Eduard Čech

Projektive Differentialgeometrie der Kurvennetze in der Ebene

Jber. Deutsch. Math. Verein. (5-8) 39 (1930), 31-34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500979

ferner ist $$\frac{A_{n+1} + \cdots + A_{n+\varkappa}}{\varkappa} = \sigma_{n+\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}(\sigma_{n+\varkappa} - \sigma_n),$$

also $$A_n - \sigma_{n+\varkappa} = \frac{n}{\varkappa}(\sigma_{n+\varkappa} - \sigma_n) - \frac{(A_{n+1} - A_n) + \cdots + (A_{n+\varkappa} - A_n)}{\varkappa}.$$

Sei jetzt $$\varkappa = 1 + [n\lambda], \quad \text{also} \quad \frac{n}{\varkappa} < \frac{1}{\lambda},$$

und $$\sigma_{n+k} - \sigma_n < \varepsilon \cdot \lambda \quad \text{für} \quad n > N(\varepsilon) > n(\varepsilon),$$

dann ist $$A_n - \sigma_{n+k} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

also $$\overline{\lim}\, A_n \leqq A.$$

Analog ist mutatis mutandis

$$\frac{A_{n-\varkappa+1} + \cdots + A_n}{\varkappa} = \frac{n\sigma_n - (n-\varkappa)\sigma_{n-\varkappa}}{\varkappa} = \frac{n}{\varkappa}(\sigma_n - \sigma_{n-\varkappa}) + \sigma_{n-\varkappa},$$

also $$A_n - \sigma_{n-\varkappa} = \frac{n}{\varkappa}(\sigma_n - \sigma_{n-\varkappa}) + \frac{(A_n - A_{n-\varkappa+1}) + \cdots + (A_n - A_{n-1})}{\varkappa}$$
$$> -(\varepsilon + \varepsilon) = -2\varepsilon,$$

somit $$\underline{\lim}\, A_n \geqq A.$$ Qu. e. d.[1])

Dienstag, den 17. September 1929, 15 Uhr.

Vorsitz: Hamel, Berlin; Schouten, Delft.

1. Eduard Čech, Brünn: Projektive Differentialgeometrie der Kurvennetze in der Ebene.

Ein Kurvennetz in der Ebene (im folgenden kurz *Netz* genannt) besteht aus zwei einfach unendlichen Kurvenscharen. Analytisch erhält man ein Netz, indem man irgendwie die homogenen Koordinaten eines in einem Gebiet der Ebene frei veränderlichen Punktes x als Funktionen von zwei Parametern u, v ausdrückt; die beiden Scharen von Netzkurven erhält man für $v =$ konst. bzw. für $u =$ konst.[2]) Ein Netz ist auch bestimmt, wenn man in jedem Punkte der Ebene zwei Geraden (die Tangenten an die beiden Netzkurven) auszeichnet. Die in der Ebene zu einem Netz korrelative Figur sei als *Dualnetz* bezeichnet. Ein Dualnetz erhält man also z. B., wenn man auf jeder Geraden zwei Punkte auszeichnet.

Die Theorie der Netze steht in einem engen Zusammenhang mit der Flächentheorie. Denn wenn man die Asymptotenlinien einer nicht abwickelbaren Fläche F von einem festen Punkt O aus in eine feste Ebene E projiziert, so erhält man in E ein Netz. Das so entstandene Netz ist bekannt-

1) Die vor kurzem erschienene Arbeit von Hardy und Littlewood: On Tauberian theorems [Proc. London, Math. Soc. (2), 30 (1929), 23—37] enthält verwandte Resultate. Meine Ergebnisse habe ich schon in einem in der „Math. und Phys. Gesellschaft" zu Budapest am 18. April 1929 gehaltenen Vortrage [Über neuere Untersuchungen im Zusammenhange mit dem Abelschen Potenzreihensatz, Mat. és Fiz. Lapok 36 (1929), 10—22] angedeutet. Für weitere Ausführungen und Literatu nachweise vgl. eine in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie erscheinende Arbeit.

2) Ich spreche alsdann vom Netz $x(u, v)$.

lich nicht allgemein; ich nenne es ein *asymptotisches Netz.* Man überlegt sich sofort, daß die projektive Theorie der asymptotischen Netze der affinen Flächentheorie äquivalent ist. *Man kann also die projektive Netztheorie als eine Verallgemeinerung der affinen Flächentheorie auffassen.*

Aber auch mit der *projektiven Flächentheorie* ist die projektive Netztheorie aufs engste verknüpft. Betrachten wir zu dem Zwecke zwei auf dieselben Parameter u, v bezogenen Netze $x(u, v)$, $y(u, v)$; auf die gegenseitige Lage der Ebenen E_1, E_2 der Netze kommt es dabei nicht an. Die Parameter u, v definieren eine Verwandtschaft V zwischen E_1 und E_2, in der die beiden Netze einander entsprechen. In jedem Augenblick (u_0, v_0) kann man dann (auf ∞^2 Arten) eine *kollineare* Verwandtschaft K zwischen E_1, E_2 angeben, die in der Umgebung von (u_0, v_0) mit V bis auf unendlich kleines zweiter Ordnung zusammenfällt. Ich nenne nun die Verwandtschaft V eine *projektive Deformation,* falls für jedes (u_0, v_0) die Kollineation K eine Berührung zweiter Ordnung der beiden entsprechenden Paare von Netzkurven in (u_0, v_0) bewirkt.[1]) Nun ist eine Verwandtschaft zwischen zwei *asymptotischen* Netzen dann und nur dann eine projektive Deformation im eben definierten Sinne, falls die entsprechende Verwandtschaft zwischen den projizierten Flächen eine projektive Deformation im Sinne von Hn. Fubini ist.[2])

Den Ausdruck[3])

$$(*)\quad (\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) : 2\, du\, dv = [(x\, x_u\, x_{uu})\, du^3 + (x\, x_v\, x_{vv})\, dv^3] : 2\, du\, dv$$

nenne ich das *projektive Linienelement*[4]) des Netzes (u, v). Es bestimmt das Netz bis auf projektive Deformation. Im Falle eines *asymptotischen* Netzes fällt (*) mit dem projektiven Linienelement der projizierten Fläche zusammen. Ist ein Differentialausdruck der Form $(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) : 2\, du\, dv$ beliebig vorgegeben, so existieren entsprechende Netze, und sie hängen von vier willkürlichen Funktionen eines Parameters ab.

Die Kurven $\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3 = 0$ $(\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3 = 0)$ nenne ich *Darboux-Kurven (Segre-Kurven)* des Netzes. Man könnte sie auch ziemlich einfach geometrisch definieren. Im Falle eines asymptotischen Netzes sind es die Projektionen der gleichbenannten Flächenkurven.

Sei C eine Kurve in der Ebene des Netzes $x(u, v)$. In jedem Punkte x von C ziehe ich die Gerade g, die zur Tangente von C in x in bezug auf die Netzrichtungen harmonisch konjugiert ist. Den zu x gehörigen Berührungspunkt der Geraden g mit der von den Geraden g eingehüllten Kurve bezeichne ich als (zu x gehörigen) *Scheitel* der Kurve C. *In jedem Punkte x liegen die zu x gehörigen Scheitel der drei Segre-Kurven des Netzes auf einer Geraden.*

Die projektive Theorie der Netze steht auch in einem engen Zusammenhang mit der projektiven Theorie der Verwandtschaften W zwischen zwei Ebenen E_1, E_2, wobei die gegenseitige Lage der beiden Ebenen nicht berücksichtigt wird. In jedem Punkte von E_1 gibt es im allgemeinen drei

1) Das hängt *nicht* von der näheren Wahl der Kollineation K ab.

2) Siehe C. R. 188, 1929, S. 291.

3) Es ist $x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$, $(x\, x_u\, x_{uu})$ ist eine Determinante dritten Grades usw.

4) Für die geometrische Interpretation s. C. R. 188, 1929, S. 1331.

Richtungen (die *charakteristischen* Richtungen im Sinne von Hn. Borůvka), in denen die Verwandtschaft W die Inflexionen erhält. Eine Verwandtschaft zwischen zwei Netzen ist dann und nur dann eine projektive Deformation, falls die Netzrichtungen in diesem Sinne charakteristisch sind. Eine Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen ist also im allgemeinen für drei zugeordnete Paare von Netzen eine projektive Deformation.

Ein anderer fundamentaler Begriff aus der projektiven Theorie der Verwandtschaften zwischen zwei Ebenen ist der Begriff der *begleitenden Kollineation.* Ich werde ihn hier analytisch definieren (man kann auch verschiedene geometrische Definitionen angeben): Der Punkt $x(u, v)$ bewege sich in der Ebene E_1; der Punkt $y(u, v)$ in der Ebene E_2; die Parameter (u, v) definieren eine Verwandtschaft W zwischen E_1 und E_2. Man kann die Faktoren der homogenen Koordinaten so wählen, daß die beiden Determinanten $(x x_u x_v)$, $(y y_u y_v)$ identisch gleich sind. Unter dieser Annahme entspricht für gegebenes (u_0, v_0) in der begleitenden Kollineation $K = K(u_0, v_0)$ jedem Punkte

$$(\lambda_0 x + \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v)_{u = u_0,\, v = v_0}$$

der Ebene E_1 der Punkt

$$(\lambda_0 y + \lambda_1 y_u + \lambda_2 y_v)_{u = u_0,\, v = v_0} \qquad \text{der Ebene } E_2.$$

Sei $x(u, v)$ ein gegebenes Netz. Ich setze $(x x_u x_v) = \pm e^{\theta}$, und ich betrachte die Laplacesche Gleichung $x_{uv} + a x_u + b x_v + c = 0$ des Netzes. Die beiden Differentialformen $e^{2\theta}\, du\, dv$ und $b\, du + a\, dv$ definieren in der Ebene des Netzes eine *Weylsche Metrik*, die mit dem Netze projektivinvariant verknüpft ist. Im Falle eines asymptotischen Netzes (und nur dann) ist diese Metrik Riemannsch, und zwar ist dann die zugehörige quadratische Form (bis auf einen willkürlichen Zahlenfaktor) die affine quadratische Grundform der Fläche im Sinne von Hn. Pick und Blaschke. Bei einer Verwandtschaft zwischen zwei Netzen $x(u, v)$, $y(u, v)$ sind die Weylschen Metriken der beiden Netze identisch dann und nur dann, falls für alle u, v die beiden Laplace-Transformierten des Netzes $x(u, v)$ vermittels der begleitenden Kollineation in die Laplace-Transformierten des Netzes $y(u, v)$ übergehen. Speziell erhält man so indirekt auch eine geometrische Deutung derjenigen Verwandtschaften zwischen zwei nicht abwickelbaren Flächen des affinen Raumes, bei denen die quadratischen Grundformen der beiden Flächen bis auf einen Zahlenfaktor identisch sind. Man kann übrigens auch eine direkte Deutung dieses Spezialfalles angeben: Seien u, v asymptotische Parameter der beiden nicht abwickelbaren Flächen F_1, F_2 des affinen Raumes, so daß eine Verwandtschaft V zwischen F_1, F_2 vorliegt, welche die asymptotischen Linien der beiden Flächen einander entsprechen läßt. Für jede Wahl von $u, v = u_0, v_0$ gibt es dann eine eindeutig bestimmte affine Transformation $A = A(u_0, v_0)$, welche die in der Nähe von (u_0, v_0) gelegenen Flächenelemente der Fläche F_1 bis auf unendlich kleines zweiter Ordnung in die ihnen vermöge V entsprechenden Flächenelemente der Fläche F_2 überführt. Die Flächen F_1, F_2 haben dann und nur dann dieselbe quadratische Grundform, falls die sämtlichen Affinitäten $A(u, v)$ *flächentreu* sind.

Wenn ich jedem Punkte $x(u, v)$ der Ebene eine x nicht enthaltende Gerade $\xi(u, v)$ zuordne, so erhalte ich in der Ebene eine *allgemeine Rezipro-*

zität. Im speziellen Falle, wo man den Faktor der homogenen Koordinaten x so wählen kann, daß für alle u, v die Gerade $\xi(u, v)$ die beiden Punkte x_u und x_v enthält, spreche ich von einer *allgemeinen Polarität.* Man könnte die allgemeine Polarität auch auf zweierlei Art einfach geometrisch definieren. Die lineare Polarität in bezug auf eine beliebige ebene algebraische Kurve ist ein Spezialfall der allgemeinen Polarität.

Wenn ich jedem Punkte des Netzes $x(u, v)$ die Verbindungslinie der beiden Laplace-Transformierten von x zuordne, so erhalte ich die *Laplacesche Reziprozität* des Netzes. Dieselbe ist eine allgemeine Polarität im Falle eines asymptotischen Netzes und nur dann. Für eine beliebig vorgegebene allgemeine Reziprozität R existieren immer Netze, deren Laplacesche Reziprozität R ist, und sie hängen von zwei willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab. Dieses Theorem gibt, auf asymptotische Netze angewandt, die folgende Folgerung: Zu einer gegebenen nicht abwickelbaren Fläche F existieren immer Flächen Φ so, daß in den Punkten von F und Φ, wo die Tangentenebenen parallel sind, auch die Affinnormalen von F und Φ parallel sind; die Flächen Φ hängen von zwei willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab.

Ich habe oben die begleitenden Kollineationen $K(u, v)$ einer Verwandtschaft V zwischen zwei Ebenen E_1, E_2 definiert. Dabei wurden die Ebenen E_1 und E_2 als Orte von *Punkten* aufgefaßt. Fassen wir dagegen die Ebene E_2 als Ort von *Geraden* auf und lassen wir überdies die Ebenen E_1 und E_2 zusammenfallen, so kommen wir zu dem Begriff der *begleitenden Korrelationen* einer allgemeinen Reziprozität. Es existieren allgemeine Reziprozitäten, deren begleitende Korrelationen sämtlich (gewöhnliche) Polaritäten (in bezug auf *begleitende Kegelschnitte*) sind; diese Reziprozitäten sind, wie man leicht sieht, allgemeine *Polaritäten*; ich nenne sie *konische Polaritäten.* Sie hängen von zwei willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab. Ein spezieller Fall einer konischen Polarität ist die gewöhnliche Polarität in bezug auf einen festen Kegelschnitt C; die begleitenden Kegelschnitte fallen dann sämtlich mit C zusammen. Eine Fläche F des affinen Raumes heiße Fläche K, falls die Laplacesche Reziprozität ϱ des Dualnetzes in der unendlich fernen Ebene ε, das aus den Tangentenebenen und asymptotischen Tangenten durch Schnitt mit ε entsteht, eine konische Polarität ist. Da die konischen Polaritäten von zwei willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen abhängen, so sieht man nach dem oben Gesagten, daß die Flächen K von vier Funktionen einer Veränderlichen abhängen. Die Flächen K stellen eine Verallgemeinerung der Flächen konstanter Krümmung dar; im Falle der letzten Flächen ist ja die Reziprozität ϱ bekanntlich nichts anderes als die Polarität in bezug auf den absoluten Kegelschnitt.

Zum Schluß sei mir erlaubt zu erwähnen, daß eine ausführliche Darstellung der projektiven Netztheorie den Gegenstand des 10. Kapitels eines elementaren Lehrbuches der projektiven Differentialgeometrie bilden wird, das, von Hn. Fubini und von mir verfaßt, im Verlage Gauthier-Villars erscheinen wird.

2. W. Haack, Danzig: Affine Differential-Geometrie der parabolischen Strahlensysteme und der Flächen.

Eine hyperbolisch gekrümmte, nicht geradlinige Fläche $x(u, v)$ sei durch ihre beiden Haupttangentensysteme aufgespannt. Die Strahlen des einen