Eduard Čech

Une démonstration du théorème de Jordan

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) 12 (1930), 386-388

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500986

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 9. – Roma, novembre 1930-VIII.

Matematica. — *Une démonstration du théorème de Jordan.* Nota [1] di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

NOTATIONS. – R désigne le plan euclidien contenant tous nos ensembles. AB désigne la partie commune aux ensembles A et B. Un *arc simple* (une *courbe simple*) est l'image biunivoque et bicontinue d'un segment (d'une circonférence). C étant un arc simple, C^* s'en obtient en omettant les deux extrémités. B étant un ensemble ouvert, F(B) en désigne la frontière.

LEMME 1. – Soit A un ensemble fermé et borné contenant un segment S. Supposons que l'ensemble A — S soit situé à une distance > 0 de chaque point de S^*. Soit V une composante de R — A. Alors $S^* \cdot F(V) \neq 0$ entraîne que S est contenu dans F(V). Le nombre de telles composantes V est égal à *un* ou à *deux*. Le second cas a lieu si et seulement si les deux extrémités de S appartiennent à la même composante de $A - S^*$. Dans le second cas, en désignant par V_1, V_2 les deux composantes V, tous les points de R — S suffisamment voisins à S^* appartiennent a $V_1 + V_2$ et chacun des deux ensembles V_1, V_2 est situé (au voisinage de S^*) entièrement d'un côté de S^* [2].

LEMME 2. – Soit Γ une courbe simple contenant un segment S. Il y a précisément deux composantes de $R - \Gamma$ telles que leur frontière coïncide avec Γ. *Démonstration.* L'ensemble $\Gamma - S^*$ étant connexe et à une distance > 0 de chaque point de S^*, d'après le lemme 1 il existe précisément deux

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1930.

(2) La démonstration se trouve essentiellement dans le § 2 de la Note de M. BROUWER *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes* («Math. Ann.» 69, 1910, p. 171).

composantes V de $R - \Gamma$ dont la frontière *contient* S; en outre, d'après le même lemme, les deux extrémités de S appartiennent à la même composante de $F(V) - S^*$ (contenu dans $\Gamma - S^*$), d'où il résulte que $F(V) = \Gamma$.

THÉORÈME 1. – Soit Γ une courbe simple; soit V une composante de $R - \Gamma$. Alors $F(V) = \Gamma$. *Démonstration.* Evidemment il existe une ligne brisée S sans point multiple dont les extrémités a, b appartiennent à Γ, S^* étant contenu dans V. Les points a, b divisent Γ en deux arcs simples C_1, C_2. Posons $\Gamma_i = S + C_i$ $(i = 1, 2)$. D'après le lemme 2, il y a deux composantes de $R - \Gamma_i$ dont la frontière coïncide avec Γ_i; désignons les par V_i, W_i. La partie connexe C_2^* de $R - \Gamma_1$ appartenant entièrement à *une* composante de $R - \Gamma_1$, on peut supposer que $V_1 \cdot C_2^* = 0$ et pareillement $V_2 \cdot C_1^* = 0$. Si l'on avait $V_1 \cdot V_2 \neq 0$, on arriverait à la contradiction $V_1 = V_2$, car chacun des deux domaines connexes V_1, V_2 est disjoint à la frontière de l'autre. Donc $V_1 \cdot V_2 = 0$. D'après le lemme 1, on en déduit sans peine que l'ensemble $K = V_1 + V_2 + S^*$ est connexe et ouvert; donc K fait partie de V. Evidemment $F(K)$ fait partie de Γ. Or on a précisément $F(K) = \Gamma$. En effet, prouvons p. ex. qu'un point α appartenant à C_1^* est agrégé à $F(K)$. Evidemment, il existe un entourage O de α disjoint à $V_2 + S^*$; donc $O \cdot K = O \cdot V_1$. Or α appartient à $F(V_1)$; donc $O \cdot V_1 = O \cdot K$ rencontre V_1 et par suite K. L'entourage O pouvant être supposé arbitrairement petit, il en résulte bien que le point α appartient à $F(K)$. Il reste à prouver que $V = K$ (car $F(K) = \Gamma$). Dans le cas contraire, il existerait *dans* V une ligne brisée L joignant un point de K à un point de $V - K$; la ligne L rencontrerait $F(K) = \Gamma$, ce qui est absurde, car $V \cdot \Gamma = 0$.

THÉORÈME 2. – Soit Γ une courbe simple. Alors $R - \Gamma$ a *au moins* deux composantes. *Démonstration.* Dans le cas contraire on aurait, en gardant les notations précédentes, $V = K = R - \Gamma$, d'où $O \cdot V_1 = O \cdot K = O \cdot (R - \Gamma)$ et par suite $O \cdot W_1 = 0$. Or cela est absurde, car le point α appartient a $\Gamma = F(W_1)$.

THÉORÈME 3. – Soit Γ une courbe simple. Alors $R - \Gamma$ a *au plus* deux composantes. *Démonstration.* Soient V, V', V'' trois composantes différentes de $R - \Gamma$. Par rapport à V, gardons les notations de la démonstration du théorème 1. Donnons aux symboles $S', a', b', C'_1, C'_2, \Gamma'_1, V'_1$ par rapport à V' la même signification que $S, a, b, C_1, C_2, \Gamma_1, V_1$ ont par rapport à V. De la relation $F(V) = \Gamma$ il résulte sans peine (1) que l'on peut s'arranger de manière que C'_1 fasse partie de C_1^*. Soit O un entourage suffisamment petit d'un point α choisi sur $C_1'^*$ (donc sur C_1^*). D'après

(1) V. BROUWER, loc. cit., § 3.

la démonstration du théorème 1, on a $O \cdot V = O \cdot V_1$, $O \cdot V' = O \cdot V'_1$. Or si l'on répète la démonstration de la relation $O \cdot V = O \cdot V_1$ en y remplaçant $\mathbf{\Gamma}$, V, S respectivement par $\mathbf{\Gamma}_1$, W_1, S' [1], on obtient la relation $O \cdot W_1 = O \cdot V'_1$. La courbe $\mathbf{\Gamma}_1$ contenant un segment, d'après le lemme 2 et le théorème 1 V_1 et W_1 sont les *seules* composantes de $R - \mathbf{\Gamma}_1$. Donc $OV_1 + O \cdot W_1 = O \cdot (R - \mathbf{\Gamma}_1)$, d'où $O \cdot V + O \cdot V' = O \cdot (R - \mathbf{\Gamma})$, d'où $O \cdot V'' = 0$, ce qui contredit au théorème 1.

Roma, 1930 — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accad. Naz. dei Lincei.