Eduard Čech

Déformation projective de réseaux plans

C. R. Acad. Sci. Paris 188 (1929), 291-292

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500905

GÉOMÉTRIE. — *Déformation projective des réseaux plans.* Note de M. **Eduard Čech.**

1. Le point $A(u, v)$ décrivant un réseau plan (A), appelons *élément linéaire projectif* de (A) la forme différentielle fractionnaire

$$([AA_uA_{uu}]\,du^3 + [AA_vA_{vv}]\,dv^3) : 2[AA_uA_v]\,du\,dv = (\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3) : 2\,du\,dv.$$

Si le réseau (A) est la projection des lignes asymptotiques d'une surface S, alors *l'élément linéaire projectif de* (A) *est égal à celui de* S.

2. Soit (B) un autre réseau plan en correspondance avec (A). A chaque instant (u, v), on peut trouver ∞^2 homographies H réalisant un contact analytique du premier ordre des plans des deux réseaux. Je parlerai de *déformation projective* si H réalise un contact du second ordre des deux courbes du réseau (A) passant par le point envisagé $A(u, v)$ avec les courbes correspondantes de (B); ceci ne dépend pas du choix de H, mais on peut alors fixer ~~X~~ univoquement de façon que le contact du second ordre soit aussi analytique. Dans ce qui suit, la lettre H signifie toujours l'homographie ainsi déterminée. F étant une figure intrinsèquement liée à un point $A(u, v)$ du réseau (A), je dirai, pour abréger, que H *conserve* F si H apporte F dans la figure F′ ayant la même relation avec (B) que F avec (A). H

3. *La condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective* ~~*et*~~ *l'invariance de l'élément linéaire projectif.* est

4. *Une forme différentielle* $\beta du^3 + \gamma dv^3 : 2\,du\,dv = \psi$ *étant donnée, les réseaux plans desquels l'élément linéaire projectif est égal à* ψ *existent toujours et dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

5. Considérons, pour un moment, une correspondance quelconque entre deux plans $A(u, v)$, $B(u, v)$. Appelons, avec M. Borůvka, *directions caractéristiques* celles dans lesquelles la correspondance conserve les inflexions; ces directions définissent, dans les deux plans, les (courbes) *caractéristiques* de la correspondance. On peut toujours choisir les facteurs des coordonnées homogènes de manière que l'on ait $[AA_uA_v] = [BB_uB_v]$; alors l'équation différentielle des caractéristiques prend la forme simple

$$[A\,dA\,d^2A] = [B\,dB\,d^2B],$$

ce qui rend évident qu'on a, en général, trois familles ∞^1 de caractéristiques. Rappelons encore que les caractéristiques ne sont indéterminées que pour une correspondance homographique.

6. *Une correspondance entre deux réseaux plans* (A) *et* (B) *est une déformation projective alors et alors seulement si les courbes des réseaux sont des caractéristiques de la correspondance.* Les courbes de la troisième famille des caractéristiques soit appelées *courbes principales* de la déformation projective; leurs tangentes sont les *directions principales* de la déformation, elles sont bien déterminées si la déformation ne se réduit pas à une simple homographie.

7. Soient (A_1), (A_2) les deux transformées de Laplace du réseau (A); soient (B_1), (B_2) les transformées correspondantes du réseau (B) déformé projectif de (A). *Les droites principales de la déformation projective contiennent l'intersection des droites* $[A_1 B'_2]$, $[A_2 B'_1]$, B'_1, B'_2 étant les points transportés de B_1, B_2 moyennant l'homographie H. On voit en particulier que H *conserve* (voir 2) la transformée de Laplace (A_1) lorsque et seulement alors la droite principale se réduit à $[AA_1]$. Ce résultat est un cas particulier d'une proposition plus générale. Par chaque point A menons une droite p; par B, menons la droite q correspondant à p dans l'homographie H. Le point de contact de p avec son enveloppe est *conservé* par H, en général, lorsque et seulement lorsque l'on se déplace suivant la direction de p ou suivant la direction conjuguée par rapport au réseau. Il n'y a exception que si p est la droite principale de la déformation; dans ce cas, le point de contact de p se conserve pour *chaque* déplacement.

8. J'ai aussi trouvé quand il arrive que la *transformation de Laplace d'un réseau plan soit une déformation projective.* Partons d'une surface non développable S d'un espace affine à trois dimensions. Soit φ la forme différentielle quadratique fondamentale de MM. Pick et Blaschke de la surface S; supposons que la *courbure de* φ *soit nulle* (c'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre pour φ). *Les intersections des tangentes asymptotiques de* S *avec le plan à l'infini décrivent un couple de réseaux qui donne la solution plus générale du problème.* L'élément linéaire projectif de ces réseaux coïncide d'ailleurs avec l'élément linéaire projectif de S.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 188, p. 291, séance du 21 janvier 1929.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
86088-29 Paris, Quai des Grands-Augustins, 55