Eduard Čech

Les conditions d'intégrabilité de la théorie projective des surfaces

Věstnik 1921-22 (1921,1922), 18 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500849

X.

Les conditions d'intégrabilité de la théorie projective des surfaces.

Par **Eduard Čech.**

Předloženo dne 22. list. 1922.

M. Fubini a montré[1]) que l'on peut construire trois formes différentielles, déterminant une hypersurface régulière[2]) S de l'espace linéaire a $n+1$ dimensions, à transformations homographiques de cet espace près. Rappelons rapidement le procédé de M. Fubini. On suppose que les coordonnées homogènes[3]) x des points de S soient exprimées en fonction de n variables indépendentes quelconques $u_1, u_2, \ldots u_n$, et on choisit une forme différentielle quadratique

$$g \equiv \sum_{ik} g_{ik}(u_1, \ldots u_n)\, du_i\, du_k,$$

assujettie à l'unique condition que son discriminant

$$A \doteq |\, g_{ik} \,|$$

soit différent de zéro. Cela posé, introduisons les deux formes différentielles

$$F_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{A}} \left| x, x_1, \ldots x_n, \sum_{ik} x_{ik}\, du_i\, du_k \right| - \sum_{ik} \triangle_{ik} du_i\, du_k,$$

$$F_3 \equiv \frac{2}{\sqrt{A}} \left| x, x_1, \ldots x_n, \sum_{ikl} x_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \right| -$$

$$- 3 \sum_{ikl} \triangle_{ik}^{(l)} du_i\, du_k\, du_l + \frac{3}{n+2} F_2\, d \log \frac{\nabla}{A} \doteq$$

$$= 2 \sum_{ikl} \triangle_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l\, .$$

---

[1]) F o n d a m e n t i d i g e o m e t r i a p r o i e t t i v o - d i f f e r e n z i a l e, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 43, 23 marzo 1919.

[2]) Par ce mot j'entends que S possède ∞^n hyperplans tangents distincts.

[3]) Je dénote toujours par une lettre unique les $n+2$ coordonnées homogènes d'un point ou hyperplan.

Ici, les x_i, x_{ik}, x_{ikl} sont les dérivées covariantes des x formées par rapport a g; $\Delta_{ik}^{(l)}$ est le système covariant dérivé du système Δ_{ik}, par rapport a g; enfin, ∇ est le discriminant de F_2. La définition des formes F_2, F_3 est évidemment indépendente du choix des coordonnées curvilignes u_1, u_2, . . u_n; elle ne changent non plus si l'on effectue sur les x une transformation linéaire et homogène, à coefficients constants et à déterminant égal à l'unité. D'ailleurs, on démontre les identités

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} \Delta_{ikl} = 0, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\vartheta_{ik} = \frac{1}{\nabla} \frac{\partial \nabla}{\partial \Delta_{ik}}.$$

Si l'on remplace la forme g par une autre forme différentielle quadratique g', à discriminant A', ou que l'on multiplie les coordonnées homogènes x par un facteur ϱ, fonction arbitraire des u, on peut montrer que les formes F_2, F_3 se transforment comme il suit

$$F_2' = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}} F_2, \quad F_3' = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}} F_3, \tag{2}$$

respectivement

$$F_2' = \varrho^{n+2} F_2, \quad F_3' = \varrho^{n+2} F_3.$$

Or, fixons d'abord le facteur arbitraire des x d'une manière quelconque, et choisissons g de façon que l'on ait

$$\Delta = A.$$

On voit tout de suite que cette condition détermine A à une racine $(n+2)^{ième}$ de l'unité près. Cela posé, si l'on remarque que, d'après (2), c'est le discriminant seul de la forme g qui détermine les valeurs des formes F_2 et F_3, on peut supposer simplement $g \equiv F_2$, d'où

$$F_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \left| x, x_1, \ldots x_n, \sum_{ik} x_{ik}\, du_i\, du_k \right| \equiv \sum_{ik} \Delta_{ik}\, du_i\, du_k$$

$$F_3 \equiv \frac{2}{\sqrt{\nabla}} \left| x, x_1, \ldots x_n, \sum_{ikl} x_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \right| \equiv 2 \sum_{ikl} \Delta_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l$$

où maintenant, et dans tout ce qui suit, les dérivées covariantes sont prises par rapport a F_2. Insistons sur ce que les formes F_2, F_3 ne sont pas complètement déterminées que si l'on fixe le facteur arbitraire des x. Aussi, on peut faire correspondre au choix de ce facteur, celui des coordonnées homogènes ξ des hyperplans tangents de S, si l'on pose, faisant usage d'une notation abbreviée facile à comprendre

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \mid x, x_1, \ldots x_n \mid .$$

M. Fubini a aussi donné un procédé simple qui suffit, au moins en général, à lever toute indétermination. En faisant la supposition que le discriminant de F_2 soit divers de zéro (cas normal de M. Fubini), on peut demander que ce discriminant soit égal à

$$\nabla^{3.2^{n-2}} .$$

Toutefois, le choix du facteur arbitraire des x ayant une signification géométrique bien nette [4]) et, plus spécialement, pour obtenir la géometrie affine comme un cas spécial de celle projective [5]), on fait le mieux, à mon avis, en conservant le facteur arbitraire des x qui, une fois choisi, détermine aussi celui de F_2 e F_3 et celui des ξ.

On vérifie tout de suite les identités suivantes

$$\begin{aligned} &S\xi x = S\xi x_i = S\xi_i x = 0 \;^{6)}\\ (3)\qquad &\Delta_{ik} = S\xi x_{ik} = -S\xi_i x_k = S\xi_{ik} x,\\ &\Delta_{ikl} = S\xi x_{ikl} = -S\xi_i x_{kl} = S\xi_{ik} x_l = -S\xi_{ikl} x. \end{aligned}$$

En désignant encore par nX et $n\Xi$ les paramètres différentiels seconds de x et ξ.

$$X = \frac{1}{n}\Delta_2 x = \frac{1}{n}\sum_{ik} \vartheta_{ik} x_{ik},$$

$$\Xi = \frac{1}{n}\Delta_2 \xi = \frac{1}{n}\sum_{ik} \vartheta_{ik} \xi_{ik},$$

on a de plus

$$(4)\quad SX\xi = S\Xi x = 1,\quad SX\xi_i = SX_i\xi = S\Xi x_i = S\Xi_i x = 0.$$

Des identités (3) et (4) découlent les équations fondamentales de la théorie projective des hypersurfaces

---

4) Voir mon Mémoire que je citerai bientôt.

5) Voir G. Sannia, Riavvicinamento di geometrie differenziali etc, Annali di Matematica., t. 31, 1923.

6) Le symbole S signifie la somme étendue aux $n+2$ coordonnées homogènes.

$$
\begin{aligned}
&x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} \Delta_{ikr} x_s + b_{ik} x + \Delta_{ik} X, \\
(5)\qquad &\xi_{ik} = -\sum_{rs} \vartheta_{rs} \Delta_{ikr} \xi_s + \beta_{ik} \xi + \Delta_{ik} \Xi, \\
&X_i = e_i x + \sum_{rs} \vartheta_{rs} l_{ir} x_s, \\
(6)\qquad &\Xi_i = \varepsilon_i x + \sum_{rs} \vartheta_{rs} \lambda_{ir} \xi_s
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
&f_2 = \sum_{ik} b_{ik}\, du_i\, du_k, \quad f_2' = \sum_{ik} \beta_{ik}\, du_i\, du_k, \\
(7)\qquad &\varphi_2 = \sum_{ik} l_{ik}\, du_i\, du_k, \quad \varphi_2' = \sum_{ik} \lambda_{ik}\, du_i\, du_k, \\
&\psi_1 = \sum_i e_i\, du_i, \quad \psi_1' = \sum_i \varepsilon_i\, du_i
\end{aligned}
$$

sont certaines formes différentielles covariantes.

Les résultats de M. Fubini que je viens de rappeler tout sommairement se trouvent déduites d'une manière nouvelle dans mon Mémoire I fondamenti di geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo del Fubini, Annali di Matematica.[1]) t. 31, 1923, p. 251. Le facteur des x étant choisi arbitrairement, je fixe celui des ξ de manière que le rapport des déterminants de la matrice

$$| x, x_1, \ldots x_n |$$

aux ξ soit égal au rapport des déterminants de la matrice

$$| \xi, \xi_1, \ldots \xi_n |$$

aux x. Ceci fait, on a

$$F_2 = -S\, dx\, d\xi, \quad F_3 = S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2 x)$$

et

$$| x, x_1, \ldots x_n, X | = | \xi, \xi_1, \ldots \xi_n, \Xi | = \sqrt{-\Delta}.$$

La congruence des droites (xX), où ce qui est la même chose, des droites d'intersections des n hyperplans

$$\xi_1, \ldots \xi_n$$

est conjuguée à S, en ce sens que, à chaque point de S, les n directions correspondantes aux développables de la congruence sont deux à deux conjuguées par rapport à la quadrique $F_2 = 0$ des directions asymptotiques. Réciproquement, si l'on choisit convenablement le facteur des x, on peut arriver ainsi à une congruence conjuguée a S et donnée à l'avance. De quelle maniére que l'on a choisi le facteur des x, si l'on

[1]) Voir aussi ma Note Sur les formes différentielles de M. Fubini, Rend. Acc. Lincei, vol. 31, 7 Maggio 1922.

donne aux paramètres u des valeurs fixes, l'hyperplan Ξ est toujours polaire du point X par rapport à une quadrique bien déterminée, la quadrique de Lie du point correspondant sur S. L'équation $F_2=0$ donne les tangentes à l'intersection de S et de la quadrique de Lie. Les points focaux de la congruence (xX) sont les points

$$X+\varrho x,$$

où ϱ sont les n racines de l'équation

$$| l_{ik}+\varrho\Delta_{ik} |=0,$$

supposées distinctes, et les directions correspondantes sur S ont la même polaire par rapport à toutes les quadriques du faisceau

$$\psi_2+\lambda F_2.$$

D'ailleurs, le lecteur démontrera aisément, en s'appuyant aux équations fondamentales (5) et (6), ce résultat un peu plus général qui donne la signification géométrique de l'équation $\varphi_2=0$. Pour des valeurs fixes quelconques des paramètres u, soit t la tangente de S qui correspond aux accroissements du_i, et τ la tangente de l'hypersurface engendrée par le point X qui correspond aux accroissements δu_i ; t' soit la tangente de S qui rencontre τ. Alors

$$\sum_{ik} l_{ik}\, du_i\, \delta u_k=0$$

est condition nécessaire et suffisante pour que t e t' soient conjuguées par rapport à $F_2=0$. Plus simple encore est la signification de l'équation $\psi_1=0$; elle caractérise les accroissements du_i auxquels correspondent les tangentes de l'hypersurface engendrée par X qui rencontrent l'espace d'intersection des hyperplans ξ et Ξ. Corrélativement pour φ_2' et ψ_1'.

Quelques relations entre les formes différentielles (7) découlent immédiatement des équations fondamentales (5) et (6). Ayant égard aux identités (3) et (4), on en déduit

(8) $$l_{ik}=-SX_i\xi_k,\quad \lambda_{ik}=-S\Xi_i x_k$$

(9) $$b_{ik}=-Sx_{ik}\Xi-\omega\Delta_{ik},\quad \beta_{ik}=SX\xi_{ik}-\omega\Delta_{ik},$$

(10) $$e_i=SX_i\Xi,\quad \varepsilon_i=SX\Xi_i,$$

où j'ai posé

(11) $$\omega=SX\Xi.$$

De plus, les équations (5) comparées aux celles qui définissent X et Ξ donnent

(12) $$\sum_{ik} \vartheta_{ik} b_{ik} = \sum_{ik} \vartheta_{ik} \beta_{ik} = 0.$$

En dérivant (11), on obtient des équations (10)

(13) $$e_i + \varepsilon_i = \omega_i$$

ou

$$\psi_1 + \psi_1' = d\omega.$$

Donc: si une des formes linéaires ψ_1 et ψ_1' est une différentielle exacte, l'autre possède la même propriété. Ce fait est d'ailleurs intuitif. Car si ψ_1 est une différentielle exacte, soit

$$\psi_1 = d\psi,$$

les équations (6) montrent que toute hyperplan tangent de l'hypersurface engendrée par le point

$$X - (\psi + C)x \qquad (C \text{ constant})$$

passe par l'intersection des hyperplans ξ et Ξ correspondants et viceversa. Donc, *si* ψ_1 est une différentielle exacte, et seulement dans ce cas, il existe une (et par suite ∞^1) hypersurface Σ correspondant point par point à S et telle que, pour des valeurs quelconques des u, le point correspondant de Σ soit situé sur la droite (xX) et, simultanément, l'hyperplan tangent de Σ passe par l'espace $(\xi\Xi)$ polaire de la droite (xX) par rapport à la quadrique de Lie. Or on voit que cette propriété reste la même si l'on échange points et hyperplans.

En dérivant les identités (4), on déduit des équations (8) et (9)

$$l_{ik} = SX\xi_{ik} = -SX_i\,\xi_k = SX_{ik}\xi,$$

(14) $$\lambda_{ik} = S\Xi x_{ik} = -S\Xi_i\,x_k = S\Xi_{ik}x,$$

(15) $$b_{ik} = \lambda_{ik} - \omega\,\Delta_{ik}, \quad \beta_{ik} = l_{ik} - \omega\,\Delta_{ik}$$

Des équations (12) et (15), il vient

(16) $$\omega = \frac{1}{n}\sum_{ik} \vartheta_{ik} l_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{ik} \vartheta_{ik} \lambda_{ik}$$

Les relations déduites jusqu'ici montrent que l'on peut exprimer les formes ψ_1', f_2, f_2' au moyen des F_2, F_3, φ_2, φ_2', ψ_1. On parvient à d'autres relations en formant les conditions d'intégrabilité des équations fondamentales (5) et (6). M. Fubini, dans la Note Il problema della deformatione proiettiva delle ipersuperficie. Le varietà a un qualsiasi numero di dimensioni[1]) a écrit ces conditions d'intégrabilité sous la forme suivante[2]), h, k, r, s, t, ϱ étant des indices qui prennent les valeurs 1 à n.

(17) $$[st, rk] = \sum_h \vartheta_{hk}(\eta_{sr} l_{th} - \eta_{tr} l_{sh}) + \sum_h \vartheta_{hr}(\eta_{tk}\lambda_{hs} - \eta_{sk}\lambda_{ht}) + \omega(\eta_{rt}\eta_{sk} - \eta_{rs}\eta_{tk}),$$

(18) $$\eta_{rt}\varepsilon_s - \eta_{rs}\varepsilon_t + \sum_\varrho \vartheta_{r\varrho}(\lambda_{\varrho st} - \lambda_{\varrho ts}) + \sum_{\varrho hk} \vartheta_{r\varrho}\vartheta_{hk}(\Delta_{s\varrho h}\lambda_{tk} - \Delta_{t\varrho h}\lambda_{sk}) = 0,$$

(19) $$\eta_{rt} e_s - \eta_{rs} e_t + \sum_\varrho \vartheta_{r\varrho}(l_{\varrho st} - \lambda_{\varrho ts}) - \sum_{\varrho hk} \vartheta_{r\varrho}\vartheta_{hk}(\Delta_{s\varrho h} l_{tk} - \Delta_{t\varrho h} l_{sk}) = 0,$$

(20) $$e_{st} - e_{ts} = \varepsilon_{ts} - \varepsilon_{st} = \sum_{hk} \vartheta_{hk}(\lambda_{sh} l_{tk} - \lambda_{th} l_{sk}).$$

Dans ces équations, $l_{\varrho st}$, $\lambda_{\varrho st}$, e_{st}, ε_{st} sont les systèmes covariants dérivés des systèmes $l_{\varrho s}$, $\lambda_{\varrho s}$, e_s, ε_s,

$$\eta_{rr} = 1, \quad \eta_{rs} = 0 \text{ pour } r \gtrless s,$$

et enfin

(21) $$[st, rk] = \sum_{h\varrho} \vartheta_{hk}\vartheta_{r\varrho}\Big[\Delta_{\varrho hts} - \Delta_{\varrho hst} + (st, h\varrho) + \sum_{ij} \vartheta_{ij}(\Delta_{\varrho ti}\Delta_{hjs} - \Delta_{\varrho si}\Delta_{hjt})\Big],$$

$\Delta_{h\varrho ts}$ étant le système covariant dérivé du système $\Delta_{h\varrho t}$, et

$$(st, h\varrho) = \sum_r \Delta_{rt}\frac{\partial}{\partial u_\varrho}\left\{\begin{matrix} sh \\ r \end{matrix}\right\} - \sum_r \Delta_{rt}\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{\begin{matrix} s\varrho \\ r \end{matrix}\right\} + \sum_k \left[\left\{\begin{matrix} sh \\ k \end{matrix}\right\}\sum_r \Delta_{rt}\left\{\begin{matrix} k\varrho \\ r \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} s\varrho \\ k \end{matrix}\right\}\sum_r \Delta_{rt}\left\{\begin{matrix} hk \\ r \end{matrix}\right\}\right]$$

sont les symboles de Riemann déduites de la forme fondamentale F_2.

[1]) Rendiconti Accademia Lincei, vol. 27, 28 settembre 1918. Dans les formules de cette. Note, il faut corriger les deux fautes d'impression: formule (19) au lieu de $\eta_{rs} l_t - \eta_{rt} l_s$ lisez $\eta_{rs}\lambda_t - \eta_{rt}\lambda_s$, et formule (12) au lieu de $\sum_h C_{th}\lambda_{sh}$ lisez $\sum_h C_{th} l_{sh}$.

[2]) Les notations de M. Fubini dans la Note citée sont un peu différentes des nôtres. En outre, j'ai fait usage de relations (13) et (15).

Arrêtons nous pour un instant au cas spécial où la forme ψ_1 est une différentielle exacte. Les formules (20) donnent alors

$$\sum_{hk} \vartheta_{hk} (\lambda_{sh}\, l_{tk} - \lambda_{th}\, l_{sk}) = 0, \quad (s, t = 1, \ldots n)$$

autrement dit, le système covariant

$$a_{st} = \sum_{hk} \vartheta_{hk}\, l_{sh}\, \lambda_{tk}$$

est symmétrique. Or on voit tout de suite que la relation bilinéaire

$$\sum_{st} a_{st}\, du_s\, \delta u_t = 0$$

donne le produit des polarités par rapport aux trois quadriques $\varphi_2 = 0$, $F_2 = 0$, et $\varphi_2' = 0$. Dans le cas considéré, ce doit être identique au produit des polarités par rapport à $\varphi_2' = 0$, $F_2 = 0$ et $\varphi_2 = 0$. On en déduit que les n directions ayant la même polaire par rapport a $\varphi_2 = 0$ et $F_2 = 0$ ont la même polaire aussi par rapport à $\varphi_2' = 0$. Donc, d'après ce que nous avons dit plus haut sur la signification géométrique de ces directions, si ψ_1 est une différentielle exacte, les développables de deux congruences (xX) et $(\xi\Xi)$ correspondent au mêmes courbes sur S, et vice versa.[10]) Remarquons que nous avons déjà donnée une autre interprétation géométrique de cette circonstance particulière.

Les symboles $[st, rk]$ de M. Fubini obéissent aux lois

$$[ts, rk] = -[st, rk],$$
$$[st, rk] + [st, kr] = 2 \sum_{h\varrho} \vartheta_{r\varrho}\, \vartheta_{hk} (\Delta_{\varrho hts} - \Delta_{\varrho hst})\,^{11})$$

On peut donc, dans la formule (17), se limiter à supposer $s < t$, $r < k$, pourvu que l'on ajoute les équations

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{h\varrho} \vartheta_{r\varrho}\, \vartheta_{hk} (\Delta_{h\varrho ts} - \Delta_{h\varrho st}) \\ (22) \qquad & = \sum_{h} [(\eta_{sr}\, \vartheta_{hk} + \eta_{sk}\, \vartheta_{hr}) (l_{th} - \lambda_{th}) - \\ & - (\eta_{tr}\, \vartheta_{hk} + \eta_{tk}\, \vartheta_{hr}) (l_{sh} - \lambda_{sh})]. \end{aligned}$$

La discussion de ces condititions d'intégrabilité, en

---

[10]) On a supposé que les racines de l'équation $| l_{ik} + \varrho \Delta_{ik} | = 0$ soient distinctes.

[11]) Dans la Note citée de M. Fubini, le facteur 2 manque par faute d'impression.

supposant $n>2$, a été faite par M. Fubini dans la Note citée. On y arrive au résultat que les formes F_2 et F_3 suffisent à déterminer toutes les autres. Il résulte des belles recherches de M. Cartan[12]) que pour $n=2$, il existe toutes une série des surfaces, dépendant de six fonctions arbitraires d'un argument, où les formes F_2 et F_3 étant données, il y a encore un paramètre (au moins) arbitraire dans les autres formes différentielles.

Dans ce qui suit, je discute les conditions d'intégrabilité, pour $n=2$, par le calcul direct. Une autre méthode pour écrire les conditions d'intégrabilité pour $n=2$ a été employée par M. Fubini dans deux Notes intitulées **Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale di una superficie**[13]). L'auteur y suppose le facteur des x normalisé de façon à avoir

$$\frac{1}{\nabla^2}\begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix}=1$$

et arrive à un résultat assez élégant, sans écrire toutefois explicitement les conditions d'intégrabilité pour les coordonnées curvilignes les plus générales. Ici, ja ne ferai aucun usage des paramètres asymptotiques.

Faisons donc, dans les formules précedentes, $n=2$. L'équation (25) donne, si l'on désigne par K la courbure de F_2,

$$\begin{aligned}[12,12]=&\vartheta_{11}\vartheta_{12}(\Delta_{1121}-\Delta_{1112})+(\vartheta_{11}\vartheta_{22}+\vartheta_{12}^2)(\Delta_{1221}-\Delta_{1122})\\ &+\vartheta_{12}\vartheta_{22}(\Delta_{2221}-\Delta_{1222})-K\\ &-\frac{1}{\nabla}[\vartheta_{11}(\Delta_{111}\Delta_{122}-\Delta_{112}^2)+\\ &+\vartheta_{12}(\Delta_{111}\Delta_{222}-\Delta_{112}\Delta_{122})+\vartheta_{22}(\Delta_{112}\Delta_{222}-\Delta_{122}^2)].\end{aligned}$$

En premier lieu, on a l'équation (17), où l'on doit poser $s,t,r,k=1,2,1,2$. Il vient

$$\vartheta_{11}\vartheta_{12}(\Delta_{1121}-\Delta_{1112})+(\vartheta_{11}\vartheta_{22}+\vartheta_{12}^2)(\Delta_{1221}-\Delta_{1122})+$$

[12]) **Sur la déformation projective des surfaces.** Ann. de l' Ec. Norm. Sup. 37 (3), 1920, pp. 259—356. **Sur le probléme général de la** déformation (C. R. du Congrés de Strasbourg, 1921, pp. 397—406).

[13]) Rendiconti Accademia Lincei, vol. 27, 1 luglio 1918.

$$(23)\qquad \begin{aligned} &+\vartheta_{12}\vartheta_{22}(\Delta_{2221}-\Delta_{1222}) \\ &=K+J+\vartheta_{11}\lambda_{11}+\vartheta_{12}(l_{12}+\lambda_{12})+\vartheta_{22}l_{22}-\omega, \end{aligned}$$

où

$$(24)\qquad J=\frac{1}{\nabla^2}\begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix}.$$

Dans les équations (22), on doit poser successivement $s, t, r, k = 1, 2, 1, 1$; $1, 2, 22$; $1, 2, 1, 2$, ce qui donne

$$(25)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\vartheta_{11}^2(\Delta_{1121}-\Delta_{1112})+2\vartheta_{11}\vartheta_{12}(\Delta_{1221}-\Delta_{1122})+ \\ &\qquad +\vartheta_{12}^2(\Delta_{2221}-\Delta_{1222})=\vartheta_{11}d_{12}+\vartheta_{12}d_{22}, \\ &\vartheta_{12}^2(\Delta_{1121}-\Delta_{1112})+2\vartheta_{12}\vartheta_{22}(\Delta_{1221}-\Delta_{1122})+ \\ &\qquad +\vartheta_{22}^2(\Delta_{2221}-\Delta_{1222})=-\vartheta_{12}d_{11}-\vartheta_{22}d_{21}, \\ &\vartheta_{11}\vartheta_{12}(\Delta_{1121}-\Delta_{1112})+(\vartheta_{11}\vartheta_{22}+\vartheta_{12}^2)(\Delta_{1221}-\Delta_{1122}) \\ &\qquad +\vartheta_{12}\vartheta_{22}(\Delta_{2221}-\Delta_{1222})=-\tfrac{1}{2}\vartheta_{11}d_{11}+\tfrac{1}{2}\vartheta_{22}d_{22}, \end{aligned} \right.$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$d_{11}=l_{11}-\lambda_{11},\quad d_{12}=l_{12}-\lambda_{12},\quad d_{22}=l_{22}-\lambda_{22}.$$

Dans les équations (18', on doit poser successivement $r, s, t = 1, 1, 2$; $2, 1, 2$, ce qui donne d'abord

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \vartheta_{12}(\lambda_{121}-\lambda_{112})+\vartheta_{22}(\lambda_{221}-\lambda_{122})+ \\ &\qquad \frac{1}{\nabla}(\lambda_{11}\Delta_{122}-2\lambda_{12}\Delta_{112}+\lambda_{22}\Delta_{111}) \\ &\quad +(\lambda_{11}\vartheta_{12}+\lambda_{12}\vartheta_{22})(\vartheta_{11}\Delta_{112}+2\vartheta_{12}\Delta_{122}+\vartheta_{22}\Delta_{222}) \\ &\quad -(\lambda_{12}\vartheta_{12}+\lambda_{22}\vartheta_{22})(\vartheta_{11}\Delta_{111}+2\vartheta_{12}\Delta_{112}+\vartheta_{22}\Delta_{122}), \\ \varepsilon_2 &= \vartheta_{11}(\lambda_{112}-\lambda_{121})+\vartheta_{12}(\lambda_{122}-\lambda_{221})+ \\ &\qquad \frac{1}{\Delta}(\lambda_{11}\Delta_{222}-2\lambda_{12}\Delta_{122}+\lambda_{22}\Delta_{112}) \\ &\quad +(\lambda_{12}\vartheta_{11}+\lambda_{22}\vartheta_{12})(\vartheta_{11}\Delta_{111}+l\vartheta_{12}\Delta_{112}+\vartheta_{22}\Delta_{122}) \\ &\quad -(\lambda_{12}\vartheta_{11}+\lambda_{22}\vartheta_{12})(\vartheta_{11}\Delta_{112}+2\vartheta_{12}\Delta_{122}+\vartheta_{22}\Delta_{222}); \end{aligned}$$

tenant compte des équations (1), on a donc plus simplement

$$(26)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\vartheta_{12}(\lambda_{112}-\lambda_{121})-\vartheta_{22}(\lambda_{122}-\lambda_{221})+ \\ &\qquad \frac{1}{\Delta}(\lambda_{11}\Delta_{122}-2\lambda_{12}\Delta_{112}+\lambda_{22}\Delta_{111}), \\ \varepsilon_2 &= \vartheta_{11}(\lambda_{112}-\lambda_{121})+\vartheta_{12}(\lambda_{122}-\lambda_{221})+ \\ &\qquad \frac{1}{\nabla}(\lambda_{11}\Delta_{222}-2\lambda_{12}\Delta_{122}+\lambda_{22}\Delta_{112}). \end{aligned}$$

Pareillement, on tire des équations (19)

$$
(27)\quad
\begin{aligned}
e_1 &= -\vartheta_{12}(l_{112}-l_{121}) - \vartheta_{22}(l_{122}-l_{221}) - \\
&\qquad \frac{1}{\nabla}(l_{11}\,\Delta_{122} - 2\,l_{12}\,\Delta_{112} + l_{22}\,\Delta_{111})\\
e_2 &= \vartheta_{11}\,(l_{112}-l_{121}) + \vartheta_{12}(l_{122}-l_{221}) - \\
&\qquad \frac{1}{\nabla}(l_{11}\,\Delta_{222} - 2\,l_{12}\,\Delta_{122} + l_{22}\,\Delta_{112}).
\end{aligned}
$$

Enfin, l'équation (20) s'écrit maintenant

$$
(28)\qquad e_{12} - e_{21} = -(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) = -\frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{22} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix}.
$$

E'crivons encore de nouveau les équations (1) et (16)

$$
(29)\quad \vartheta_{11}\,\Delta_{111} + 2\vartheta_{12}\,\Delta_{112} + \vartheta_{22}\,\Delta_{122} = \vartheta_{11}\,\Delta_{112} + 2\,\vartheta_{12}\,\Delta_{122} + \vartheta_{22}\,\Delta_{222} = 0,
$$

$$
(30)\quad 2\,\omega = \vartheta_{11}\,l_{11} + 2\,\vartheta_{12}\,l_{12} + \vartheta_{22}\,l_{22} = \vartheta_{11}\,\lambda_{11} + 2\vartheta_{12}\,\lambda_{12} + \vartheta_{22}\,\lambda_{22}.
$$

En retranchant de l'équation (23) la dernière des équations (25), on a, ayant égard aux équations (30)

$$
(31)\qquad \omega = -K - J = -\tfrac{1}{4}\,(\vartheta_{11}\,s_{11} + 2\,\vartheta_{12}\,s_{12} + \vartheta_{22}\,s_{22}),
$$

où j'ai posé

$$
s_{11} = l_{11} + \lambda_{11}, \quad s_{12} = l_{12} + \lambda_{12}, \quad s_{22} = l_{22} + \lambda_{22}.
$$

En ajoutant aux équations (25) l'identité

$$
\vartheta_{11}\,(\Delta_{1112} - \Delta_{1121}) + 2\vartheta_{12}(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}) + \vartheta_{22}(\Delta_{1222} - \Delta_{2221}) = 0,
$$

multipliée respectivement par ϑ_{11}, ϑ_{22}, ϑ_{12}, on a plus simplement

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
\Delta_{22}\,d_{12} - \Delta_{12}\,d_{22} &= \Delta_{1222} - \Delta_{2221},\\
\Delta_{22}\,d_{11} - \Delta_{11}\,d_{22} &= 2\,(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}),\\
\Delta_{12}\,d_{11} - \Delta_{11}\,d_{12} &= \Delta_{1112} - \Delta_{1121}.
\end{aligned}
$$

Ces trois équations ne sont pas indépendentes, car en les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par ϑ_{22}, ϑ_{12}, ϑ_{11}, on retombe à l'identité précédente. Pour en calculer d_{ik}, on y ajoute l'équation

$$
\vartheta_{11}\,d_{11} + 2\,\vartheta_{12}\,d_{12} + \vartheta_{22}\,d_{22} = 0,
$$

qui découle des équations (30); il vient ainsi

$$
(33)\quad
\begin{aligned}
d_{11} &= \vartheta_{12}\,(\Delta_{1112} - \Delta_{1121}) + \vartheta_{22}\,(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}),\\
2\,d_{12} &= -\vartheta_{11}\,(\Delta_{1112} - \Delta_{1121}) + \vartheta_{22}\,(\Delta_{1222} - \Delta_{2221}),\\
d_{22} &= -\vartheta_{11}\,(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}) - \vartheta_{12}\,(\Delta_{1222} - \Delta_{2221}).
\end{aligned}
$$

Désignons par d_{ikl} le système covariant dérivé du système d_{ik}. On calcule sans difficulté

$$\begin{aligned} d_{11i} &= \vartheta_{12}(\Delta_{1112i} - \Delta_{1121i}) + \vartheta_{22}(\Delta_{1122i} - \Delta_{1221i}) \\ 2\,d_{12i} &= -\vartheta_{11}(\Delta_{1112i} - \Delta_{1121i}) + \vartheta_{22}(\Delta_{1222i} - \Delta_{2221i}) \\ d_{22i} &= -\vartheta_{11}(\Delta_{1122i} - \Delta_{1221i}) - \vartheta_{12}(\Delta_{1222i} - \Delta_{2221i}). \end{aligned}$$

Les expressions

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d_{112} - d_{121}}{\sqrt{\nabla}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\nabla}}\,[\vartheta_{11}(\Delta_{11121} - \Delta_{11211}) + 2\,\vartheta_{12}(\Delta_{11122} - \\ \qquad \Delta_{11212}) + \vartheta_{22}\,(2\,\Delta_{11222} - 2\,\Delta_{12212} - \\ \qquad \Delta_{12221} + \Delta_{22211})], \\ \dfrac{d_{122} - d_{221}}{\sqrt{\nabla}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\nabla}}\,[\vartheta_{11}\,(2\,\Delta_{11221} - 2\,\Delta_{12211} - \Delta_{11122} + \\ \qquad \Delta_{11212}) + 2\,\vartheta_{12}\,(\Delta_{12221} - \Delta_{22211}) + \\ \qquad \vartheta_{22}\,(\Delta_{12222} - \Delta_{22212})] \end{cases}$$

forment un système covariant. Les équations (31) et (33) suffisent évidemment à remplaces les équations (23), (25) et (30).

Passons aux équations (26) et (27). Par addition, on en déduit, ayant égard aux équations (13),

$$\omega_1 = -\vartheta_{12}(s_{112} - s_{121}) - \vartheta_{22}(s_{122} - s_{221}) - \frac{1}{\nabla}(d_{11}\,\Delta_{122} - 2\,d_{12}\,\Delta_{112} + d_{22}\,\Delta_{111}),$$

$$\omega_2 = \vartheta_{11}(s_{112} - s_{121}) + \vartheta_{12}(s_{122} - s_{221}) - \frac{1}{\nabla}(d_{11}\,\Delta_{222} - 2\,d_{12}\,\Delta_{122} + d_{22}\,\Delta_{112}).$$

Remplaçons ici d_{ik} par leurs valeurs (33); si l'on tient compte des identités (29), on arrive ainsi au résultat

$$(35)\quad \begin{aligned} \Delta_{11}\,\omega_2 - \Delta_{12}\,\omega_1 &= s_{112} - s_{121} + \frac{1}{\nabla}[-\Delta_{111}(\Delta_{1222} - \Delta_{2221}) \\ &\quad + 2\,\Delta_{112}(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}) - \Delta_{122}(\Delta_{1112}\,\Delta_{1121})], \\ \Delta_{22}\,\omega_1 - \Delta_{12}\,\omega_2 &= s_{221} - s_{122} + \frac{1}{\nabla}[\Delta_{112}(\Delta_{1222} - \\ &\quad - \Delta_{2221}) - 2\,\Delta_{122}(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}) + \Delta_{222}\,(\Delta_{1112} - \\ &\quad - \Delta_{1121})]. \end{aligned}$$

Par soustraction, on obtient des équations (26) et (27) les suivantes

$$e_1 - \varepsilon_1 = -\vartheta_{12}(d_{112} - d_{121}) = \vartheta_{22}(d_{122} - d_{221}) - \\ - \frac{1}{\nabla}(s_{11}\,\Delta_{122} - 2\,s_{12}\,\Delta_{112} + s_{22}\,\Delta_{111}),$$

$$e_2 - \varepsilon_2 = \vartheta_{11}(d_{112} - d_{121}) + \vartheta_{12}(d_{122} - d_{221}) -$$
$$- \frac{1}{\nabla}(s_{11}\Delta_{222} - 2s_{12}\Delta_{122} + s_{22}\Delta_{112}).$$

Si l'on y substitue des équations (34), on obtient

$$(36)\quad \begin{cases} e_1 - \varepsilon_1 = \frac{1}{\nabla}[\Delta_{11122} - \Delta_{11212} - \Delta_{11221} + \Delta_{12211} - \\ \qquad - (s_{11}\Delta_{122} - 2s_{12}\Delta_{112} + s_{22}\Delta_{111})], \\ e_2 - \varepsilon_2 = \frac{1}{\nabla}[\Delta_{11222} - \Delta_{12212} - \Delta_{12221} + \Delta_{22211} - \\ \qquad - (s_{11}\Delta_{222} - 2s_{12}\Delta_{122} + s_{22}\Delta_{112}). \end{cases}$$

Les équations (26) et (27) se trouvent ainsi remplacées par (35) et (36). Par un calcul facile, on déduit de (36)

$$e_{12} - \varepsilon_{12} = \frac{1}{\nabla}(\Delta_{111222} - \Delta_{112122} - \Delta_{112212} + \Delta_{122112} -$$
$$- (s_{11}\Delta_{1222} - 2s_{12}\Delta_{1122} + s_{22}\Delta_{1112}) -$$
$$- (s_{112}\Delta_{122} - 2s_{122}\Delta_{112} + s_{222}\Delta_{111})],$$
$$e_{21} - \varepsilon_{21} = \frac{1}{\nabla}[\Delta_{112221} - \Delta_{122121} - \Delta_{122211} + \Delta_{222111} -$$
$$- (s_{11}\Delta_{2221} - 2s_{12}\Delta_{1221} + s_{22}\Delta_{1121}) -$$
$$- (s_{111}\Delta_{222} - 2s_{121}\Delta_{122} + s_{221}\Delta_{112})].$$

L'équation (28) peut s'écrire

$$e_{12} - \varepsilon_{12} - (e_{21} - \varepsilon_{21}) = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{22} \\ d_{11} & d_{12} & d_{22} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix}$$

Si l'on y substitue les valeurs justement écrites de $e_{12} - \varepsilon_{12}$ et $e_{21} - \varepsilon_{21}$ et les valeurs (33) des d_{ik}, il vient

$$(37)\quad \begin{aligned} &\Delta_{111}s_{222} - \Delta_{112}(2s_{122} + s_{221}) + \Delta_{122}(2s_{121} + s_{112}) - \\ &\qquad - \Delta_{222}s_{111} \\ &+ 2[s_{11}(\Delta_{1222} - \Delta_{2221}) - 2s_{12}(\Delta_{1122} - \Delta_{1221}) + \\ &\qquad + s_{22}(\Delta_{1112} - \Delta_{1121})] \\ &= \Delta_{111222} - \Delta_{112221} - \Delta_{112212} + \Delta_{122211} - \Delta_{112122} + \\ &\qquad + \Delta_{122121} + \Delta_{122112} - \Delta_{222111}. \end{aligned}$$

Les équations (13), (31), (33), (35), (36) et (37) donnent toutes les relations entre notres formes différentielles; lorsqu'elles sont vérifiées, la surface correspondante existe et est déterminée aux homographies près.

Présentons encore les remarques suivantes. Posons

$$D_{11} = \frac{\Delta_{1112} - \Delta_{1121}}{\sqrt{\nabla}}, \quad D_{12} = \frac{\Delta_{1122} - \Delta_{1221}}{\sqrt{\nabla}}, \quad D_{22} = \frac{\Delta_{1222} - \Delta_{2221}}{\sqrt{\nabla}},$$

ou $D_{ik} = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \Sigma (-1)^\varrho \Delta_{ikr\varrho} \quad (i, k, r, \varrho = 1, 2; r \gtrless \varrho)$;

puis

(38)
$$D_1 = \frac{\Delta_{11122} - \Delta_{11212} - \Delta_{11221} + \Delta_{12\,11}}{\nabla},$$
$$D_2 = \frac{\Delta_{11222} - \Delta_{12212} - \Delta_{12221} + \Delta_{22211}}{\nabla},$$

ou
$$D_i = \frac{1}{\nabla} \Sigma (-1)^{\varrho+\sigma} \Delta_{irs\varrho\sigma} \quad (i, r, s, \varrho, \sigma = 1, 2; \; r \gtrless \varrho, \; s < \sigma),$$

et enfin
$$D = \frac{1}{\sqrt{\nabla^3}} (\Delta_{111222} - \Delta_{112122} - \Delta_{112212} - \Delta_{112221} +$$
$$+ \Delta_{122112} + \Delta_{122121} + \Delta_{122211} - \Delta_{222111}),$$

ou
$$D = \frac{1}{\nabla^{3/2}} \Sigma (-1)^{\varrho+\sigma+\tau} \Delta_{rst\varrho\sigma\tau} (r, s, t, \varrho, \sigma, \tau = 1, 2, r \gtrless \varrho, s \gtrless \sigma, t \gtrless \tau).$$

D_{ik} et D_i sont des systèmes covariants, D est un invariant. On peut écrire aussi, si $(D_{ik})_r$ et $(D_i)_r$ sont les dérivées covariantes des D_{ik} et D_i
$$D_1 = \frac{(D_{11})_2 - (D_{12})_1}{\sqrt{\nabla}}, D_2 = \frac{(D_{12})_2 - (D_{22})_1}{\sqrt{\nabla}}, D = \frac{(D_1)_2 - (D_2)_1}{\sqrt{\nabla}}.$$

Les conditions d'intégrabilité sont un peu plus simples si l'on introduit la forme
$$H \equiv h_{11} du_1^2 + 2 h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2$$
$$= s_{11} du_1^2 + 2 s_{12} du_1 du_2 + s_{22} du_2^2 - \omega (\Delta_{11} du_1^2 +$$
$$+ 2 \Delta_{12} du_1 du_2 + \Delta_{22} du_2^2).$$

Il ne sera inutile énoncer le résultat complet auquel nous sommes arrivés:

Si les équations
$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v), \; t = t(u, v)$$
donnent les coordonnées homogènes des point d'une surface non développable S, on peut en former trois formes différentielles
$$F_2 = \Delta_{11} du^2 + 2 \Delta_{12} du\, dv + \Delta_{22} dv^2,$$
(I) $$\tfrac{1}{2} F_3 = \Delta_{111} du^3 + 3 \Delta_{112} du^2 dv + 3 \Delta_{122} du\, dv^2 + \Delta_{222} dv^3,$$
$$H = h_{11} du^2 + 2 h_{12} du\, dv + h_{12} dv^2,$$
dont la première a son discriminant
$$\nabla = \Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12}^2$$

différent de zéro; ces trois formes ne changent pas si l'on remplace u et v d'une manière quelconque, par des nouvelles variables indépendentes, ni que l'on effectue sur $(x, y, z, t,)$ une transformation linéaire et homogène, à coefficients constants et à déterminant égal à l'unité. Soit K la courbure de la forme F_2, $\Delta_{ikl r}$, $(D_{ik})_r$, $(D_i)_r$, h_{ikr} les systèmes covariants dérivés des systèmes Δ_{ikl}, D_{ik}, D_i, h_{ik}, F_2 étant la forme fondamentale, et posons

$$
\text{(II)}\left|\begin{array}{l}
J = \dfrac{1}{\nabla_2}\begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix}, \\
\omega = -J - K, \\
D_{11} = \dfrac{\Delta_{1112} - \Delta_{1121}}{\sqrt{\nabla}}, D_{12} = \dfrac{\Delta_{1122} - \Delta_{1221}}{\sqrt{\nabla}},\ D_{22} = \\
\qquad = \dfrac{\Delta_{1222} - \Delta_{2221}}{\sqrt{\nabla}}, \\
D_1 = \dfrac{(D_{11})_2 - (D_{12})_1}{\sqrt{\nabla}},\ D_2 = \dfrac{(D_{12})_2 - (D_{22})_1}{\sqrt{\nabla}}, \\
D = \dfrac{(D_1)_2 - (D_2)_1}{\sqrt{\nabla}}.
\end{array}\right.
$$

Les formes (I) sont liées par les six relations

$$
\text{(III)}\left\{\begin{array}{l}
\Delta_{22}\Delta_{111} - 2\Delta_{12}\Delta_{112} + \Delta_{11}\Delta_{122} = 0, \\
\Delta_{22}\Delta_{112} - 2\Delta_{12}\Delta_{122} + \Delta_{11}\Delta_{222} = 0, \\
\dfrac{h_{11}\Delta_{22} - 2h_{12}\Delta_{12} + h_{12}\Delta_{11}}{\nabla} = 2\omega, \\
\dfrac{h_{112} - h_{121}}{\sqrt{\nabla}} = \dfrac{1}{\nabla}(\Delta_{111}D_{22} - 2\Delta_{112}D_{12} + \Delta_{122}D_{11}), \\
\dfrac{h_{122} - h_{221}}{\sqrt{\nabla}} = \dfrac{1}{\nabla}(\Delta_{112}D_{22} - 2\Delta_{122}D_{12} + \Delta_{222}D_{11}), \\
\dfrac{1}{\sqrt{\nabla^3}}[\Delta_{111}h_{222} - \Delta_{112}(2h_{122} + h_{221}) + \Delta_{122}(2h_{121} + \\
\quad + h_{112}) - \Delta_{222}h_{111}] + \dfrac{2}{\nabla}(h_{11}D_{22} - 2h_{12}D_{12} + \\
\qquad + h_{22}D_{11}) = D.
\end{array}\right.
$$

Soit encore

$$
(\mathrm{IV})\left\{\begin{aligned}
&d_{11}\,du^2+2\,d_{12}\,du\,dv+d_{22}\,dv^2=\frac{1}{\sqrt{\nabla}}\begin{vmatrix}\Delta_{11}\Delta_{12}\Delta_{22}\\ D_{11}\,D_{12}\,D_{22}\\ dv^2\text{-}du\,dv\,du^2\end{vmatrix},\\
&l_{ik}=\tfrac{1}{2}\,(h_{ik}+\omega\,\Delta_{ik}+d_{ik}),\\
&\lambda_{ik}=\tfrac{1}{2}\,(h_{ik}+\omega\,\Delta_{ik}-d_{ik}),\\
&b_{ik}=\lambda_{ik}-\omega\,\Delta_{ik},\ \beta_{ik}=l_{ik}-\omega\,\Delta_{ik},\\
&e_i+\varepsilon_i=\omega_i\\
&e_1-\varepsilon_1=D_1-\frac{1}{\nabla}(s_{11}\,\Delta_{122}-2\,s_{12}\,\Delta_{122}+s_{22}\Delta_{111}),\\
&e_2-\varepsilon_2=D_2-\frac{1}{\nabla}(s_{11}\,\Delta_{222}-2\,s_{12}\Delta_{122}+s_{22}\Delta_{112}).
\end{aligned}\right.
$$

Alors les coordonnées x,y,z,t des points de S satisfont aux équations

$$
(\mathrm{V})\qquad \begin{aligned}
&x_{ik}=\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,\Delta_{ikr}\,x_s+b_{ik}\,x+\Delta_{ik}\,X,\\
&X_i=e_i\,x+\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,l_{ir}\,x_s.
\end{aligned}
$$

Ici,

$$\vartheta_{11}=\frac{\Delta_{22}}{\nabla},\ \vartheta_{12}=-\frac{\Delta_{12}}{\nabla},\ \vartheta_{22}=\frac{\Delta_{11}}{\nabla},$$

x_s sont les dérivées premières et x_{ik} les dérivées secondes covariantes (par rapport à F_2) de x, $2X$ est le paramètre différentiel second de x

$$X=\tfrac{1}{2}\,\Delta_2\,x=\tfrac{1}{2}\,(\vartheta_{11}\,x_{11}+2\,\vartheta_{12}\,x_{12}+\vartheta_{22}\,x_{22})$$

et X_i sont les dérivées premières de X. Fixons le facteur des coordonnées homogènes ξ,η,ζ,τ des plans tangents de S de façon à avoir

$$\xi X+\eta Y+\zeta Z+\tau T=1;$$

alors, ξ,η,ζ,τ satisfont aux équations

$$
\begin{aligned}
&\xi_{ik}=-\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,\Delta_{ikr}\,\xi_s+\beta_{ik}\,\xi+\Delta_{ik}\,\Xi,\\
&\Xi_i=\varepsilon_i\,\xi+\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,l_{ir}\,\xi_s,
\end{aligned}
$$

où

$$\Xi=\tfrac{1}{2}\,\Delta_2\,\xi=\tfrac{1}{2}\,(\vartheta_{11}\,\xi_{11}+2\,\vartheta_{12}\,\xi_{12}+\vartheta_{22}\,\xi_{22}).$$

Réciproquement, étant données trois formes différentielles (I) dont la première à discriminant différent de zéro, satisfaisant aux relations (III); elles déterminent une surface non développable S aux homographies près et le facteur arbitraire des coordonnées homogènes de ses points à une racine huitième de l'unité près; c'est ce qu'on obtient en intégrant le système (V), faisont usage de la relation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ X & Y & Z & T \end{vmatrix} = \sqrt{-\nabla}.$$

Applicons encore notres formules au cas spécial où l'on prenne pour x les coordonnées non homogènes (géometrie affine). On a alors évidemment

$$b_{ik} = 0, \quad \lambda_{ik} = \omega \Delta_{ik},$$

d'où

$$h_{ik} = s_{ik} - \omega \Delta_{ik} = d_{ik} + 2\lambda_{ik} - \omega \Delta_{ik} = d_{ik} + \omega \Delta_{ik}.$$

Substituons donc ces valeurs des h_{ik} dans les équations (III). Les deux premières restent les mêmes:

$$\text{(A)} \qquad \Delta_{22}\Delta_{111} - 2\Delta_{12}\Delta_{112} + \Delta_{11}\Delta_{122} = \Delta_{22}\Delta_{112} - 2\Delta_{12}\Delta_{122} + \Delta_{11}\Delta_{222} = 0.$$

La troisième se trouve vérifiée identiquement. La quatrième et la cinquième donnent

$$\omega_1 = \vartheta_{12}(d_{112} - d_{121}) + \vartheta_{22}(d_{122} - d_{221}) - \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \times$$
$$[(\vartheta_{12}\Delta_{111} + \vartheta_{22}\Delta_{112}) D_{22} - 2(\vartheta_{12}\Delta_{112} + \vartheta_{22}\Delta_{122}) D_{12} + (\vartheta_{12}\Delta_{122} + \vartheta_{22}\Delta_{222}) D_{11}],$$

$$\omega_2 = -\vartheta_{11}(d_{112} - d_{121}) - \vartheta_{12}(d_{122} - d_{221}) + \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \times$$
$$[(\vartheta_{11}\Delta_{111} + \vartheta_{12}\Delta_{112}) D_{22} - 2(\vartheta_{11}\Delta_{112} + \vartheta_{12}\Delta_{122}) D_{12} + (\vartheta_{11}\Delta_{122} + \vartheta_{12}\Delta_{222}) D_{11}].$$

Or, il vient des équations (39) et (38)

$$\vartheta_{11}(d_{112} - d_{121}) + \vartheta_{12}(d_{122} - d_{221}) = D_2,$$
$$\vartheta_{12}(d_{112} - d_{121}) + \vartheta_{22}(d_{122} - d_{221}) = D_1;$$

ayant égard aux équations (A), on peut donc mettre les précédente à la forme

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{aligned}
\omega_1 + D_1 &= \frac{1}{\sqrt{\nabla^3}} \begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \end{vmatrix}, \\
\omega_2 + D_2 &= \frac{1}{\sqrt{\nabla^3}} \begin{vmatrix} \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

D'ailleurs un calcul facile montre que la dernière des équations (III) est une conséquence des équations (B). Les conditions d'intégrabilité de la géometrie affine sont donc (A) et (B). Si l'on substitue encore dans les équations (IV), on obtient, tenant compte de (B),

$$
\text{(C)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
& d_{11}\,du^2 + 2\,d_{12}\,du\,dv + d_{22}\,dv^2 = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} \\
& l_{ik} = d_{ik} + \omega\,\Delta_{ik},\ \lambda_{ik} = \omega\,\Delta_{ik},\ b_{ik} = 0,\ \beta_{ik} = d_{ik}, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad e_i = 0,\ \varepsilon_i = \omega_i.
\end{aligned}
\right.
$$

D'ailleurs ces équations de la géometrie affine se trouve déjà, aux notations près dans le Mémoire de M. J. Radon Über affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie, inséré aux Leipziger Berichte, Bd. 70, 1918, S. 91—107.