Eduard Čech

Sur une propriété carastéristique des surfaces F de M. Fubini

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) 9i (1929), 975-977

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500911

Geometria. — *Sur une propriété caractéristique des surfaces* F *de M. Fubini.* Nota di E. ČECH, presentata [1] dal Corrispondente G. FUBINI.

1. Dans ses recherches sur la géométrie projective différentielle des surfaces, M. Fubini s'est posé le problème de trouver toutes les congruences de droites telles que les courbes de Darboux se correspondent sur les deux nappes focales. Il a trouvé que les surfaces susceptibles d'être une nappe focale d'une telle congruence forment une famille dépendant de cinq fonctions arbitraires d'un argument. M. Fubini donne à ses surfaces le nom *isothermo-asymptotiques*; je propose de les appeler *surfaces de M. Fubini* ou surfaces F tout court. M. Fubini démontre que chaque surface F est une nappe focale de ∞^6 congruences jouissant de la propriété expliquée plus haut, d'où il vient une théorie de transformation W des surfaces F analogue à la transformation classique des surfaces à courbure totale constante [2].

On connaît plusieurs propriétés caractéristiques des surfaces F: 1er chaque congruence canonique est conjuguée à la surface (Fubini) [3]; 2^{me} la surface peut être représentée sur un plan de manière qu'aux courbes de Darboux il correspond trois faisceaux de droites (Thomsen) [4]; la surface admet ∞^3 transformations en elle même conservant les lignes des Darboux (Cartan) [5]. Une autre propriété caractéristique des surfaces F forme l'objet de cette Note.

2. Soit S une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v et soit $(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) : 2\, du\, dv$ l'élément linéaire projectif de S. Posons

$$\beta : \gamma = e^{3\varphi},$$

ainsi que les surfaces F sont caractérisées par l'équation $\varphi_{uv} = 0$, les indices indiquant des dérivées partielles. Les courbes

$$e^{-\varphi} \frac{dv}{du} = \text{const.}$$

forment un faisceau [6] contenant les lignes de Darboux et celles de Segre; je l'appellerai le *faisceau* DS [7].

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Pour plus de détail, v. G. FUBINI et E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, § 51.

(3) Op. cit., § 27.

(4) «Bollettino dell'Unione Mat. Italiana», a. VI, 1927, pp. 80-85.

(5) «Annales de l'Ecole Normale», (3), 37, 1920, p. 320-321.

(6) Voir FUBINI-ČECH, op. cit., §§ 23 D et 84.

(7) Ces courbes ont été étudiées par M. Bompiani sous le nom de *courbes anharmoniques*; v. FUBINI-ČECH, Appendice II, p. 689.

Ces courbes peuvent évidemment être définies par l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2v}{du^2} = \varphi_u \frac{dv}{du} + \varphi_v \left(\frac{dv}{du}\right)^2. \tag{1}$$

Or considérons trois familles ∞^1 F_i $(i = 1, 2, 3)$ de courbes du faisceau DS, définies par

$$\frac{dv}{du} = e^{\varphi}\tau_i.$$

L'équation (1) donne

$$\tau_{iu} + e^{\varphi}\tau_i\tau_{iv} = 0. \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{2}$$

A chaque point x de la surface S, les plans osculateurs aux courbes des familles F_i passant par x sont (dans la notation habituelle) [1]

$$(\beta - \gamma\tau_i^3)\xi + \tau_i[2\xi_u + (\varphi_v + \theta_v)\xi] - \tau_i^2[2\xi_v - (\varphi_v - \theta_v)\xi].$$

Condition pour que ces trois plans passent par une droite est que le déterminant

$$|\beta - \gamma\tau_i^3, \tau_i, \tau_i^2| = \gamma\,|e^{3\varphi} - \tau_i^3, \tau_i, \tau_i^2|$$

soit égal à zéro. En évaluant ce déterminant, on obtient la condition simple

$$\tau_1\tau_2\tau_3 = e^{3\varphi}. \tag{3}$$

Disons que les familles F_i forment un *système* T si la condition (3) est vérifiée. *Un système* T *est donc composé de trois familles ∞^1 de courbes appartenant au faisceau* DS *et jouissant de la propriété que, à chaque point de* S, *les trois plans osculateurs passent par une droite.*

3. La recherche des systèmes T revient à l'intégration des équations (2) et (3).

Or ces équations admettent les solutions évidentes

$$\tau_i = c_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les constantes c_i étant liées par la condition $c_1c_2c_3 = 1$ [2]. Il en résulte que

(1) Voir Fubini-Čech, § 22 (1).

(2) Le choix $c_1 = 1$, $c_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $c_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ montre que les trois familles de lignes de Segre forment un système T; j'ai trouvé ce résultat déjà en 1921. Le choix $c_1 = 1$, $c_2 = -e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $c_3 = -e^{-\frac{4\pi i}{3}}$ montre que deux familles de ligne de Darboux et la troisième famille de lignes de Segre forment aussi un système T; ce système T a été trouvé par M. Bompiani en 1924. Voir E. Čech, *Systèmes trilinéaires des lignes sur une surface et dé-*

chaque surface (non réglée) possède ∞^2 systèmes T. Or *les surfaces* F *sont caractérisées par la propriété de posséder* ∞^3 *systèmes* T.

4. Pour démontrer le résultat énoncé, posons

$$\lambda = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \quad , \quad \mu = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} . \tag{4}$$

Cela étant, ajoutons les trois équations (2) après les avoir multiplié par $\frac{1}{\tau_i}$, ou par $\frac{1}{\tau_i^2}$, ou enfin par 1. En tenant compte de (3) et (4), on obtient

$$\lambda_v = 0 \quad , \quad \mu_u = 0 \quad , \quad \lambda_u = e^{\frac{\varphi}{2}} \cdot \nu \quad , \quad \mu_v = e^{\frac{-\varphi}{2}} \cdot \nu , \tag{5}$$

ν étant une inconnue auxiliaire. Les systèmes T s'obtiennent en intégrant (5) et en calculant τ_1, τ_2, τ_3 des équations (3) et (4). Or les conditions d'intégrabilité des équations (5) sont

$$\nu_u = -\frac{1}{2} \varphi_v \nu \quad , \quad \nu_v = \frac{1}{2} \varphi_u \nu \tag{6}$$

et condition d'intégrabilité de (6) est

$$\nu \varphi_{uv} = 0 . \tag{7}$$

Si $\varphi_{uv} \neq 0$, alors $\nu = 0$, est les équations (5) montrent que λ et μ, et par suite aussi τ_1, τ_2, τ_3, sont des constantes et nous voyons qu'il n'existe sur S que les systèmes T déjà mentionnés. Soit donc $\varphi_{uv} = 0$, ainsi que S est une surface F. On peut alors choisir les paramètres asymptotiques u, v de façon que $\beta = \gamma$ ou bien $\varphi = 0$, ainsi que les équations (6) donnent $\nu =$ const., et les équations (5) donnent

$$\lambda = \nu u + \nu_1 \quad , \quad \mu = \nu v + \nu_2 ,$$

ν_1, ν_2 étant aussi des constantes arbitraires.

Enfin, les équations (3) et (4) montrent que *une surface* F *possède* ∞^3 *systèmes* T *définis par*

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^3 - (\nu u + \nu_1)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\nu v + \nu_1)\frac{dv}{du} - 1 = 0 , \tag{8}$$

ν, ν_1, ν_2 *étant des constantes arbitraires*; rappelons qu'on suppose choisi les paramètres asymptotiques u, v de manière que $\beta = \gamma$.

formation projective des surfaces, « Bull. international de l'Acad. des Sciences de Bohême », 1921; E. Bompiani, *Contributo alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie*, « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », 1924.