} - 2a\varepsilon + \left(\frac{3}{2}\right).$$

Souřadnice řídicích přímek kongruence K_ε jsou tedy

$$(17)\qquad \begin{aligned} &p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \\ &= [-\lambda^{(i)} - 4b\varepsilon\lambda^{(i)} + (2)] : (2) : [1 + 4b\varepsilon + (2)] : (2) : \\ &: [-4c\varepsilon - 4a\varepsilon\lambda^{(i)} + (2)] : [\lambda^{(i)} + 4b\varepsilon\lambda^{(i)} + (2)],\quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Tyto přímky protínají p^ε, resp. v bodech

$$(18)\qquad \begin{aligned} &x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : (2) : \varepsilon + (2) : \lambda' + (2), \\ &x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : (2) : \varepsilon + (2) : \lambda'' + (2). \end{aligned}$$

Rovnice fleknodální čáry pro $c \neq 0$ jsou tudíž

$$(19)\qquad \frac{x_2}{x_1} = 0 \cdot \left(\frac{x_4}{x_1}\right)^3 + \qquad \frac{x_3}{x_1} = -4c\left(\frac{x_4}{x_1}\right)^2 - \frac{a}{4c^2}\left(\frac{x_4}{x_1}\right)^3 +$$

Fleknodální čára je tedy v F regulární, dotýká se zde p a má (pf) za stacionární oskulační rovinu.

4. *Je-li však $c = 0$,* jsou kořeny rovnice (15)

$$(20)\qquad \lambda' = k'\varepsilon + (2),\quad \lambda'' = k''\varepsilon + (2),$$

kde k', k'' jsou kořeny kvadratické rovnice

$$k^2 + 4ak + m = 0,$$

kde m je jistá konstanta, takže jest

$$(21)\qquad k' + k'' = -4a.$$

Pro souřadnice průsečíků řídicích přímek K_ε s p_ε obdržíme nyní

$$(22)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : [k^{(i)}\varepsilon^2 + (3)] : [-\varepsilon + (2)] : [-k^{(r)}\varepsilon + (2)],\ i = 1, 2.$$

Fleknodální čára má v okolí F dvě (různé nebo splývající) regulární větve. Tečny v F jsou

$$(23)\qquad x_2 = k'x_3 - x_4 = 0,\quad x_2 = k''x_3 - x_4 = 0.$$

Mohou býti různé nebo splynouti, vždy však vzhledem k (21) oddělují harmonicky p a přímku

$$(24)\qquad x_2 = x_4 + 2ax_3 = 0.$$

Jestliže fleknodální čára plochy Π má jedinou větev, je jistě dle předchozího $c = 0$. Přímka (24) je pak tečnou fleknodální čáry; porovnáním s (11) vidíme, že spolu s fleknodální tečnou f dělí harmonicky přímky p a W_2F. Je-li též $a = 0$, splyne (24) s f. Jak jsme již poznamenali, jest jen tehdy identicky $a = c = 0$, má-li Π dvě soumezné přímky řídicí.

Upustíme od další diskuse případu $c \neq 0$, který se jen na isolovaných přímkách vytvořujících může vyskytnouti a není tedy tak důležitý. Je-li, jak tedy v dalším stále předpokládáme, $c = 0$, má H s Π v F styk čtvrtého řádu; oskulační kuželosečky rovinných řezů Π v F leží tedy na H. Pro oskulační kuželosečky rovinných řezů Π v ostatních bodech přímky p platí ovšem doslova konstrukce popsaná v části *I*, odst. 7, jen místo vytvořujících přímek druhé soustavy *kvadriky* W_1 (W_2) jest vzíti přímky bodem F *v rovině* W_1 (*bodem* W_2 v rovině (pf)).

Bod W_2 (a jím určená rovina W_1) nepůsobí žádného omezení pro transformace Σ_k i odpadá zde vyšetřování analogické tomu, jež bylo provedeno v části *I*, odst. 9.

5. Rovnice Π předpokládáme, jak řečeno, ve tvaru

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\frac{p_{12}}{p_{34}} = z + az^4 + \ldots, && \frac{p_{23}}{p_{34}} = -z^2 + \ldots, \\ &\frac{p_{31}}{p_{14}} = z^3 + bz^4 + \ldots, && \frac{p_{24}}{p_{14}} = \ldots, \quad \frac{p_{34}}{p_{14}} = z, \end{aligned}$$

kde členy obsahující z^5 vynechány. Při tom tetraedr souřadný jest jen potud určen, že dvě hrany jsou p, f, a obě protější hrany jsou na H. *Buď nejprve* $a \neq 0$. Ježto bod W_2 leží v rovině (pf), ne však na p ani na f, možno voliti vrcholy $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,0)$ ∞^1 způsoby tak, aby bod W_2 byl na jich spojnici. Učiníme-li takovou volbu, bude ve (25) $b = 0$. Substitucí

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \bar{x}_1 : a^{\frac{1}{3}}\bar{x}_2 : a^{-\frac{1}{3}}\bar{x}_3 : a^{\frac{2}{3}}\bar{x}_4$$

docílíme pak *kanonického tvaru* pro rovnice Π:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\frac{p_{12}}{p_{34}} = z + z^4 + \ldots, && \frac{p_{23}}{p_{14}} = -z^2 + \ldots, \\ &\frac{p_{31}}{p_{14}} = z^3 + \ldots, && \frac{p_{24}}{p_{14}} = \ldots, \quad \frac{p_{34}}{p_{14}} = z, \end{aligned}$$

kde vynechané členy jsou opět řádu z^5. *Absolutního invariantu není.* Souřadnice W_2 jsou pak

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 0 : 1 : -1 \tag{27}$$

a souřadnice W_1

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 0 : 0 : 1 - 1. \tag{28}$$

Kolineace, jež převádějí Π v plochu, mající s ní podél p styk čtvrtého řádu, jsou jednak

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \bar{x}_1 + \lambda(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + \lambda^2 \bar{x}_2, \\ \varrho x_2 &= \bar{x}_2, \\ \varrho x_3 &= \bar{x}_3 + \lambda \bar{x}_2, \\ \varrho x_4 &= \bar{x}_4 + \lambda \bar{x}_2, \end{aligned} \tag{29a}$$

jednak

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \omega^2 \bar{x}_1 + \omega\lambda(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + \lambda^2 \bar{x}_2, \\ \varrho x_2 &= \bar{x}_2, \\ \varrho x_3 &= \omega \bar{x}_3 + \lambda \bar{x}_2, \qquad\qquad (\omega^2 + \omega + 1 = 0) \\ \varrho x_4 &= \omega \bar{x}_4 + \lambda \bar{x}_2, \end{aligned} \tag{29b}$$

kde λ je libovolný parametr.

Kolineace (29a) je pro $\lambda = 0$ identita. Pro $\lambda \neq 0$ můžeme ji takto *charakterisovati*: Samodružné body jsou body přímky FW_2 (a jen ony). Samodružné roviny jsou roviny svazku (φW_1) $(\varphi \equiv (pf))$. Při takových kolineacích existuje ∞^4 samodružných kvadrik; jednou z nich je H. Kolineaci (29b) možno *charakterisovati* takto: Je to cyklická kolineace řádu tři, jejíž samodružné body jsou: 1. fleknod F, 2. všecky body jisté přímky g, jež obsahuje bod W_2, ne však bod F, a leží v rovině (pf), 3. průsečík G poláry g vzhledem ku H s H.

Korelace, jimiž přejde Π v plochu, mající s Π podél p styk čtvrtého řádu, jsou jednak

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= \bar{x}_2, \\ \varrho u_2 &= \bar{x}_1 + \lambda(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + \lambda^2 \bar{x}_2, \\ \varrho u_3 &= \bar{x}_4 + \lambda \bar{x}_2, \\ \varrho u_4 &= \bar{x}_3 + \lambda \bar{x}_2, \end{aligned} \tag{30a}$$

jednak

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= \bar{x}_2, \\ \varrho u_2 &= \omega^2 \bar{x}_1 + \omega\lambda(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + \lambda^2 \bar{x}_2, \\ \varrho u_3 &= \omega \bar{x}_4 + \lambda \bar{x}_2, \qquad\qquad (\omega^2 + \omega + 1 = 0) \\ \varrho u_4 &= \omega \bar{x}_3 + \lambda \bar{x}_2. \end{aligned} \tag{30b}$$

Korelace $(30a)$ jest polarita vzhledem ke kvadrice, protínající H ve dvou různých přímkách prvé a dvou různých přímkách druhé soustavy, mezi nimiž jsou p a f; tato kvadrika je harmonická s H. V korelaci $(30b)$ přísluší bodu F, každému bodu jisté přímky g roviny (pf) obsahující W_2, ne však F, a druhému průsečíku s H poláry g vzhledem ku H jeho polární rovina vzhledem ku H; libovolnému bodu M

přímky f přísluší tečná rovina H v tom bodě M' na f, pro nějž jest $(FRMM') = -\omega^2 (R \equiv (fg))$; tečné rovině H v M přísluší v korelaci bod M'.

6. V předchozím odst. se předpokládalo $a \neq 0$. Je-li $a = 0$, a tedy bod W_2 na f, učiňme W_2 vrcholem (0, 0, 1, 0) souřadného tetraedru. Rovnice Π nabudou pak dle (11) a (25) *kanonického* tvaru,

$$\frac{p_{12}}{p_{14}} = z + \quad \frac{p_{23}}{p_{14}} = -z^2 + \ldots, \frac{p_{31}}{p_{14}} = z^3 + \qquad (31)$$
$$\frac{p_{24}}{p_{14}} = \ldots, \frac{p_{34}}{p_{14}} = z,$$

kde vynechané členy jsou aspoň řádu z^5. Rovnice bodu W_2 jest nyní $u_3 = 0$, rovnice roviny W_1 $x_4 = 0$. Absolutního invariantu opět není. Kanonický tvar připouští kolineace

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \mu \bar{x}_1 + \lambda \mu^3 \bar{x}_4, \\ \varrho x_2 &= \mu^2 \bar{x}_2, \\ \varrho x_3 &= \bar{x}_3 + \lambda \mu^2 \bar{x}_2, \\ \varrho x_4 &= \mu^3 \bar{x}_4, \end{aligned} \qquad (32)$$

při libovolných $\lambda_1 \mu$. Elementární divisory kolineace (32) jsou

a) pro $\mu = 1$, $\lambda = 0 : (1 - \varrho)\ (1 - \varrho)\ (1 - \varrho)\ (1 - \varrho)$,
b) pro $\mu = 1$, $\lambda \neq 0 : (1 - \varrho)^2\ (1 - \varrho)^2$,
c) pro $\mu = -1$, $\lambda = 0 : (1 - \varrho)\ (1 - \varrho)\ (1 + \varrho)\ (1 + \varrho)$,
d) pro $\mu = -1$, $\lambda \neq 0 : (1 - \varrho)^2\ (1 + \varrho)^2$,
e) pro $\mu = \omega$, $(\omega^2 + \omega + 1 = 0) : (1 - \varrho)\ (1 - \varrho)\ (\omega - \varrho)\ (\omega^2 - \varrho)$,
f) pro $\mu^2 \neq 1$, $\mu^3 \neq 1 : (1 - \varrho)\ (\mu - \varrho)\ (\mu^2 - \varrho)\ (\mu^3 - \varrho)$.

Jsou tedy kolineace (32) šesti různých typů. Můžeme *charakterisovati* kolineace jednotlivých typů takto:

Kolineace *a*) je identita. Samodružné body kolineace *b*) jsou body na f, samodružné roviny jsou roviny svazku f, samodružné přímky jsou tečny H ve všech bodech na f. Kolineace *c*) je zborcená involuce, jejímiž osami jsou p a ta přímka prvé soustavy na H, jež jde bodem W_2. Ze samodružných bodů kolineace *d*) splynou dva v F a dva ve W_2, a to tak, že přímky prvé soustavy na H jdoucí těmito body jsou samodružné; projektivita na samodružné přímce FW_2 je involuce; H je samodružný. Kolineace *e*) je cyklická řádu tři a její body samodružné jsou: bod F, všecky body jisté přímky g v rovině (pf) bodem W_2 (různé od f), a druhý průsečík s H poláry g vzhledem ku H. Samodružné body kolineace *f*) jsou F, W_2 a další dva body G, U takové, že přímky $FG \equiv p$, $W_2 U$, GU leží na H; přísluší-li obecné rovině u rovina $\bar{u}$, jest $(u\bar{u} W_2 F) = (u\bar{u} F U) = (u\bar{u} UG)$.

Kanonický tvar (31) připouští dále korelace

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= \mu^2 \bar{x}_2, \\ \varrho u_2 &= \mu \bar{x}_1 + \lambda \mu^3 \bar{x}_4, \\ \varrho u_3 &= \mu^3 \bar{x}_4, \\ \varrho u_4 &= \bar{x}_3 + \lambda \mu^2 \bar{x}_2 \end{aligned} \qquad (33)$$

pro jakákoli λ, μ. Elementární divisory korelace (33) jsou*:

a) pro $\mu = 1 : (1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)$,
b) pro $\mu = -1 : (1+\varrho)(1+\varrho)(1+\varrho)(1+\varrho)$,
c) pro $\mu = i\ (i^2+1=0),\ \lambda = 0 : (\varrho - i)(\varrho - i)(\varrho + i)(\varrho + i)$,
d) pro $\mu = i,\ \lambda \neq 0 : (\varrho - i)^2 (\varrho + i)^2$,
e) pro $\mu = \omega\ (\omega^2 + \omega + 1 = 0) : (1-\varrho)(1-\varrho)(\omega - \varrho)(\omega^2 - \varrho)$,
f) pro $\mu = -\omega : (1+\varrho)(1+\varrho)(\omega+\varrho)(\omega^2+\varrho)$,
g) pro $\mu_4 \neq 1,\ \mu_6 \neq 1 : (\varrho - \mu)(\mu\varrho - 1)(\varrho - \mu^3)(\mu^3\varrho - 1)$.

Tyto korelace můžeme *charakterisovati* takto: Korelace a) jest polarita vzhledem ke kvadrice protínající H ve čtyřúhelníku, jehož dvě strany jsou p a f, a harmonické s H. Korelace b) je polarita vzhledem k lineárnímu komplexu, obsahujícímu oskulační lineární kongruenci plochy Π. Při korelaci c) přísluší každému bodu na p i q tečná rovina H v něm, je-li q přímka prvé soustavy na H bodem W_2; každému bodu M na f přísluší tečná rovina k H v bodě M' na f, pro který $(MM'FW_2) = i$. V korelaci d) přísluší kterémukoli bodu M přímky f v korelaci tečná rovina H v tom bodě M' na f, pro nějž je $(MM'FW_2) = i$; je-li Q_1 (Q_2) kvadrika incidentních bodů (rovin) a Q_0 pár rovin (pt). W_1, náležejí Q_1 i Q_2 svazku $(Q_0 H)$, nesplynou a dvojpoměr $(HQ_0Q_1Q_2) = -1$. Body, jimž příslušejí v korelaci e) i v její inversní tytéž roviny, jsou: bod F, jistý bod G přímky prvé soustavy na H jdoucí bodem W_2, a všecky body poláry přímky FG vzhledem ku H, a to každému z těchto bodů přísluší jeho polární rovina vzhledem ku H; kterémukoli bodu M na f přísluší tečná rovina H v tom bodě M' přímky f, pro nějž $(MM'FW_2) = -\omega^2$; je-li N libovolný bod na FG, ν rovina mu příslušná v korelaci, N' bod příslušný rovině ν, jest $(NN'FG) = \omega^2$. Body, jimž příslušejí v korelaci f) i v její inversní tytéž roviny, jsou tytéž jako dříve, s tím rozdílem, že kterémukoli bodu poláry FG vzhledem ku H přísluší nyní s ním incidentní rovina svazku FG; bodu M na f přísluší nyní tečná rovina H v tom bodě M' na f, pro který $(MM'FW_2) = \omega^2$; je-li N libovolný bod na FG, ν rovina mu příslušná, a N' bod příslušný rovině ν, jest *opět* $(NN'FG) = \omega^2$. V korelaci g) bodu F, bodu W_2, jistému dalšímu bodu P na p a průsečíku G přímky druhé soustavy na H bodem P s přímkou prvé soustavy bodem W_2 přísluší v korelaci vždy tečná rovina H v něm; bodu R na p (bodu S na f, T na W_2G) přísluší v korelaci tečná rovina H v tom bodě R' na p (S' na f, T' na W_2G), pro který $(FPRR') = (W_2GTT') = -(W_2FSS')^2$.

---

* Za charakteristický determinant korelace $u_i = \sum\limits_k a_{ik} x_k$ beru zde $|a_{ik} - \varrho a_{ki}|$.

ČÁST III.

Souvislost s asymptotickými čarami, Segreovými „doplňky k teorii konjugovaných tečen" a s teorií Wilczynského.

1. Vraťme se k ploše se dvěma různými větvemi fleknodální plochy, dané rovnicemi (1) v části I. Rovnice Π v okolí bodu M $(1, 0, 0, \mu)$ jest

$$z = xy - \mu x^3 + (\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)x^4 + x^3 y + \varphi_5(x,y) + \varphi_6(x,y) + \ldots, \tag{1}$$

kde

$$x = \frac{y_1}{y_4} = -\frac{x_3}{x_1},\ y = \frac{y_2}{y_4} = \mu - \frac{x_4}{x_1},\ z = \frac{y_3}{y_4} = \frac{x_2}{x_1} - \mu\frac{x_3}{x_1}. \tag{2}$$

V mocninné řadě na pravo rovnice (1) známe koeficienty až po čtvrtou mocnost v x, y, ale i pro další koeficienty jsou jistá omezení odtud, že Π je přímková plocha. Především přímka p $(y_1 = y_3 = 0)$ celá leží na Π a tedy formy $\varphi_5(x,y)$, $\varphi_6(x,y)$. jsou vesměs dělitelny x. Uvažujme řadu bodů $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 0 : \lambda : 0 : 1$ na p. Tečná rovina Π v takovém bodě má rovnici

$$[\lambda + \varphi'_5(0,\lambda) + \varphi'_6(0,\lambda)\ldots]y_1 - y_3 = 0,$$

kde $\varphi'_k(x,y) = \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x}$. Ježto tečné roviny v bodech přímky vytvořující tvoří svazek *projektivní* s řadou dotyčných bodů, jest nutně $\varphi'_5(0,\lambda) = \varphi'_6(0,\lambda) = \ldots = 0$. Jinak řečeno, $\varphi_5(x,y)$, $\varphi_6(x,y)$,... jsou dělitelny x^2. Bude tedy rovnice Π v okolí uvažovaného bodu M, vypíšeme-li také členy pátého stupně

$$\begin{aligned} z = xy - \mu x^3 + (\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)x^4 + x^3 y + x^2(Ax^3 + \\ + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3) + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Z této rovnice známým způsobem nalezneme, že rovnice *asymptotické čáry* C plochy Π, která jde bodem M, jsou

$$\begin{aligned} y &= \frac{3\mu}{2}x^2 - 2(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)x^3 - \frac{20A + 27\mu}{8}x^4 + \ldots, \\ z &= \frac{\mu}{2}x^3 - (\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta)x^4 - \frac{6A + 9\mu}{4}x^5 + . \end{aligned} \tag{4}$$

2. Charakteristická trilinearita elementu C* jest

$$\frac{3\mu}{\xi} + \frac{9\mu^2}{\eta} + \frac{\mu}{\zeta} + 4(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta) = 0; \tag{5}$$

charakteristická trilinearita elementu plochy tečen křivky C** jest

$$\frac{\mu}{\xi} + \frac{9\mu^2}{\eta} + \frac{3\mu}{\zeta} + 4(\mu^2\gamma + \mu\alpha + \delta) = 0. \tag{6}$$

Při tom znamená ξ parametr bodu $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \xi : 0 : 0 : 1$, η je

---

* E_3 I 2.

** E_3 I 4(13).

parametr přímky $\eta y_1 + y_2 = y_3 = 0$ a ζ parametr roviny $\zeta y_2 - y_3 = 0$. Přejdeme-li k původním souřadnicím, je ξ parametr bodu

$$(7a) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : -\mu\xi : -\xi : \mu,$$

η je parametr přímky

$$(7b) \qquad x_2 - \mu x_3 = \mu x_1 - \eta x_3 - x_4 = 0,$$

a ζ je parametr roviny

$$(7c) \qquad \zeta\mu x_1 - x_2 + \mu x_3 - \zeta x_4 = 0.$$

Víme*, že eliminujeme-li η z rovnic (5) a (6), obdržíme projektivitu mezi středy a rovinami svazků, vytvořujících *oskulační lineární kongruenci* křivky C. V našem případě jest výsledek eliminace jednoduše $\xi = \zeta$, čili dle (7 a) a (7 c) projektivita, přiřazující bodu (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) rovinu

$$x'_1 x_2 + x'_2 x_1 - (x'_3 x_4 + x'_4 x_3) = 0,$$

t. j. tečnou rovinu H v tomto bodě. Tedy: *přímky prvé soustavy oskulačního hyperboloidu náležejí oskulační lineární kongruenci každé asymptotické křivky.* Odtud můžeme učiniti zajímavý důsledek**. Předpokládejme, že plocha Π má tu vlastnost, že *každá její asymptotická křivka náleží lineárnímu komplexu.* Není možno, aby všecky tyto komplexy splynuly; neboť oskulačnímu komplexu křivky náleží svazek přímek bodem křivky v rovině oskulační a náležely by tudíž tomuto komplexu všechny tečny plochy Π, což je nemožno. Oskulační lineární kongruence křivky náleží jejímu oskulačnímu lineárnímu komplexu. Dle věty dokázané náležejí tedy všecky oskulační hyperboloidy plochy Π svými přímkami prvé soustavy každému z našich ∞^1 lineárních komplexů. Ježto je dovoleno předpokládati, že Π není kvadrika, tvoří tedy tyto komplexy svazek. Všecky přímky prvé soustavy oskulačních hyperboloidů plochy Π, specielně *všecky vytvořující přímky plochy Π náležejí pak lineární kongruenci.* Tento teorém dokázal po prvé Peters***.

3. Zajímavo jest, že u plochy zborcené stačí znáti tři soumezné přímky vytvořující, abychom mohli udati oskulační lineární kongruenci asymptotické křivky. Odtud lze souditi, že známe-li čtyři soumezné vytvořující přímky, můžeme udati pro C oskulační lineární komplex. Potvrdíme to přímým počtem. Rovnice oskulačního komplexu křivky C dané rovnicemi (4), jest v přímkových souřadnicích q_k příslušných bodovým souřadnicím y

$$2\mu(q_{12} + q_{34}) + 3q_{23} = 0$$

a tedy v souřadnicích p_{ik} utvořený z bodových souřadnic x

$$(8) \qquad \mu(p_{12} - p_{34}) - \mu^2 p_{31} + 3p_{24} = 0.$$

* E_3 15.

** Anticipujíce správnost věty právě dokázané i pro plochy s jedinou větví fleknodální čáry.

*** Die Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören. Lipsko, 1895. Autorovi nepřístupné.

Snadno verifikujeme, že tento komplex obsahuje všecky přímky *prvé* soustavy hyperboloidu H. Rovnice přímky *druhé* soustavy na H, jdoucí bodem $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 0 : 0 : \mu'$ čili asymptotické tečny v tomto bodě jsou

$$x_2 - \mu' x_3 = \mu' x_1 - x_4 = 0$$

a tedy její souřadnice

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = -\mu' : 0 : 1 : 0 : \mu'^2 : \mu'.$$

Výsledek dosazení těchto hodnot do (8) je prostě $\mu^2 - \mu'^2 = 0$. *Jsou-li M, M' dva body na vytvořující přímce p plochy Π harmonicky oddělené fleknody, mají asymptotické křivky z nich vycházející společný oskulační lineární komplex, jemuž náležejí tečny oskulačního hyperboloidu plochy ve všech bodech asymptotických tečen v bodech M, M'.*

Fleknodální tečny f_1, f_2 jsou reciproké poláry vzhledem ke komplexu (8) čili *oskulační lineární komplex asymptotické křivky na zborcené ploše obsahuje oskulační lineární kongruenci plochy.*

4. Vraťme se k rovnicím (5) a (6). Vyloučíme-li z nich ζ, dostáváme

$$\frac{4\mu}{\xi} + \frac{9\mu^2}{\eta} + 4(\gamma\mu^2 + \alpha\mu + \delta) = 0. \tag{9a}$$

Vyloučíme-li ξ, dostáváme

$$\frac{4\mu}{\zeta} + \frac{9\mu^2}{\eta} + 4(\gamma\mu^2 + \alpha\mu + \delta) = 0. \tag{9b}$$

Víme*, že (9 a), (9 b) přiřazuje bodu na asymptotické tečně (rovině asymptotickou tečnou) jeho (její) poláru vzhledem k oskulační kuželosečce (oskulačnímu kuželi) asymptotické křivky. Ježto (9 a) přejde záměnou liter ξ, ζ v (9 b), vidíme, že kužel polární k oskulační kuželosečce vzhledem ku H má s oskulačním kuželem aspoň styk třetího řádu. To je ostatně geometricky evidentní: Oskulační kuželosečka a oskulační kužel jsou polární vzhledem k oskulačnímu lineárnímu komplexu křivky C, a součin polarity vzhledem k tomuto komplexu s polaritou vzhledem ku H je dle předchozího odstavce zborcená involuce, jejíž jednou osou je tečna oskulační kuželosečky. Rovnici (9 a) se vyhoví, klademe-li

$$\xi = -\frac{\mu}{\gamma\mu^2 + \alpha\mu + \delta}, \quad \frac{1}{\eta} = 0.$$

Tento bod ξ má souřadnice

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\gamma\mu^2 + \alpha\mu + \delta) : \mu^2 : \mu : \mu(\gamma\mu^2 + \alpha\mu + \delta).$$

Tyto souřadnice splňují rovnici (13) v části I. Tedy: *Kubická křivka, v níž vedle vytvořující přímky p protínají se H a W_1, jest místem pólů p vzhledem k oskulačním kuželosečkám asymptotických křivek.* Připomeneme-li si, že tečná rovina W_1 v bodě M na p je tečnou rovinou H v bodě, oddělujícím s M harmonicky oba fleknody, vidíme,

---

* E_3 I 6.

že jsme takto dospěli *k nové definici kvadriky* W_1, pozoruhodné svou jednoduchostí. *Korelativně pro* W_2. Ježto, jak již bylo poznamenáno, (9a) a (9b) liší se pouze záměnou ξ a ζ, můžeme také říci: *Vytvořující přímka zborcené plochy, průsečík asymptotické tečny t s kvadrikou W_1 a tečná rovina přímkou t ke kvadrice W_2 tvoří trojinu pro charakteristickou trilinearitu jak elementu asymptotické křivky, dotýkající se t, tak elementu její plochy tečen.*

Připomeneme-li si výsledky odst. 9 a 10, části I, vidíme nyní úplně souvislost asymptotických čar plochy s kvadrikami H, W_1, W_2.

5. Buď nyní Π zborcená plocha o jediné větvi fleknodální čáry, daná opět rovnicemi

$$\begin{aligned}(10)\qquad &\frac{p_{12}}{p_{14}}=z+az^4+\ldots,\quad \frac{p_{23}}{p_{14}}=-z^2+0\,.\,z^3+0\,.\,z^4+\ldots,\\ &\frac{p_{31}}{p_{14}}=z^3+bz^4+\ldots,\quad \frac{p_{24}}{p_{14}}=0\,.\,z^4+\ldots,\quad \frac{p_{34}}{p_{14}}=z.\end{aligned}$$

Rovnice Π v okolí bodu $M\,(1, 0, 0, \mu)$ jest, platí-li zase substituční rovnice (2)

$$\begin{aligned}(11)\qquad z=xy-\mu^2x^3+\mu(a+b\mu)x^4+2\mu x^3y+\\ +x^2(Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3)+\ldots.\end{aligned}$$

Rovnice asymptotické křivky C jdoucí bodem M jsou

$$\begin{aligned}(12)\qquad y&=\frac{3\mu^2}{2}x^2-2\mu(a+b\mu)x^3-\frac{10A+27\mu^3}{4}x^4+\\ z&=\frac{\mu^2}{2}x^3-\mu(a+b\mu)x^4-\frac{6A+27\mu^3}{4}x^5+\end{aligned}$$

Charakteristická trilinearita elementu křivky C jest

$$(13)\qquad \frac{3\mu}{\xi}+\frac{9\mu^3}{\eta}+\frac{\mu}{\zeta}+4(a+b\mu)=0;$$

charakteristická trilinearita elementu plochy tečen C jest

$$(14)\qquad \frac{\mu}{\xi}+\frac{9\mu^3}{\eta}+\frac{3\mu}{\zeta}+4(a+b\mu)=0.$$

Eliminujíce η z (13) a (14), dostaneme opět $\xi=\zeta$; oskulační lineární kongruence křivky C i nyní obsahuje všecky přímky H prvé soustavy. Podobně i zde oskulační lineární komplex křivky C obsahuje oskulační lineární kongruenci plochy Π. Pro polaritu vzhledem k elementu oskulační kuželosečky křivky C dostáváme

$$(15a)\qquad \frac{4\mu}{\xi}+\frac{9\mu^3}{\eta}+4(a+b\mu)=0,$$

a pro polaritu vzhledem k elementu jejího oskulačního kužele

$$(15b)\qquad \frac{4\mu}{\zeta}+\frac{9\mu^3}{\eta}+4(a+b\mu)=0.$$

Rovnici (15a) je vyhověno hodnotami

$$\xi = -\frac{\mu}{a+b\mu}, \quad \frac{1}{\eta} = 0.$$

Jsou tedy souřadnice pólu přímky p vzhledem k oskulační kuželosečce křivky C

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (a+b\mu) : \mu^2 : \mu : \mu(a+b\mu),$$

a jest tudíž $bx_2 + ax_3 - x_4 = 0$. Tedy: průsek H s rovinou W_1 (pro $a=0$ další část průseku mimo f) jest geometrickým místem pólů vytvořující přímky plochy Π vzhledem k oskulačním kuželosečkám asymptotických křivek. Korelativně pro W_2. Vytvořující přímka p, průsek asymptotické tečny t s rovinou W_1 a rovina (tW_2) tvoří trojinu charakteristické trilinearity elementu C i elementu její plochy tečen.

6. Vraťme se ku ploše s různými fleknody, dané v okolí bodu $M(1, 0, 0, \mu)$ rovnicí (1). Je-li Π *jakákoli* plocha a je-li μ tečná rovina Π v bodě M, existuje* kužel (obecně šesté třídy) o vrcholu M a křivka (obecně šestého řádu) v rovině μ v jednojednoznačné korespondenci, tak, že křivka, podél níž se kužel opsaný Π s kteréhokoli bodu oné křivky dotýká Π, má v M za *stacionární* oskulační rovinu příslušnou rovinu onoho kužele a korelativně. Pro krátkost mluvme o Segreovu kuželi a Segreově křivce. Dosadíme-li do rovnice (13) citovaného pojednání z naší rovnice (1), obdržíme, jsou-li v_i kontragredientní s y_i**, rovnici Segreova kužele

$$v_1^2 + 2\mu v_1 v_3 + 3\mu^2 v_2^2 - 2(\mu_2\gamma + \mu\alpha + \delta) v_1 v_2 = 0. \tag{16}$$

Odtud shledáváme snadno***: *Je-li Π plocha zborcená, je Segreův kužel druhého stupně, dotýká se podél asymptotické tečny tečné roviny Π v M, obsahuje vytvořující přímku druhé soustavy kvadriky W_2 jdoucí bodem M a tečná rovina jeho podél této přímky obsahuje vytvořující přímku plochy Π; křivost kužele podél asymptotické tečny jest až na znamení rovna křivosti plochy tečen asymptotické křivky.* Korelativně: *Segreova křivka je kuželosečka, jež se dotýká v M asymptotické křivky, majíc zde křivost od křivosti této jen znamením různou, a jež se dotýká vytvořující přímky druhé soustavy kvadriky W_1 obsažené v rovině μ v jejím průsečíku s vytvořující přímkou plochy Π.* V této větě máme zase novou definici kvadrik W_1, W_2. Jak se výsledek modifikuje, splynou-li fleknody, je patrno.

7. V knize „Projective differential geometry of curves and ruled surfaces"†, kterou jsme již měli příležitost citovati, rozvíjí Wilczynski

---

* Segre, Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie. Rend. Acc. Lincei 1908.

** Segre užívá jiných rovinových souřadnic.

*** Srovn. část I., odst. 2.

† V dalším cituji ji krátce W (na př. W I 1, t. j. W, kap. I, § 1).

analytické teorie invariantních útvarů lineárních diferenciálních rovnic, ekvivalentní s projektivní geometrií křivky rovinné, prostorové a plochy zborcené. Ukážeme, že jeden z jeho invariantních útvarů definuje naši kvadriku W_2. Dříve však musíme říci několik slov o kovariantech*. Diferenciální systém

$$(A)\qquad \begin{aligned} y'' + p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{22}z = 0,\\ z'' + p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z = 0, \end{aligned}$$

kde p_{ik}, q_k jsou analytické funkce x, má čtyři páry lineárně nezávislých řešení $(y^{(1)}, z^{(1)})$, $(y^{(2)}, z^{(2)})$, $(y^{(3)}, z^{(3)})$, $(y^{(4)}, z^{(4)})$**. Interpretujeme-li $y^{(i)}$ a $z^{(i)}$ jako homogenní souřadnice dvou bodů P_y, P_z, opisuje přímka $P_y P_z$ při proměnném x zborcenou plochu***. Dosadíme-li $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ za y, z do výrazů

$$\varrho = 2y' + p_{11}y + p_{12}z, \quad \sigma = 2z' + p_{21}y + p_{22}z,$$

obdržíme souřadnice $\varrho^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$ dalších dvou bodů P_ϱ, P_σ. Obecněji: buďte x_i jakékoli funkce x; dosadíme-li do výrazu

$$x_1 y + x_2 z + x_3 \varrho + x_4 \sigma$$

za y, z, ϱ, σ resp. $y^{(i)}, z^{(i)}, \varrho^{(i)}, \sigma^{(i)}$, obdržíme pro každou hodnotu x souřadnice jistého bodu P_x. Lze pak x_1, x_2, x_3, x_4 považovati za souřadnice tohoto bodu v *lokálním systému souřadném,* jehož souřadný tetraedr jest $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$†. Tento systém souřadný není úplně určen plochou $P_y P_z$. Neboť substitucí

$$\bar{y} = \alpha y + \beta z, \quad \bar{z} = \gamma y + \delta z, \quad \xi = \xi(x),$$

která nemění význam systému (A), přejdou y, z, ϱ, σ, v $\bar{y}, \bar{z}, \bar{\varrho}, \bar{\sigma}$, kde

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{\xi'}(\alpha\varrho + \beta\sigma) + \xi''\bar{y}, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{\xi'}(\gamma\varrho + \delta\sigma) + \xi''\bar{z}.$$

Vždy však obdržíme ze souřadnic x_i v prvém lokálním systému souřadnice $\bar{x}_i$ téhož bodu ve druhém z identity.

$$x_1 y + x_2 z + x_3 \varrho + x_4 \sigma = \bar{x}_1\bar{y} + \bar{x}_2\bar{z} + \bar{x}\bar{\varrho} + \bar{x}_4\bar{\sigma}.$$

To však znamená, že y, z, ϱ, σ jsou kontragredientní k x_1, x_2, x_3, x_4 a můžeme tedy y, z, ϱ, σ považovati za rovinové souřadnice v lokálním systému souřadném. Nyní však každý kovariant jest forma v y, z, ϱ, σ, tedy: *každý kovariant položen roven nule dává plochu, v rovinových souřadnicích invariantně spojenou s vytvořující přímkou základní zborcené plochy* ††.

---

* V dalším užívám označení Wilczynského knihy.

** W, V, 1.

*** W, V, 2.

† W, X, 1.

†† Totéž platí o ostatních teoriích Wilczynského; toto jednoduché pozorování, jak se zdá, Wilczynskému ušlo; neboť snadno nahlédneme, že na příklad při rovinných křivkách kovariant $C_2 = z^2 - 2y\rho - P_2 y^2$ (W III 1) znamená prostě oskulační kuželosečku, má tedy velmi jednoduchý geometrický význam; Wil-

8. Rovnice (1) části I., definující zborcenou plochu, napišme nyní v souhlase s označením Wilczynského takto:

$$
(17)\quad \begin{array}{ll} y^{(1)}=1, \; y^{(2)}=\delta x^4+ & y^{(3)}=x, \; y^{(4)}=0; \\ z^{(1)}=0, \; z^{(2)}=x+x^3+\alpha x^4+. & z^{(3)}=-\gamma x^4+\ldots, \; z^{(4)}=1. \end{array}
$$

Jsou tedy $(y^{(i)}, z^{(i)})$ řešení diferenciálního systému (A) pro

$$
(18)\quad \begin{array}{l} p_{11}=-48\gamma\delta x^5+\ldots, \; p_{12}=-12\delta x^2+\ldots, \; p_{21}=12\gamma x^2+ \\ p_{22}=-6(x+2\alpha x^2+\ .), \; q_{11}=q_{12}=q_{21}=q_{22}=0. \end{array}
$$

Odtud vypočteme postupně

$$
(19)\quad \begin{array}{ll} u_{11}=-2^6 \,.\, 3^2\gamma\delta x^4+ & u_{12}=-2^4 \,.\, 3\delta x+ \\ u_{21}=2^4 \,.\, 3\gamma x+ & u_{22}=-2^2 \,.\, 3-2^4 \,.\, 3\alpha x+\ldots \end{array}
$$

$$
(20)\quad \begin{array}{l} v_{11}=-2^9 \,.\, 3^2\gamma\delta x^3+\ldots, \; v_{12}=-2^5 \,.\, 3\delta+\ldots, \\ v_{21}=2^5 \,.\, 3\gamma+\ldots, \; v_{22}=-2^5 \,.\, 3\alpha+ \quad {}^{**}; \end{array}
$$

$$
(21)\quad \begin{array}{ll} I=-2^2 \,.\, 3-2^4 \,.\, 3\alpha x+ & J=2^8 \,.\, 3^2\gamma\delta x^2+ \quad {}^{***}, \\ K=2^{10} \,.\, 3^2\gamma\delta+. \;\; \dagger; & \end{array}
$$

$$
(22)\quad \Theta_4=2^4\ 3^2+2^7\ 3^2\alpha x+\ ..\dagger\dagger, \; \Theta_{10}=2^{14} \,.\, 3^4\gamma\delta+\ldots\dagger\dagger\dagger.
$$

Odtud plyne pro absolutní invariant $\gamma\delta$, který jsme geometricky vyložili v odst. 9., části I., výraz

$$
(23)\quad \gamma\delta=\tfrac{3}{16}\frac{\Theta_{10}}{\Theta_4^{\frac{5}{2}}}.
$$

Že se zde vyskytuje *odmocnina* z Θ_4, nepřekvapuje, neboť Θ_4 je diskriminant kovariantu *†

$$
C_2=u_{12}z^2-u_{21}y^2+(u_{11}-u_{22})yz,
$$

který vyjadřuje dvojici fleknodů *††.

Dále vypočteme

$$
(24)\quad \begin{array}{l} \varrho=2y'+p_{11}y+p_{12}z=2y'-(48\gamma\delta x^5+\ldots)y-(12\delta x^2+\ldots)z, \\ \sigma=2z'+p_{21}y+p_{22}z=2z'+(12\gamma x^2+..)y-(6x+12\alpha x^2+..)z; \end{array}
$$

---

czynski však praví: we shall later find another covariant, capable of a simple geometrical interpretation, to replace C_2. Slíbený kovariant jest na str. 68 a zní

$$
\begin{array}{l} h=[7(5\Theta'_3\Theta_8-756\Theta_3^{\frac{4}{3}})^2+25\Theta_8^{\frac{3}{8}}+1575\Theta_3^{\frac{2}{3}}\Theta_8^{\frac{2}{8}}P_2]\,y+ \\ +\,210\,\Theta_3\Theta_8(5\Theta'_3\Theta_8-756\Theta_3^{\frac{4}{3}})\,z+3150\Theta_3^{\frac{2}{3}}\Theta_8^{\frac{2}{8}}\,\rho; \end{array}
$$

znamená devátý bod base svazku kubických křivek, pro něž další body base jsou v osmi soumezných bodech dané křivky; jest tedy analyticky i geometricky značně složitější než C_2, před níž má jen to, že vyjadřuje bod, jsa lineární v y, z, ρ

* W IV 3 (20).

** W IV 3 (32).

*** W IV 3 (24).

† W IV 3 (34).

†† W IV 4 (52).

††† W IV 5 (78).

*† W IV 8 (106).

*†† W VI 1.

odtud

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&\varrho^{(1)} = -2^4 . 3\gamma\delta x^5 + \ldots \qquad && \varrho^{(2)} = -2^2 \quad \delta x^3 + \\
&\varrho^{(3)} = 2 - 2^2 \quad 3^2\gamma\delta x^6 + && \varrho^{(4)} = -12\delta x^2 + \\
&\sigma^{(1)} = 2^2 . 3\gamma x^2 + \quad \ldots, && \sigma^{(2)} = 2 - 2^2\alpha x^3 + \ldots, \\
&\sigma^{(3)} = 2^2\gamma x^3 + && \sigma^{(4)} = -(6x + 12\alpha x^2 + \ldots).
\end{aligned}
$$

Buďte nyní x_1, x_2, x_3, x_4 původní souřadnice bodové a u_1, u_2, u_3, u_4 kontragredientní rovinové; bodové souřadnice v lokální soustavě souřadné *pro* $x=0$ buďte s malou odchylkou od označení Wilczynského x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, kdežto kontragredientní souřadnice jsou y, z, ϱ, σ. Pak nalezneme ze (17) a (25)

$$(26)\qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1 : 2x'_4 : 2x'_3 : x'_2,$$

$$(27)\qquad y : z : \varrho : \sigma = u_1 : u_4 : 2u_3 : 2u_2.$$

Dále nalezneme *pro* $x=0$

$$(28)\qquad E = -2^5 . 3(\gamma y^2 - \alpha yz + \delta z^2)^{*}, \quad N = 2^2 . 3(z\varrho + y\sigma)^{**};$$

$$(29)\qquad C_3 = E + 2N = 2^3 . 3[z\varrho + y\sigma - 2(\gamma y^2 - \alpha yz + \delta z^2)]^{***}$$

tak že rovnice $C_3 = 0$ znamená dle (27)

$$u_1 u_2 + u_3 u_4 - 2(\gamma u_1^2 - \alpha u_1 u_4 + \delta u_4) = 0,$$

a máme tento výsledek: *Wilczynského kovariant C_3 vyjadřuje kvadriku W_2.*

9. Wilczynski uvádí† C_3 na tvar $\alpha z - \beta y$, kde

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2(u_{11} - u_{22})\varrho + 4u_{12}\sigma + \tfrac{1}{2}(v_{11} - v_{22})y + v_{12}z, \\
\beta &= 4u_{21}\varrho - 2(u_{11} - u_{22})\sigma + v_{21}y - \tfrac{1}{2}(v_{11} - v_{22})z,
\end{aligned}
$$

a hledá význam přímky $P_\alpha P_\beta$, také invariantně spojené s vytvořující přímkou $P_y P_z$. Nalezneme z (19) a (20) pro $x=0$ jako souřadnice P_α

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = 2^4 . 3\alpha : -2^5 . 3\delta : 2^2 . 3 : 0,$$

čili dle (26)

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2\gamma : -1 : 0 : -\alpha.$$

Rovnice přímky $P_\alpha P_\beta$ jsou tedy

$$2\gamma x_2 - \alpha x_3 + x_1 = 2\delta x_3 - \alpha x_2 + x_4 = 0$$

a tudíž††: *Wilczynského přímka $P_\alpha P_\beta$ jest hlavní přímka w_2 kvadriky W_2.* Vytvořující přímkou t. zv. ***hlavní plochy fleknodální kongruence***††† jest přímka $P_\varrho P_\sigma$, když byla neodvisle proměnná tak volena, že $\Theta_4 = $ konst., t. j. dle (22), když $\alpha = 0$. Tedy*† *Wilczynského vytvořující přímka*

---

* W IV 8 (107).

** W IV 8 (111).

*** W IV 8 (116).

† W X 6.

†† Část I., odst. 5 (34).

††† W X 5.

*† Část I., odst. 6.

hlavní plochy fleknodální kongruence jest totožna s hlavní přímkou h oskulačního hyperboloidu H. Proto jsem volil název hlavní přímka pro h, a rozšířil jsem jej na přímky w_1, w_2, které jsem úplně stejně definoval. Wilczynski definuje hlavní přímku h kvadriky H takto*: Buď P' (P'') druhý fleknod na vytvořující přímce f_1 (f_2) prvého (druhého) pláště fleknodální plochy** a φ_1 (φ_2) oskulační rovina fleknodální křivky v F_1 (F_2). Průsečíkem φ_1 s f_2 (φ_2 s f_1) veďme vytvořující přímku H prvé soustavy a buď P'_0 (P''_0) její průsečík s f_1 (f_2); sestrojme na f_1 (f_2), bod G_1 (G_2) tak, že

$$(P' P'_0 F_1 G_1) = (P'' P''_0 F_2 G_2) = -1. \tag{30}$$

Pak $G_1 G_2 \equiv h$. Jest patrno, že naše definice jest přirozenější, neboť φ_1, φ_2, P', P'' nelze určiti, známe-li pouze koeficienty až po x^4 včetně v rovnicích (17). Lépe jest definovati h tak, jak bylo učiněno zde v části I., odst. 5., načež Wilczynského definici jest považovati za relaci mezi P' a φ_1, P'' a φ_2. Pro přímku $P_\alpha P_\beta$ nalézá Wilczynski*** tuto konstrukci: Sestrojme bodem F_1 (F_2) přímku q' (q''), která spolu s vytvořující přímkou dělí harmonicky fleknodální tečnu f_1 (f_2) a tečnu fleknodální čáry v bodě F_1 (F_2). Přímka q' (q'') protne spojnici druhého fleknodu F_2 (F_1) s průsečíkem G_1 (G_2) přímek f_1 a h (f_2 a h) v bodě P_α (P_β). Dokázali jsme na konci odst. 4., části I., že q' a q'' leží na W_2, a v odst. 6., části I., že obě přímky $F_1 G_2$, $F_2 G_1$ protnou hlavní přímku w_2 kvadriky W_2. Spojením obou fakt vznikne Wilczynského konstrukce. O kvadrice W_2 samé Wilczynski se nezmiňuje; podotýká pouze, že kovadriant C_3 definuje projektivitu mezi přímkami $P_y P_z$, $P_\rho P_\sigma$, nepodávaje konstrukce této projektivity; tato jest ovšem zcela jednoduše určena tím, že body dotyku s H a s W_2 rovin přímkou vytvořující tvoří involuci o dvojných bodech F_1, F_2.

10. Splynou-li oba fleknody na uvažované přímce vytvořující, píšeme místo (17) dle (1) v odst. 1., části II.

$$\begin{gathered} y^{(1)} = 1, \quad y^{(2)} = cx^4 + \ldots, \quad y^{(3)} = x, \quad y^{(4)} = 0, \\ z^{(1)} = 0, \quad z^{(2)} = x + ax^4 + \ldots, \quad z^{(3)} = -x^3 - bx^4 + \ldots, \quad z^{(4)} = 1. \end{gathered} \tag{31}$$

Odtud najdeme podobně jako v odst. 8.

$$\begin{gathered} p_{11} = -2^2 \,.\, 3^2 cx^4 + \ldots, \quad p_{12} = -2^2 \,.\, 3cx^2 + \ldots, \\ p_{21} = 2 \,.\, 3x + 2^2 \,.\, 3bx^2 + \ldots, \quad p_{22} = -2^2 \,.\, 3ax^2 + \ldots, \\ q_{11} = q_{12} = q_{21} = q_{22} = 0; \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} u_{11} = -2^3 \; 3^2 \,.\, 5cx^3 + \qquad u_{12} = -2^4 \,.\, 3cx + \\ u_{21} = 2^2 \,.\, 3 + 2^4 \,.\, 3bx + \qquad u_{22} = -2^4 \,.\, 3ax + \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} v_{11} = -2^5 \,.\, 3^2 \; 7cx^2 + \ldots, \quad v_{12} = -2^5 \,.\, 3c + \ldots, \\ v_{21} = 2^5 \,.\, 3b + \;.., \quad v_{22} = -2^5 \,.\, 3a + \ldots; \end{gathered} \tag{34}$$

* W X 5.

** T. j. plochy vytvořené fleknodální tečnou f_1 (f_2); prvý fleknod jest F_1 (F_2).

*** W X 6.

$$(35)\qquad \begin{aligned}\varrho &= 2y' - (2^2 \, . \, 3^2 cx^4 + \dots) y - (2^2 \, . \, 3 cx^2 + \dots) z,\\ \sigma &= 2z' + (2 \, . \, 3x + \dots) y - (2^2 \, . \, 3 ax^2 + \dots) z.\end{aligned}$$

Jest tudíž *pro* $x = 0$ souvislost rovinových souřadnic u_i a y, z, ϱ, σ

$$(36)\qquad y : z : \varrho : \sigma = u_1 : u_4 : 2u_3 : 2u_2.$$

Dále jest pro $x = 0$

$$(37)\qquad E = -2^5 \, . \, 3(by^2 - ayz + cz^2),\quad N = -2^3 \, . \, 3y\varrho;$$

$$(38)\qquad C_3 = E + 2N = -2^4 \, . \, 3[y\varrho + 2(by^2 - ayz + cz^2)],$$

tak že dle (36) rovnice $C_3 = 0$ znamená

$$bu_1^2 - au_1u_4 + cu_4^2 + u_1u_3 = 0,$$

a vidíme, že i nyní a tedy *ve všech případech kovariant* C_3 *vyjadřuje* W_2.

Je-li identicky $\Theta_4 = 0$, t. j. má-li fleknodální čára dané zborcené plochy jedinou větev, jest, jak víme, W_2 bod, který jen tehdy leží na fleknodální tečně, když plocha náleží specielní lineární kongruenci, t. j. když také $\Theta_9 = 0$. Wilczynski (kap. XI, 1) tvrdí, že pro $\Theta_4 = 0$ bod W_2 vždy leží na fleknodální tečně, tato nesprávná věta vznikla na str. 221 chybou ve znamení.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DE CINQ DROITES INFINIMENT VOISINES.

PAR

EDOUARD ČECH.

(RÉSUMÉ DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT.)

Dans un mémoire antérieur „Les quadriques de Moutard“ (Publications de la Faculté des sciences de Brno N° 3.), j'ai considéré le faisceau (Q) des quadriques ayant un contact du second ordre avec une surface quelconque Π en un point simple O de celle-ci de façon que les tangentes en O à l'intersection d'une quelconque de ces quadriques avec Π soient les tangentes à osculation quadrique de Darboux. En choisissant arbitrairement une quadrique quelconque Q^λ de ce faisceau, j'envisage une certaine courbe C^λ dans le plan tangent de Π en O, et un certain cône Γ^λ au sommet O, et je construis ensuite la conique osculatrice d'une section plane arbitraire de Π en O.

Dans le présent mémoire, je suppose que la surface proposée Π soit réglée. On peut alors considérer simultanément les environs de tous les points d'une droite génératrice p de Π et on reconnaît aisément que les transformations Σ_k, dont la définition on trouve dans le résumé français du mémoire cité, s'élargissent, en restant birationnelles, en transformations à trois dimensions, que je continue à appeler Σ_k.

Il faut rappeler certaines notions relatives aux surfaces réglées que Wilczynski avait introduites*. Sur chaque génératrice p de la surface réglée Π, il y a deux points que je désignerai F_1, F_2 et que Wilczynski appelle «the flecnodes», dans lesquels Π a un contact du troisième ordre avec l'hyperboloide osculateur H. Les tangentes asymptotiques en F_1, F_2, les «flecnode tangents» de Wilczynski, seront désignées f_1, f_2.

Je commence par supposer que F_1 et F_2 soient distincts. En choisissant p, f_1, f_2 pour trois arêtes du tétraèdre de référence et une géneratrice quelconque du premier système de H** pour l'arête opposée a p, on peut, comme j'ai établi ailleurs, écrire les équations de Π sous la forme (1), H étant donné par l'équation (2). Les équations des Σ_k sont alors

$$\begin{aligned}
\varrho u_1 &= x_2 (x_1 x_2 - x_3 x_4),\\
\varrho u_2 &= - k x_2 x_3^2 + x_1 (x_1 x_2 - x_3 x_4),\\
\varrho u_3 &= - k x_2^2 x_3 - x_4 (x_1 x_2 - x_3 x_4),\\
\varrho u_4 &= - x_3 (x_1 x_2 - x_3 x_4).
\end{aligned}$$

* Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Leipzig 1906, chap. VI.

** p sera pour nous une génératrice du premier système de chaque quadrique qui la contient.

On aperçoit que Σ_0 est simplement la polarité par rapport à H. Des propriétés de ces transformations, je ne signalerai ici que la suivante : la courbe correspondante, dans Σ_k, à un faisceau de plans dont l'axe a rencontre *une* des droites p, f_1 et f_2, est une conique; quand a en rencontre deux, c'est simplement une droite.

Cela posé, choisissons H pour la quadrique Q^λ. Si l'on considère un point quelconque P de p, la courbe C^λ correspondante est une *conique* qui touche en P la tangente asymptotique et dont la courboure en P est égale à $+\frac{5}{6}$ de celle de la courbe asymptotique; cette conique rencontre p une seconde fois dans le point P', conjugu harmonique de P par rapport à F_1 et F_2; soit t la tangente de C^λ en P'. Quand P décrit p, les diverses positions de t sont les génératrices du second système d'une *quadrique*, donnée par l'équation (13), que j'appelle W_1 et qui touche Π en F_1 et F_2. La considération corrélative conduit à la *seconde quadrique* W_2, dont l'équation est (16) et qui est la surface polaire de W_1 par rapport a H et aussi par rapport au complexe linéaire osculateur de Π, quand celui-ci n'est pas spécial. Les quadriques W_1 et W_2 se touchent mutuellement en deux points de p qui sont identiques aux «involute points» de Wilczynski*. La génératrice du second système de W_2 en F_1 est la conjuguée harmonique de p par rapport à f_1 et à la tangente du lieu de F_1**.

Ayant la droite p commune, les quadriques H et W_1 se coupent, outre cela, en une cubique gauche. Deux génératrices d'une quelconque de ces quadriques touchent cette cubique; la génératrice conjuguée harmonique de p par rapport à ces deux tangentes sera nommée *la droite principale* de la quadrique en question. Corrélativement, je définis encore la droite principale de W_2. Je désigne h, w_1, w_2 ces droites principales dont les équations sont respectivement (31), (33) et (39). Si l'on désigne encore G_1, G_2 les intersections de h avec f_1 et f_2, on peut énoncer la propriété suivante: Les quatre droites p, h; w_1, w_2 coupent les droites $F_1 G_2$, $F_2 G_1$ et précisément en des quadruples harmoniques.

Si l'on choisit particulièrement h pour l'arête opposée à p du tétraèdre de référence, on a, en déterminant convenablement le point unité, la forme réduite (38) des équations de Π, dans laquelle $I = \gamma'\delta$ est un invariant absolu qui dépend d'ailleurs de l'ordre des deux points F_1 et F_2 en changent son signe quand on permute ceux-ci. J'expliquerai plus tard la signification géométrique de cet invariant. Partant des équations réduites, on peut aisément indiquer toutes les transformations homographiques et corrélatives qui font correspondre à Π une surface ayant un contact du quatrième ordre avec la proposée en tous les points

---

* Livre cité, p. 208.

** La «flecnode curve» de Wilczynski.

de p. Je laisse de côté ici les propriétés caractèristiques géométriques de ces transformations.

La manière d'employer les quadriques W_1 et W_2 pour la construction des coniques osculatrices, est parfaitement claire d'après le mémoire antérieur, cité au commencement. Cependant, en F_1 (et en F_2), ces constructions tombent en défaut. Voici comment on procédera en F_1. t_1 étant une tangente quelconque de Π en F_1, soit t_2 la conjuguée harmonique de t_1 par rapport à f_1 et à la génératrice du second système de W_2 qui passe par F_1; et soit u la conjuguée harmonique de p par rapport aux t_1, t_2. Une quadrique bien déterminée touche Π le long de p et de f_2 (*non de* f_1) et passe par u. Soit R un point arbitraire de cette quadrique et ϱ le plan correspondant à R dans Σ_1. Aux deux droites t_1 et t_2 appartient la même quadrique de Moutard, touchant H le long de p et de f_1, dont la détermination s'achève par cela que le plan polaire de R par rapport à celle-ci coupe le plan ϱ suivant une droite située dans le plan tangent de Π en F_2.

Connaissant H et W_1, par exemple, on a tout de suite aussi F_1, F_2, f_1, f_2 et W_2. Pour connaître tout ce qui se rapporte à cinq génératrices infiniment voisines de Π, on a besoin, d'après ce qui a été dit jusqu'ici, encore des transformations Σ_k. Je vais montrer que l'invariant I suffise à déterminer les Σ_k. Je commence par rappeler que Σ_k fait correspondre, à un faisceau de plans dont l'axe a rencontre p en P, une conique qui touche en P la tangente asymptotique, dont la courbure en P est $-\frac{2k}{3}$ fois celle de la courbe asymptotique, et qui touche encore la polaire réciproque de a par rapport à H en son intersection avec Π. De cela résulte encore, d'abord que les courbures des lignes asymptotiques suffisent à déterminer les Σ_k, et ensuite que ces courbures à leur tour sont facilement à indiquer, si l'on connaît la courbe qui correspond dans une quelconque des Σ_k à un faisceau de plans dont l'axe ne rencontre pas p. Cela posé, soit a la droite qui passe par G_2 et par l'intersection des droites F_2G_1 et w_2*; la courbe correspondante dans Σ_{2I} au faisceau de plans passant par a est la conique intersection de W_1 et du plan G_1u_2, u_2 étant la conjuguée harmonique de p par rapport à f_2 et à la génératrice du second système de W_1 en F_2. Cet énoncé peut se modifier: 1. en permutant F_1F_2 et changent I en $-I$; 2. en échangeant W_1 et W_2; 3. en se servant de la corrélation par rapport au complexe linéaire osculateur de Π. On a ainsi huit formes diverses de l'énoncé.

Dans le cas particulier où f_1, par exemple, est une droite directrice de Π (on a alors $I=0$), des autres circonstances se présentent. La droite w_1 coupe alors f_2 en G_2. La transformation Σ_k, k étant quelconque, fait correspondre aux plans passant par w_1 une conique C, dont le plan

---

* Je rappelle que G_1 et G_2 sont les intersections de f_1 et f_2 avec h.

soit τ. Ce plan passe par $F_2 G_1$, mais H et W_1 ne suffisent pas à achever sa détermination. Soit τ' le plan conjugué harmonique de τ par rapport à p et f_2; la conique C est la projection de la conique suivant laquelle le plan τ' rencontre la quadrique W_2, le centre de projection étant F_1.

Dans tout ce qui précède, il a été supposé que les deux points F_1 et F_2 sur la génératrice p considérée soient distincts.

Dans la deuxième partie de mon mémoire, je passe aux modifications qui ont lieu quand on a, sur p, $F_1 \equiv F_2$ et, par cela même, $f_1 \equiv f_2$. Si l'on prend p et f_1 pour deux arêtes du tétraèdre de référence, en choisissant deux génératrices de H pour les arêtes opposées à celles-là on amène les équations de Π à la forme (1). Les équations des Σ_κ sont alors,

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= x_2 (x_1 x_2 - x_3 x_4), \\ \varrho u_2 &= k x_2^2 x_3 + x_1 (x_1 x_2 - x_3 x_4), \\ \varrho u_3 &= -k x_2^3 - x_4 (x_1 x_2 - x_3 x_4), \\ \varrho u_4 &= -x_3 (x_1 x_2 - x_3 x_4). \end{aligned}$$

Les propriétés essentielles de ces transformations se conservent dans le cas actuel.

On peut repéter le même procédé qui, dans le cas général, nous a amené aux quadriques W_1 et W_2. En continuant a choisir H pour Q^λ, on trouve maintenant que toutes les coniques C^λ passent par F_1. Désignons par W_1 le lieu des tangentes en F_1 de ces coniques. Corrélativement, le plan tangent de Π en F_1 touche toutes les cônes Γ^λ; soit W_2 l'enveloppe des génératrices de ces cônes situées dans ce plan. Si la constante c des équations (1) est différente de zéro, W_1 est le cône quadratique (8) et l'enveloppe W_2 est la conique (10). Mais si les deux points F_1 et F_2 coincident sur chaque génératrice de Π et non pas seulement sur p, on a nécessairement $c = 0$; le lieu W_1 est alors simplement *le plan* (8′) et l'enveloppe W_2 est le *point* (11). Si la surface Π a deux droites directrices infiniment voisines, on a aussi $a = 0$; le plan W_1 et le point W_2 sont alors incidents avec f_1. Dans tous les cas, W_1 et W_2 sont polaires mutuellement par rapport a H. Si l'on a $F_1 \equiv F_2$ sur chaque génératrice, la tangente au lieu de F_1 est la conjuguée harmonique de f_1 par rapport aux droites p et $W_2 F_1$. En supposant $c = 0$, j'énonce des définitions intrinsèques de toutes les homographies et corrélations qui font correspondre à Π une surface ayant un contact du quatrième ordre avec la proposée en tous les points de p.

Dans la troisième partie de mon mémoire, je commence par étudier les courbes asymptotiques de Π. Les congruence linéaires osculatrices de ces courbes contiennent toutes les génératrices du premier système de H, leur complexes linéaires osculateurs contiennent la congruence linéaire osculatrice de Π. Par le cône osculateur d'une quelconque de ces courbes, j'entends, avec Wilczynski* le cône quadratique osculateur

* Livre cité, p. 250.

du cône projetant la courbe de son point considéré; corrélativement on définit la conique osculatrice. Ces définitions posées, on a la proposition suivante: Le reste de l'intersection de H et de W_1, en faisant abstraction de p et, suivant le cas, de f_1 ou de f_2, est le lieu des pôles de la génératrice par rapport aux coniques osculatrices des courbes asymptotiques. En remplaçant W_1 par W_2 et les coniques par les cônes, on arrive à la proposition corrélative.

En 1908, Segre avait considéré* dans le plan tangent d'une surface arbitraire Π en son point P, la courbe lieu de points tels que la courbe de contact du cône circonscrit à Π ait en P un contact du troisième ordre avec son plan osculateur. Dans le cas présent d'une surface réglée, la courbe de Segre est une conique, qui touche en P la tangente asymptotique, dont la courbure en P diffère par le signe seule de celle de la courbe asymptotique, et qui touche la génératrice du second système de W_1 située dans le plan tangent de Π en P, en son intersection avec p.

Ce qui a été dit, montre d'une manière suffisante l'importance des quadriques W_1 et W_2 pour la géométrie projective infinitésimale des surfaces réglées. Il me reste à dire quelques mots sur la liaison qui existe entre ma théorie géométrique et celle analytique que Wilczynski avait développée dans les chapitres IV—XII du livre cité. Dans la théorie de Wilczynski, on envisage les quatre sémicovariants y, z, ϱ, σ, au moyen desquels on définit les coordonnés ponctuelles locales $x_1 x_2 x_3 x_4$ correspondantes à une génératrice arbitraire**. L'expression $x_1 y + x_2 z + x_3 \varrho + x_4 \sigma$ définissant le point aux coordonnées locales x_i, on est amené à considérer, étant donné un covariant quelconque, y, z, ϱ, σ comme coordonnées tangentielles dans le système local. De ce point de vue, le covariant C_3 de Wilczynski*** représente notre quadrique W_2. L'invariant que j'ai plus haut désigné par I, est, dans la notation de Wilczynski, représenté par $\frac{3}{16}\frac{\Theta_{10}}{\Theta_4^{\frac{5}{2}}}$. La droite $P_\alpha\, P_\beta$ de Wilczynski est ce que j'ai appelé la droite principale de W_2. Quant à la construction de cette droite, donnée par Wilczynski†, elle résulte assez aisément de ce qui a été dit plus haut. La droite h est identique à la génératrice de la «principal surface of the flecnode congruence». C'est pourquoi j'ai adopté le nom de la droite principale pour h, en l'élargissant aux w_1 et w_2. La définition de h donnée par Wilczynski†† n'est pas naturelle comme celle, parce qu'elle fait usage de six droites infiniment voisines de Π.

---

* Segre, Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie, Rend. Acc. Lincei, 1908.

** Livre cité, p. 191.

*** L. c., chap. X, § 6.

† p. 217.

†† L. cité, chap. X, § 6.

L'identité de C_3 et W_2 ne cesse pas d'être exacte quand on a identiquement $F_1 \equiv F_2$. La proposition énoncée dans le § 1 du chap. X du livre cité, d'après laquelle le point représenté par le covariant C_3 devrait être située sur f_1, ne peut donc pas être exacte. En effet, on déduit des équations*

$$\alpha = p_{12} u_{21} y, \quad \beta = 4 u_{21} \varrho - p_{12} u_{21} \sigma$$

l'expression suivante qui définit le point de rencontre des droites qui joignent les points correspondants aux droites $P_y P_z$ et $P_\alpha P_\beta$:

$$\gamma \equiv p_{12} \sigma - 2\varrho$$

Wilczynski trouve $\gamma \equiv y$**.

---

* Page 221, ligne 31.

** Page 222, lignes 13—15.