

Čech, Eduard: Scholarly works

Eduard Čech

Déformation projective de réseaux plans

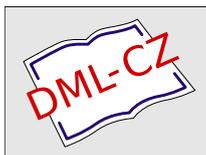
C. R. Acad. Sci. Paris 188 (1929), 291-292

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500905>

Terms of use:

© Académie des sciences, France, 1929

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://project.dml.cz>

1. Le point $A(u, v)$ décrivant un réseau plan (A) , appelons *élément linéaire projectif* de (A) la forme différentielle fractionnaire

$$([A \wedge_u \wedge_{uu}] du^3 + [A \wedge_v \wedge_{vv}] dv^3) : 2 [A \wedge_u \wedge_v] du dv = (\beta du^3 + \gamma dv^3) : 2 du dv.$$

Si le réseau (A) est la projection des lignes asymptotiques d'une surface S , alors *l'élément linéaire projectif* de (A) est égal à celui de S .

2. Soit (B) un autre réseau plan en correspondance avec (A) . A chaque instant (u, v) , on peut trouver ∞^2 homographies H réalisant un contact analytique du premier ordre des plans des deux réseaux. Je parlerai de *déformation projective* si H réalise un contact du second ordre des deux courbes du réseau (A) passant par le point envisagé $A(u, v)$ avec les courbes correspondantes de (B) ; ceci ne dépend pas du choix de H , mais on peut alors fixer X univoquement de façon que le contact du second ordre soit aussi analytique. Dans ce qui suit, la lettre H signifie toujours l'homographie ainsi déterminée. F étant une figure intrinsèquement liée à un point $A(u, v)$ du réseau (A) , je dirai, pour abrégé, que H conserve F si H apporte F dans la figure F' ayant la même relation avec (B) que F avec (A) .

H

3. *La condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective et l'invariance de l'élément linéaire projectif.*

et

4. Une forme différentielle $\beta du^3 + \gamma dv^3 : 2 du dv = \psi$ étant donnée, les réseaux plans desquels l'élément linéaire projectif est égal à ψ existent toujours et dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

5. Considérons, pour un moment, une correspondance quelconque entre deux plans $A(u, v)$, $B(u, v)$. Appelons, avec M. Boruvka, *directions caractéristiques* celles dans lesquelles la correspondance conserve les inflexions; ces directions définissent, dans les deux plans, les (courbes) *caractéristiques* de la correspondance. On peut toujours choisir les facteurs des coordonnées homogènes de manière que l'on ait $[A \wedge_u \wedge_v] = [B \wedge_u \wedge_v]$; alors l'équation différentielle des caractéristiques prend la forme simple

$$[A dA d^2 A] = [B dB d^2 B],$$

ce qui rend évident qu'on a, en général, trois familles ∞^1 de caractéristiques. Rappelons encore que les caractéristiques ne sont indéterminées que pour une correspondance homographique.

6. Une correspondance entre deux réseaux plans (A) et (B) est une déformation projective alors et alors seulement si les courbes des réseaux sont des caractéristiques de la correspondance. Les courbes de la troisième famille des caractéristiques soit appelées *courbes principales* de la déformation projective; leurs tangentes sont les *directions principales* de la déformation, elles sont bien déterminées si la déformation ne se réduit pas à une simple homographie.

7. Soient $(A_1), (A_2)$ les deux transformées de Laplace du réseau (A); soient $(B_1), (B_2)$ les transformées correspondantes du réseau (B) déformé projectif de (A). Les droites principales de la déformation projective contiennent l'intersection des droites $[A_1 B_2], [A_2 B_1]$, B_1, B_2 étant les points transportés de B_1, B_2 moyennant l'homographie H. On voit en particulier que H conserve (voir 2) la transformée de Laplace (A_1) lorsque et seulement alors la droite principale se réduit à $[AA_1]$. Ce résultat est un cas particulier d'une proposition plus générale. Par chaque point A menons une droite p ; par B, menons la droite q correspondant à p dans l'homographie H. Le point de contact de p avec son enveloppe est conservé par H, en général, lorsque et seulement lorsque l'on se déplace suivant la direction de p ou suivant la direction conjuguée par rapport au réseau. Il n'y a exception que si p est la droite principale de la déformation; dans ce cas, le point de contact de p se conserve pour chaque déplacement.

8. J'ai aussi trouvé quand il arrive que la transformation de Laplace d'un réseau plan soit une déformation projective. Partons d'une surface non développable S d'un espace affine à trois dimensions. Soit φ la forme différentielle quadratique fondamentale de MM. Pick et Blaschke de la surface S; supposons que la courbure de φ soit nulle (c'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre pour φ). Les intersections des tangentes asymptotiques de S avec le plan à l'infini décrivent un couple de réseaux qui donne la solution plus générale du problème. L'élément linéaire projectif de ces réseaux coïncide d'ailleurs avec l'élément linéaire projectif de S.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 188, p. 291, séance du 21 janvier 1929.)