Eduard Čech

Réseaux R à invariants égaux

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 143 (1931), 29 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500992

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1931 | ČÍS. 143

RÉSEAUX *R* À INVARIANTS ÉGAUX

PAR

EDUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

La détermination de toutes les surfaces Σ non réglées qui admettent précisément ∞^2 déformations projectives ou, ce qui est la même chose, qui contiennent précisément ∞^1 réseaux R est un problème difficile. M. Cartan a démontré en 1920* que les surfaces Σ, si elles existent, dépendent au plus de 16 constantes arbitraires. On trouve des exemples effectifs de surfaces Σ parmi les surfaces admettant ∞^1 déformations projectives en elles mêmes que j'ai déterminées en 1924**.

Dans la première partie, je détermine toutes les surfaces Σ telles qu'un des réseaux R ait les invariants égaux. Un résumé du résultat se trouve au N° 41; il en résulte que nos surfaces se partagent en dix catégories dont la plus générale dépend de six constantes arbitraires. J'ai indiqué ce résultat sans démonstration dans le livre: G. Fubini et E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, p. 90. Tout récemment, M. B. Segre a publié un Mémoire fort intéressant*** dans la sixième partie duquel il traite le même problème, d'ailleurs sans le résoudre complètement. Ma méthode est entièrement différente de celle de M. B. Segre et elle conduit aux résultats bien simples.

Dans la seconde partie, je montre qu'une surface non réglée contient au plus ∞^2 réseaux de M. Jonas et qu'elle en contient autant si elle contient aussi ∞^2 réseaux R et dans ce cas seulement. J'y montre aussi que l'on peut déterminer complètement les surfaces qui admettent ∞^1 réseaux de M. Jonas, un de ces réseaux étant R. Enfin, je prouve que les réseaux de M. Jonas ont la même généralité que les réseaux R (six fonctions arbitraires d'un argument).

PREMIÈRE PARTIE.

Détermination de tous les réseaux R a invariants égaux.

1. Soit $(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)\colon 2\, du\, dv$ l'élément linéaire projectif d'une surface S. Nous excluons le cas élémentaire d'une surface réglée, d'où

* Sur la déformation projective des surfaces, Annales de l'Ecole Normale (3), 37, p. 295–300.

** Sur les surfaces qui admettent ∞^1 deformations projectives en elles mêmes, ces Publications, N° 40.

*** Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili e alle equazioni differenziali ad esse collegate, Memorie della Reale Accademia d'Italia, vol. 2, 1931, N° 3.

$\beta\gamma \neq 0$. Un réseau R étant isotherme-conjugué* son équation peut être supposée sous la forme

$$du^2 - dv^2 = 0. \tag{1}$$

Condition pour que (1) soit effectivement un réseau R est* $\beta_v = \gamma_u$. Pour que le réseau (1) ait en outre les invariants égaux il faut et il suffit** que ce soit un réseau de M. Jonas, ce qui donne $\beta_u = \gamma_v$. En combinant les deux conditions on obtient

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \gamma = \varphi - \psi; \quad \varphi = \varphi(u+v), \quad \psi = \psi(u-v). \tag{2}$$

Pour qu'il existe la surface S il faut et il suffit que l'on puisse déterminer des quantités $L = L(u, v)$, $M = M(u, v)$ telles que***

$$\begin{aligned} L_v &= -3\varphi\varphi' + 3\psi\psi' - \psi\varphi' + \varphi\psi', \\ M_u &= -3\varphi\varphi' + 3\psi\psi' + \psi\varphi' + \varphi\psi', \end{aligned} \tag{3}$$

$$\beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2\gamma_u L + \gamma_{uuu}. \tag{4}$$

Les équations (3) donnent tout de suite

$$L = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \tfrac{3}{2}\psi^2 - \varphi\psi + U, \quad M = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \tfrac{3}{2}\psi^2 + \varphi\psi + V \tag{5}$$

avec $U = U(u)$, $V = V(v)$. En vertu de (2) et (5), l'équation (4) devient

$$(\varphi - \psi)\, U' - (\varphi + \psi)\, V' + 2(\varphi' - \psi')(U - V) = 0. \tag{6}$$

2. Pour chaque choix de φ et ψ, l'équation (6) admet la solution évidente $U = V =$ constante. C'est le cas d'un réseau double de M. Koenigs considéré par M. Mentré† et profondément étudié par M. B. Segre dans l'Ouvrage cité. Nous ne nous en occuperons point; nous supposerons donc que

$$\varphi^2 - \psi^2 \neq 0; \quad U - V \neq 0. \tag{7}$$

3. Le réseau (1) étant R, la surface S admet des déformations projectives††. Le nombre de ces déformations est ∞^1, ou ∞^2, ou ∞^3†††. Le premier cas est celui déjà exclu où (6) n'admet que la solution $U = V = c$; le dernier cas sera traité plus simplement dans la seconde partie (N° 46). Il reste donc seulement le cas de ∞^2 déformations projectives. Or si l'on sait *a priori* qu'une surface S admet *au moins* ∞^2 déformations projectives, on reconnait sans peine*† que condition

---

* G. P. D. (= Fubini et Čech, Geometria proiettiva differenziale) § 17 C ou bien Intr. (= Fubini et Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces) § 41.

** G. P. D. § 17 B.

*** G. P. D. § 16 D ou bien Intr. § 28.

† V. aussi Intr. § 69.

†† G. P. D. § 54 et § 67 D ou bien Intr. § 29.

††† G. P. D. § 67 A et § 70 A ou bien Intr. § 29.

*† Cf. Intr. § 29.

nécessaire et suffisante pour que S en admette *précisément* ∞^2 est $(\log \beta : \gamma)_{uv} \neq 0$ ou bien

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\varphi + \psi}{\varphi - \psi} \neq 0. \tag{8}$$

4. On voit par un calcul simple que l'équation (6) exprime que

$$(U - V)\,[(\varphi + \psi)\, du - (\varphi - \psi)\, dv] \tag{9}$$

soit une différentielle exacte.

5. De (8) il résulte en particulier $\varphi\psi \neq 0$; on peut donc poser

$$x = \int \frac{d\,(u + v)}{\varphi}, \quad y = \int \frac{d\,(u - v)}{\psi}. \tag{10}$$

L'expression (9) prend alors la forme $\varphi\psi\ (U - V)\ d\,(x + y)$. Elle est donc une différentielle exacte si et seulement si

$$\varphi\psi\,(U - V) = F; \quad F = F\,(x + y). \tag{11}$$

Il en résulte que $F \neq 0$.

6. En éliminant U et V, on obtient de (11) $(F\varphi^{-1}\psi^{-1})_{uv} = 0$. En introduisant deux nouvelles fonctions

$$\xi = \xi\,(x) = \varphi^{-2}, \quad \eta = \eta\,(y) = \psi^{-2}, \tag{12}$$

cette équation se transforme par un calcul simple à la forme

$$2\,F''\,(\xi - \eta) + 3\,F'\,(\xi' - \eta') + F\,(\xi'' - \eta'') = 0. \tag{13}$$

L'inégalité (8) prend la forme

$$(\xi - \eta)\,(\xi'' + \eta'') - (\xi' - \eta')\,(\xi' + \eta') \neq 0. \tag{14}$$

Notons encore que des équations (10) et (12) on obtient

$$\frac{dx}{d\,(u + v)} = \xi^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{d\,(u + v)} = \eta^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

7. Posons

$$x - y = p, \quad x + y = q, \tag{16}$$

$$\xi - \eta = \varrho = \varrho\,(p, q). \tag{17}$$

D'après (7_1) et (12), on a $\varrho \neq 0$. L'équation (13) devient

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(2\,F\,\frac{\partial \varrho}{\partial q} + \varrho\,\frac{dF}{dq}\right) = 0$$

d'où

$$2\,F^{\frac{1}{2}}\,\frac{\partial}{\partial q}\,(\varrho\,F^{\frac{1}{2}}) = P = P(p). \tag{18}$$

Introduisons la fonction $Q = Q\,(q)$ telle que

$$Q^{\bullet} = F^{-\frac{1}{2}} \tag{19}$$

[d'après N° 5 on a $F \neq 0$] de manière que la (18) devient

$$(2\varrho F^{\frac{1}{2}} - PQ)_q = 0$$

d'où

$$2\varrho = Q'(P_1 + PQ); \quad P_1 = P_1(p). \tag{20}$$

Or la quantité ϱ doit avoir la forme (17), d'où on déduit sans peine l'équation

$$P_1'' Q' + P'' Q Q' - P_1 Q''' - P(Q Q')'' = 0. \tag{21}$$

La condition (14) se transforme par un calcul simple dans

$$P P_1' - P_1 P' \neq 0. \tag{22}$$

8. L'inégalité (22) exprime que P et P_1 sont deux fonctions lin. indépendantes de p de sorte que la (21) donne deux équations de la forme

$$Q''' = a_1 Q' + a_2 Q Q', \quad (Q Q')'' = b_1 Q' + b_2 Q Q', \tag{23}$$

où les a, b sont des constantes. L'équation (21) donne en vertu de (23)

$$P_1'' = a_1 P_1 + b_1 P, \quad P'' = a_2 P_1 + b_2 P, \tag{24}$$

car $Q' \neq 0$ d'après (19). En éliminant Q''' des deux équations (23) on obtient

$$3 Q'' + a_2 Q^2 + (a_1 - b_2) Q - b_1 = 0. \tag{25}$$

Si l'on différentie cette équation et que l'on y remplace ensuite Q''' par sa valeur (23_1) on obtient $5 a_2 Q + 4 a_1 - b_2 = 0$. Or nous savons que $Q' \neq 0$ d'où $a_2 = 0$. Par suite l'équation (25) devient

$$Q'' = 4 a^2 Q + b, \tag{26}$$

a et b étant des constantes *arbitraires* car les équations (23) sont une conséquence de (26) si l'on pose $a_1 = 4 a^2$, $b_1 = 3 b$, $a_2 = 0$, $b_2 = 16 a^2$. Les équations (24) prennent la forme

$$P'' = 16 a^2 P, \quad P''_1 = 4 a^2 P_1 + 3 b P. \tag{27}$$

9. Deux cas sont à distinguer. Cas 1: $a \neq 0$; cas 2: $a = 0$.

10. Commençons par le cas 1. Les équations (26) et (27) donnent

$$Q = -\frac{b}{4 a^2} + c_1 e^{2aq} + c_2 e^{-2aq}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} P = c_3 e^{4ap} + c_4 e^{-4ap}, \ P_1 = \frac{b}{4 a^2}(c_3 e^{4ap} + c_4 e^{-4ap}) + \\ + c_5 e^{2ap} + c_6 e^{-2ap}, \end{aligned} \tag{29}$$

où c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 sont des constantes. Ensuite, (20) prend la forme

$$\begin{aligned} \varrho = a c_1 c_5 e^{2a(p+q)} - a c_2 c_5 e^{2a(p-q)} + a c_1 c_6 e^{2a(q-p)} - a c_2 c_6 e^{-2a(p+q)} + \\ + a c_1^2 c_3 e^{4a(p+q)} - a c_2^2 c_3 e^{4a(p-q)} + a c_1^2 c_4 e^{4a(q-p)} - a c_2^2 c_4 e^{-4a(p+q)}. \end{aligned} \tag{30}$$

L'inégalité (22) donne

$$|c_3| + |c_4| > 0; \qquad |c_5| + |c_6| > 0. \tag{31}$$

11. D'après (19) on a $Q' \neq 0$; par suite il résulte de (43) que $|c_1| + |c_2| > 0$. Nous distinguerons donc deux cas. Cas 1·1: $c_1 c_2 \neq 0$; cas 1·2: $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$. Le cas $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ se ramène au cas 1·2 en changeant le signe de a.

12. Dans le cas 1·1, introduisons au lieu de c_1, c_2 deux nouvelles constantes c, k moyennant les équations $c_1 = c\,e^{-4ak}$, $c_2 = c\,e^{4ak}$; on a donc $c \neq 0$. Au lieu de c_3, c_4, c_5, c_6, introduisons les quatre nouvelles constantes

$$a_0 = 16\, a^3 c^2 c_3, \quad a_1 = 16\, a^3 c\, c_5, \quad a_3 = -16\, a^3 c\, c_6, \quad a_4 = -16\, a^3 c\, c_4,$$

de manière que les inégalités (31) donnent

$$|a_0| + |a_4| > 0; \quad |a_1| + |a_3| > 0. \tag{32}$$

L'équation (30) prend la forme [v. (16)]

$$16\, a^2 \varrho = a_0\, e^{8a(x-k)} + a_1\, e^{4a(x-k)} + a_3\, e^{-4a(x-k)} + a_4 e^{-8a(x-k)} - \\ - a_0\, e^{-8a(y-k)} - a_1\, e^{-4a(y-k)} - a_3\, e^{4a(y-k)} - a_4\, e^{8a(y-k)}.$$

D'après (17), il existe donc une constante a_2 telle que

$$\begin{aligned} 16\, a^2 \xi &= a_0\, e^{8a(x-k)} + a_1\, e^{4a(x-k)} + a_2 + a_3\, e^{-4a(x-k)} + \\ &\quad + a_4 e^{-8a(x-k)}, \\ 16\, a^2 \eta &= a_0\, e^{-8a(y-k)} + a_1\, e^{-4a(y-k)} + a_2 + a_3\, e^{4a(y-k)} + \\ &\quad + a_4\, e^{8a(y-k)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Introduisons deux variables nouvelles τ_1 et τ_2 au moyen des équations

$$\tau_1 = e^{4a(x-k)}, \quad \tau_2 = e^{-4a(y-k)}. \tag{34}$$

L'équation (19) prend maintenant la forme

$$(4\, a^2 c^2 F)^{-1} = \tau_1 : \tau_2 + \tau_2 : \tau_1 - 2. \tag{35}$$

Les équations (15) deviennent en vertu de (33) et (34)

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\tau_1}{d(u+v)}\right]^2 &= a_0\, \tau_1^4 + a_1\, \tau_1^3 + a_2\, \tau_1^2 + a_3\, \tau_1 + a_4, \\ \left[\frac{d\tau_2}{d(u-v)}\right]^2 &= a_0\, \tau_2^4 + a_1\, \tau_2^3 + a_2\, \tau_2^2 + a_3\, \tau_2 + a_4. \end{aligned} \tag{36}$$

13. Nous distinguerons cinq cas suivant la manière dont se comporte la forme biquadratique

$$a_0\, t_1^4 + a_1\, t_1^3\, t_2 + a_2\, t_1^2\, t_2^2 + a_3\, t_1\, t_2^3 + a_4\, t_2^4. \tag{37}$$

Cas 1·11: la (37) a quatre racines simples; cas 1·12: la (37) a une seule racine double; cas 1·13: la (37) a deux racines doubles; cas 1·14: la (37) a une racine triple; cas 1·15: la (37) a une racine quadruple. La (37) ne s'annule pas identiquement d'après (32).

14. Dans le cas 1·11 les équations (36) donnent

$$\tau_1 = \frac{A_1 p(u+v-u_0-v_0)+A_2}{A_3 p(u+v-u_0-v_0)+A_4}, \qquad \tau_2 = \frac{A_1 p(u-v-u_0+v_0)+A_2}{A_3 p(u-v-u_0+v_0)+A_4}, \tag{38}$$

où p est la fonction elliptique de Weierstrass vérifiant l'équation $p'^2 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)$; $A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0, e_1, e_2, e_3$ sont des constantes telles que $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$, $e_1+e_2+e_3=0$. On reconnait sans difficulté que les inégalités (32) ont la signification suivante: le couple de points $-A_2 : A_1$, $-A_4 : A_3$ ne fait pas partie de la quaterne ∞, e_1, e_2, e_3 et le même couple ne coïncide avec aucun des trois couples

$$e_1 \pm \sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \qquad e_2 \pm \sqrt{(e_2-e_1)(e_2-e_3)},$$
$$e_3 \pm \sqrt{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}.$$

Des équations (15), (34) et (38) on déduit sans peine que

$$\begin{gathered}\frac{4a}{A_1A_4-A_2A_3}\xi^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{p'(u+v-u_0-v_0)}{[A_1 p(u+v-u_0-v_0)+A_2][A_3 p(u+v-u_0-v_0)+A_4]}, \\ -\frac{4a}{A_1A_4-A_2A_3}\eta^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{p'(u-v-u_0+v_0)}{[A_1 p(u-v-u_0+v_0)+A_2][A_3 p(u-v-u_0+v_0)+A_4]}.\end{gathered} \tag{39}$$

Considérons v pour un moment comme une constante arbitraire. D'après (35) et (38) F est une fonction elliptique de la variable u qui possède des zéros simples dans les points u tels que $[A_1 p(u \pm v - u_0 \mp v_0)+A_2]\cdot[A_3 p(u \pm v - u_0 \mp v_0)]=0$ et des pôles doubles aux points u telles que $2(u-u_0)$ est une période de la fonction p. Il en résulte que le rapport entre F et la fonction

$$\begin{gathered}\frac{p(2\,.\,\overline{u-u_0})-p(2\,.\,\overline{v-v_0})}{p'(u+v-u_0-v_0)\,p'(u-v-u_0+v_0)}\times \\ \times[A_1 p(u+v-u_0+v_0)+A_2][A_1 p(u-v-u_0+v_0)+A_2]\times \\ \times[A_3 p(u+v-u_0+v_0)+A_4][A_3 p(u-v-u_0+v_0)+A_4]\end{gathered}$$

ne dépend pas de u. Par raison de symmétrie, ce rapport ne dépend pas non plus de v. Par suite on obtient, en tenant compte de (39),

$$F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A[p(2\,.\,\overline{u-u_0})-p(2\,.\,\overline{v-v_0})],$$

où A est une constante, de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = A p(2 . \overline{u-u_0}) + B, \quad V = A . p(2 . \overline{v-v_0}) + B,$$

B étant une nouvelle constante. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0 = v_0 = 0$. Le résultat définitif dans le cas 1·11 est donc [v. (12) et (39)]

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{[A_1 p(u+v) + A_2][A_3 p(u+v) + A_4]}{p'(u+v)}, \\ \psi &= -\frac{[A_1 p(u-v) + A_2][A_3 p(u-v) + A_4]}{p'(u-v)}, \\ U &= A p(2u) + B, \quad V = A p(2v) + B. \end{aligned} \tag{40}$$

15. Dans le cas 1·12 (v. N° 13) les équations (36) donnent

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{A_1 \cos(h . \overline{u+v-u_0-v_0}) + A_2}{A_3 \cos(h . \overline{u+v-u_0-v_0}) + A_4}, \\ \tau_2 &= \frac{A_1 \cos(h . \overline{u-v-u_0+v_0}) + A_2}{A_3 \cos(h . \overline{u-v-u_0+v_0}) + A_4}, \end{aligned} \tag{41}$$

où $h, A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $h \neq 0$, $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Les inégalités (32) montrent que les cas

$$A_1 = A_4 = 0; \; A_2 = A_3 = 0; \; A_1 = A_3^2 - A_4^2 = 0; \; A_3 = A_1^2 - A_2^2 = 0; \\ A_1^2 - A_2^2 = A_3^2 - A_4^2 = 0$$

doivent être exclus. Des équations (15), (34) et (41) on déduit que

$$\begin{aligned} &-\frac{4a}{h(A_1 A_4 - A_2 A_3)} \xi^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sin(h . \overline{u+v-u_0-v_0})}{[A_1 \cos(h . \overline{u+v-u_0-v_0}) + A_2][A_3 \cos(h . \overline{u+v-u_0-v_0}) + A_4]}, \\ &\frac{4a}{h(A_1 A_4 - A_2 A_3)} \eta^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sin(h . \overline{u-v-u_0+v_0})}{[A_1 \cos(h . \overline{u-v-u_0+v_0}) + A_2][A_3 \cos(h . \overline{u-v-u_0+v_0}) + A_4]}. \end{aligned} \tag{42}$$

Des équations (35) et (41) on voit que, si l'on considère v comme une constante, F est une fonction rationnelle de e^{ihu} ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles comme la fonction

$$\begin{aligned} &[A_1 \cos(h . \overline{u+v-u_0-v_0}) + A_2][A_1 \cos(h . \overline{u-v-u_0+v_0}) + A_2] \times \\ &\times [A_3 \cos(h . \overline{u+v-u_0-v_0}) + A_4][A_3 \cos(h . \overline{u-v-u_0+v_0}) + A_4] \times \\ &\times \sin^{-2}(h . \overline{u-u_0}) \sin^{-2}(h . \overline{v-v_0}). \end{aligned} \tag{*}$$

Donc le rapport ϱ entre les deux fonctions F et (*) a la forme $r . e^{ihu}$, où les quantités r et h ne dépendent pas de u; or on voit sans peine que ϱ ne change pas si l'on remplace u par $2u_0-u$, d'où l'on conclut que $h=0$. Ceci signifie que ϱ ne dépend point de u; par raison de symétrie, ϱ ne dépend pas non plus de v. Par suite on obtient, en tenant compte de (42),

$$F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}=-A\frac{\sin(h\,.\,\overline{u+v-u_0-v_0})\sin(h\,.\,\overline{u-v-u_0+v_0})}{\sin^2(h\,.\,\overline{u-u_0})\sin^2(h\,.\,\overline{v-v_0})}$$

où A est une constante, de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U=A\operatorname{cotg}^2(h\,.\,\overline{u-u_0})+B,\quad V=A\operatorname{cotg}^2(h\,.\,\overline{v-v_0})+B,$$

B étant une nouvelle constante. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0=v_0=0$, $h=1$, $A_1A_4-A_2A_3+4a=0$. Le résultat définitif dans le cas 1·12 est donc [v. (12) et (42)]

$$\begin{gathered}\varphi=\frac{[A_1\cos(u+v)+A_2][A_3\cos(u+v)+A_4]}{\sin(u+v)},\\ \psi=-\frac{[A_1\cos(u-v)+A_2][A_3\cos(u-v)+A_4]}{\sin(u-v)},\\ U=A\operatorname{cotg}^2u+B,\quad V=A\operatorname{cotg}^2v+B.\end{gathered}\tag{43}$$

16. Dans le cas 1·13 (v. N° 13) les équations (36) donnent, si l'on tient compte de ce qu'il est évidemment permis d'échanger u avec v,

$$\tau_1=\frac{A_1e^{h(u+v-u_0-v_0)}+A_2}{A_3e^{h(u+v-u_0-v_0)}+A_4},\quad \tau_2=\frac{A_1e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_2}{A_3e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_4},\tag{44}$$

où h, A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0 sont des constantes telles que $h\neq 0$, $A_1A_4-A_2A_3\neq 0$. Les inégalités (32) montrent que les trois cas $A_1=A_4=0$; $A_2=A_3=0$; $A_1A_4+A_2A_3=0$ doivent être exclus. Des équations (15), (34) et (44) on déduit que

$$\begin{aligned}\xi^{\frac{1}{2}}&=\frac{h(A_1A_4-A_2A_3)}{4a}\frac{e^{h(u+v-u_0-v_0)}}{[A_1e^{h(u+v-u_0-v_0)}+A_2][A_3e^{h(u+v-u_0-v_0)}+A_4]},\\ \eta^{\frac{1}{2}}&=-\frac{h(A_1A_4-A_2A_3)}{4a}\frac{e^{h(u-v-u_0+v_0)}}{[A_1e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_2][A_3e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_4]}.\end{aligned}\tag{45}$$

Des équations (35) et (44) on voit que, si l'on considère v comme une constante, F est une fonction rationnelle de e^{hu} ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles comme la fonction

$$\begin{gathered}[A_1e^{h(u+v-u_0-v_0)}+A_2][A_1e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_2]\times\\ \times[A_3e^{h(u+v-u_0-v_0)}+A_4][A_3e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_4]\times\\ \times[e^{2h(v-v_0)}-1]^{-2}.\end{gathered}\tag{*}$$

Le même fait a lieu si l'on considère F comme une fonction de v. Il en résulte que le rapport entre les deux fonctions F et (*) a la forme

$e^{h(mu+nv+r)}$, m, n, r étant des constantes. En remplaçant u par $2u_0 - u$, on voit que $m = -2$; en remplaçant v par $2v_0 - v$, on voit que $n = 2$ d'où en vertu de (45)

$$F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = -A\left[e^{h(v-v_0)} - e^{-h(v-v_0)}\right]^{-2}$$

où A est une constante, de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = B, \quad V = A\left[e^{h(v-v_0)} - e^{-h(v-v_0)}\right]^{-2} + B$$

B étant une nouvelle constante. Sans diminuer la généralité, on peut poser $h = 1$, $A_1A_4 - A_2A_3 = 4a$. Le résultat définitif dans le cas 1·13 est donc [v. (12) et (45)]

$$\begin{aligned} \varphi &= [A_1e^{u+v} + A_2]\,[A_3e^{u+v} + A_4] : e^{u+v}, \\ \psi &= -[A_1e^{u-v} + A_2]\,[A_3e^{u-v} + A_4] : e^{u-v}, \\ U &= B, \quad V = A(e^v - e^{-v})^{-2} + B. \end{aligned} \tag{46}$$

17. Dans le cas 1·14 (v. N° 13) les équations (36) donnent

$$\tau_1 = \frac{A_1(u+v-u_0-v_0)^2 + A_2}{A_3(u+v-u_0-v_0)^2 + A_4}, \quad \tau_2 = \frac{A_1(u-v-u_0+v_0)^2 + A_2}{A_3(u-v-u_0+v_0)^2 + A_4}, \tag{47}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0 sont des constantes telles que $A_1A_4 - A_2A_3 \neq 0$. Les inégalités (32) montrent que les deux cas $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 = A_4 = 0$ doivent être exclus. Des équations (15), (34) et (47) on déduit que

$$\begin{aligned} &-\frac{2a}{A_1A_4 - A_2A_3}\xi^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{u+v-u_0-v_0}{[A_1(u+v-u_0-v_0)^2 + A_2]\,[A_3(u+v-u_0-v_0)^2 + A_4]}, \\ &-\frac{2a}{A_1A_4 - A_2A_3}\eta^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{u-v-u_0+v_0}{[A_1(u-v-u_0+v_0)^2 + A_2]\,[A_3(u-v-u_0+v_0)^2 + A_4]}. \end{aligned} \tag{48}$$

Par la considération des pôles et des zéros on déduit de (35) et (47) que la fonction F ne diffère de

$$\begin{aligned} &[A_1(u+v-u_0-v_0)^2 + A_2]\,[A_1(u-v-u_0+v_0)^2 + A_2] \times \\ &\times [A_3(u+v-u_0-v_0)^2 + A_4]\,[A_3(u-v-u_0+v_0)^2 + A_4] \times \\ &\times (u-u_0)^{-2}(v-v_0)^{-2} \end{aligned}$$

que par une facteur numérique. On a donc d'après (48)

$$F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = -A\frac{(u+v-u_0-v_0)(u-v-u_0+v_0)}{(u-u_0)^2(v-v_0)^2}$$

où A est une constante, de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = A(u-u_0)^{-2} + B, \quad V = A(v-v_0)^2 + B$$

avec une nouvelle constante B. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0 = v_0 = 0$, $A_1 A_4 - A_2 A_3 = 2a$. Le résultat définitif dans le cas 1·14 est donc [v. (12) et (48)]

$$\begin{aligned}
\varphi &= [A_1 (u+v)^2 + A_2][A_3 (u+v)^2 + A_4] : (u+v),\\
\psi &= -[A_1 (u-v)^2 + A_2][A_3 (u-v)^2 + A_4] : (u-v),\\
U &= A u^{-2} + B, \quad V = A v^{-2} + B.
\end{aligned} \tag{49}$$

18. Dans le cas 1·15 (v. N° 13) les équations (36) donnent, si l'on tient compte de ce qu'il est permis d'échanger u avec v,

$$\tau_1 = \frac{A_1 (u + v - u_0 - v_0) + A_2}{A_3 (u + v - u_0 - v_0) + A_4}, \quad \tau_2 = \frac{A_1 (u - v - u_0 + v_0) + A_2}{A_3 (u - v - u_0 + v_0) + A_4} \tag{50}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0 sont des constantes telles que $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Les inégalités (32) montrent que les deux cas $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 = A_4 = 0$ doivent être exclus. Des équations (15), (34) et (50) on déduit que

$$\begin{aligned}
\xi^{-\frac{1}{2}} &= 4a (A_1 A_4 - A_2 A_3)^{-1} [A_1 (u + v - u_0 - v_0) + A_2] \times\\
&\quad \times [A_3 (u + v - u_0 - v_0) + A_4],\\
\eta^{-\frac{1}{2}} &= 4a (A_1 A_4 - A_2 A_3)^{-1} [A_1 (u - v - u_0 + v_0) + A_2] \times\\
&\quad \times [A_3 (u - v - u_0 + v_0) + A_4].
\end{aligned} \tag{51}$$

Par la considération des pôles et des zéros on déduit de (35) et (50) que F ne diffère de

$$\begin{aligned}
&[A_1 (u + v - u_0 - v_0) + A_2][A_1 (u - v - u_0 + v_0) + A_2] \times\\
&\times [A_3 (u + v - u_0 - v_0) + A_4][A_3 (u - v - u_0 + v_0) + A_4](v - v_0)^{-2}
\end{aligned}$$

que par un facteur numérique. On a donc d'après (51)

$$F \xi^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} = -A (v - v_0)^{-2}$$

où A est une constante de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = B, \quad V = A (v - v_0)^{-2} + B$$

avec une nouvelle constante B. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0 = v_0 = 0$, $A_1 A_4 - A_2 A_3 = 4a$. Le résultat définitif dans le cas 1·15 est donc [v. (12) et (51)]

$$\begin{aligned}
\varphi &= [A_1 (u+v) + A_2][A_3 (u+v) + A_4],\\
\psi &= [A_1 (u-v) + A_2][A_3 (u-v) + A_4],\\
U &= B, \quad V = A v^{-2} + B.
\end{aligned} \tag{52}$$

19. Passons au cas 1·2 (v. N° 11). On a $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ de sorte que l'équation (30) devient d'après (16)

$$\varrho = a c_1 c_5 e^{4ax} + a c_1^2 c_3 e^{8ax} + a c_1 c_6 e^{4ay} + a c_1^2 c_4 e^{8ay}.$$

Introduisons quatre nouvelles constantes a_1, a_2, b_1, b_2, en posant $a_1 = 16\, a^3 c_1 c_5$, $a_2 = 16\, a^3 c_1^2 c_3$, $b_1 = 16\, a^3 c_1 c_6$, $b_2 = 16\, a^3 c_1^2 c_4$ de sorte que l'on a d'après (17) avec une nouvelle constante a_0

$$16\, a^2 \xi = a_2 e^{8ax} + a_1 e^{4ax} + a_0, \quad 16 a^2 \eta = b_2 e^{8ay} + b_1 e^{4ay} + a_0. \tag{53}$$

Les inégalités (31) prennent la forme

$$|a_1| + |b_1| > 0; \quad |a_2| + |b_2| > 0. \tag{54}$$

Posons encore
$$\tau_1 = e^{-4ax}, \quad \tau_2 = e^{-4ay} \tag{55}$$

de manière que l'équation (19) donne en vertu de (16) et (28) dans le cas actuel $c_2 = 0$

$$\tau_1 \tau_2 F^{-1} = 4\, a^2 c_1^2. \tag{56}$$

Les équations (15) deviennent d'après (53) et (54)

$$\left[\frac{d\tau_1}{d(u+v)}\right]^2 = a_0 \tau_1^2 + a_1 \tau_1 + a_2, \quad \left[\frac{d\tau_2}{d(u+v)}\right]^2 = a_0 \tau_2^2 + b_1 \tau_2 + b_2. \tag{57}$$

20. Nous diviserons le cas 1·2 en six souscas. Cas 1·21 : $a_0 \neq 0$, $4\, a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0$, $4\, a_0 b_2 - b_1^2 \neq 0$; cas 1·22: $a_0 \neq 0$, $4\, a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0$, $4\, a_0 b_2 - b_1^2 = 0$; cas 1·23: $a_0 \neq 0$, $4\, a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, $4\, a_0 b_2 - b_1^2 = 0$; cas 1·24: $a_0 = 0$, $a_1 b_1 \neq 0$; cas 1·25: $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$; cas 1·26: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $b_1 b_2 \neq 0$. Les autres cas ou se réduisent aux précédents en changeant le signe de v ou bien sont exclus en vertu de (54). Remarquons tout de suite que le cas 1·26 est impossible car d'après (10_1) et (55_1) la quantité τ_1 n'est pas constante.

21. Dans le cas 1·21 les équations (57) donnent

$$\begin{aligned} \tau_1 &= A_1 \sin(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0}) + A_2, \\ \tau_2 &= A_3 \sin(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0}) + A_4, \end{aligned} \tag{58}$$

où h, A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0 sont des constantes telles que $h \neq 0$, $A_1 \neq 0$, $A_3 \neq 0$. L'inégalité (54) exclut encore les deux cas $A_2 = A_4 = 0$; $A_1^2 - A_2^2 = A_3^2 - A_4^2 = 0$. Des équations (15), (55) et (58) on obtient

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{2}} &= -\frac{h A_1}{4\, a} \frac{\cos(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0})}{A_1 \sin(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0}) + A_2}, \\ \eta^{\frac{1}{2}} &= -\frac{h A_3}{4\, a} \frac{\cos(h\,.\,\overline{u - v - u_0 + v_0})}{A_3 \sin(h\,.\,\overline{u - v - u_0 + v_0}) + A_4}. \end{aligned} \tag{59}$$

Des équations (56), (58) et (59) il résulte, en posant $A = h^2 A_1 A_3 : 128\, a^4 c_1^2$,

$$F \xi^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} = 2\, A \cos(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0}) \,(\cos h\,.\,\overline{u - v - u_0 + v_0})$$

de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = A \cos(2\, h\,.\,\overline{u - u_0}) + B, \qquad V = -A \cos(2\, h\,.\,\overline{v - v_0}) + B,$$

B étant une constante. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0 = v_0 = 0$, $h = 1$. Le résultat définitif dans le cas 1·21 est donc [v. (12) et (59)] après un petit changement de notation

$$\begin{aligned} \varphi &= [A_1 \sin(u+v) + A_2] : \cos(u+v), \\ \psi &= [A_1 \sin(u-v) + A_3] : \cos(u-v), \\ U &= A\cos 2u + B, \quad V = -A\cos 2v + B. \end{aligned} \tag{60}$$

Les trois cas $A_1 = 0$; $A_2 = A_4 = 0$; $A_1^2 = A_2^2 = A_3^2$ sont à exclure.

22. Dans le cas 1·22 (v. N° 20) les équations (57) donnent, si l'on tient compte de ce qu'il est permis d'échanger u avec v,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= A_1 \left[e^{h(u+v-u_0-v_0)} + e^{-h(u+v-u_0-v_0)}\right] + A_2, \\ \tau_2 &= e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_3, \end{aligned} \tag{61}$$

où $h, A_1, A_2, A_3, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $h \neq 0$, $A_1 \neq 0$. L'inégalité (54) exclut encore les deux cas $A_2 = A_3 = 0$; $4A_1^2 - A_2^2 = A_3 = 0$. Des équations (15), (55) et (61) on obtient

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{2}} &= -\frac{hA_1}{4a} \frac{e^{h(u+v-u_0-v_0)} - e^{-h(u+v-u_0-v_0)}}{A_1\left[e^{h(u+v-u_0-v_0)} + e^{-h(u+v-u_0-v_0)}\right] + A_2}, \\ \eta^{\frac{1}{2}} &= -\frac{h}{4a} \frac{e^{h(u-v-u_0+v_0)}}{e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_3}, \end{aligned} \tag{62}$$

Des équations (56), (61) et (62) il résulte, en posant $A = h^2 A_1 : 64\, a^2 c_1^2$,

$$F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A\left[e^{h(u+v-u_0-v_0)} - e^{-h(u+v-u_0+v_0)}\right] e^{h(u-v-u_0+v_0)}$$

de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = Ae^{2h(u-u_0)} + B, \quad V = Ae^{-2h(v-v_0)} + B,$$

B étant une constante. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0 = v_0 = 0$, $h = 1$. Le résultat définitif dans le cas 1·22 est donc [v. (12) et (62)] après un petit changement de notation

$$\begin{aligned} \varphi &= \left[A_1\left(e^{u+v} + e^{-(u+v)}\right) + A_2\right] : \left(e^{u+v} - e^{-(u+v)}\right), \\ \psi &= A_1 + A_3 e^{v-u}, \\ U &= Ae^{2u} + B, \quad V = Ae^{-2v} + B. \end{aligned} \tag{63}$$

Les trois cas $A_1 = 0$; $A_2 = A_3 = 0$; $4A_1^2 - A_2^2 = A_3 = 0$ sont à exclure.

23. Dans le cas 1·23 (v. N° 20) les équations (57) donnent, si l'on tient compte de ce qu'il évidemment permis de remplacer u, v par $\pm u$, $\pm v$ ou par $\pm v$, $\pm u$,

$$\tau_1 = e^{h(u+v-u_0-v_0)} + A_1, \quad \tau_2 = e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_2, \tag{64}$$

où $h \neq 0$, A_1, A_2, u_0, v_0 sont des constantes. L'inégalité (54) exclut le cas $A_1 = A_2 = 0$. Des équations (15), (55) et (64) on obtient

$$\begin{aligned} -h\,\xi^{-\frac{1}{2}} &= 4\,a\,[1 + A_1\,e^{-h(u+v-u_0-v_0)}], \\ -h\,\eta^{-\frac{1}{2}} &= 4\,a\,[1 + A_2\,e^{-h(u-v-u_0+v_0)}]. \end{aligned} \tag{65}$$

Des équations (56), (64) et (65) il résulte, en posant $A = h^2 : 64\,a^2\,c_1^{\,2}$,

$$F\,\xi^{\frac{1}{2}}\,\eta^{\frac{1}{2}} = A\,e^{h(u+v-u_0-v_0)}\,e^{h(u-v-u_0+v_0)}$$

de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = A\,e^{2h(u-u_0)} + B, \quad V = B,$$

B étant une constante. Sans diminuer la généralité, on peut poser $u_0 = v_0 = 0$, $h = 1$. Le résultat définitif dans le cas 1·23 est donc [v. (12) et (65)] après un petit changement de notation

$$\varphi = e^{-(u+v)} + A_0, \quad \psi = e^{-(u-v)} + A_0, \quad U = A\,e^{2u} + B, \quad V = B. \tag{66}$$

Le cas $A_0 = 0$ est à exclure.

24. Dans le cas 1·24 (v. N° 20) les équations (57) donnent

$$\tau_1 = A_1\,(u + v - u_0 - v_0)^2 + A_2, \quad \tau_2 = A_3\,(u - v - u_0 + v_0)^2 + A_4, \tag{67}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont des constantes telles que $A_1 \neq 0$, $A_3 \neq 0$. L'inégalité (54) exclut encore le cas $A_2 = A_4 = 0$. Des équations (15), (55) et (67) on obtient

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{2}} &= -\frac{A_1}{2a}\,\frac{u + v - u_0 - v_0}{A_1\,(u + v - u_0 - v_0)^2 + A_2}, \\ \eta^{\frac{1}{2}} &= -\frac{A_3}{2a}\,\frac{u - v - u_0 + v_0}{A_3\,(u - v - u_0 + v_0)^2 + A_4}. \end{aligned} \tag{68}$$

Des équations (56), (67) et (68) il résulte, en posant $A = A_1\,A_3 : 16\,a^4\,c_1^{\,2}$,

$$F\,\xi^{\frac{1}{2}}\,\eta^{\frac{1}{2}} = A\,(u + v - u_0 - v_0)\,(u - v - u_0 + v_0)$$

de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = A\,(u - u_0)^2 + B, \quad V = A\,(v - v_0)^2 + B,$$

B étant une constante. Le résultat définitif dans le cas 1·24 est donc [v. (12) et (68)] après un petit changement de notation

$$\begin{gathered} \varphi = A_1\,(u + v) + A_2 : (u + v), \quad \psi = A_1\,(u - v) + A_3 : (u - v), \\ U = A u^2 + B, \quad V = A v^2 + B. \end{gathered} \tag{69}$$

Les deux cas $A_1 = 0$; $A_2 = A_3 = 0$ sont à exclure.

25. Dans les cas 1·25 (v. N° 20) les équations (57) donnent

$$\tau_1 = A_1\,(u + v - u_0 - v_0)^2 + A_2, \quad \tau_2 = A_3\,(u - v - u_0 + v_0) \tag{70}$$

où A_1, A_2, A_3, u_0, v_0 sont des constantes telles que $A_1 \neq 0$, $A_3 \neq 0$. Des équations (15), (55) et (70) on obtient

$$\xi^{\frac{1}{2}} = -\frac{A_1}{2a}\,\frac{u+v-u_0-v_0}{A_1(u+v-u_0-v_0)^2-A_3},\quad \eta^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4a}\,\frac{1}{u-v-u_0+v_0}. \tag{71}$$

Des équations (56), (70) et (71) il résulte, en posant $A = A_1 : 32\,a^4 c_1^2$,

$$F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A\,(u+v-u_0-v_0)$$

de sorte que les équations (11) et (12) donnent

$$U = A\,(u-u_0) + B,\quad V = -A\,(v-v_0) + B.$$

Donc on peut écrire le résultat définitif dans le cas 1·25 [v. (12) et (71)] sous la forme suivante

$$\begin{gathered}\varphi = A_1(u+v) + A_2 : (u+v),\quad \psi = 2A_1(u-v) + A_3,\\ U = Au + B,\quad V = -Av + B\end{gathered} \tag{72}$$

où l'on a $A_1 \neq 0$. On peut d'ailleurs poser, sans diminuer la généralité, $A_1 = 1$, $A_3 = 0$.

26. Le cas 1 étant épuisé, passons à l'étude du cas 2 (v. N° 9). Les équations (26) et (27) donnent actuellement

$$Q = \tfrac{1}{2}b\,q^2 + c_1 q + c_2, \tag{73}$$

$$P = c_3 p + c_4,\quad P_1 = \tfrac{1}{2}b\,c_3 p^3 + \tfrac{3}{2}b\,c_4 p^2 + c_5 p + c_6, \tag{74}$$

où c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 sont des constantes. L'inégalité (22) devient

$$|c_3| + |c_4| > 0;\quad |b| + |c_3 c_6 - c_4 c_5| > 0. \tag{75}$$

D'après (16), (73) et (74), l'équation (20) prend la forme

$$\begin{aligned}2\varrho = {} & b^2 c_3(x^4-y^4) + 2b^2 c_4(x^3+y^3) + 2b\,c_1 c_3(x^3-y^3) + \\ & + 3b\,c_1 c_4(x^2+y^2) + (b\,c_2 c_3 + b\,c_5 + c_1^2 c_3)(x^2-y^2) + \\ & + c_1(c_2 c_3 + c_5)(x-y) + (b\,c_2 c_4 + b\,c_6 + c_1^2 c_4)(x+y) + c_1(c_2 c_4 + c_6).\end{aligned} \tag{76}$$

27. Nous distinguerons deux souscas. Cas $2{\cdot}1 : b \neq 0$; cas $2{\cdot}2 : b = 0$.

28. Dans le cas 2·1, l'équation (76) peut s'écrire d'après (17)

$$\begin{aligned}2(\xi-\eta) = {} & b^2 c_3\left[\left(x+\frac{c_1}{2b}\right)^4 - \left(y+\frac{c_1}{2b}\right)^4\right] + 2b^2 c_4\left[\left(x+\frac{c_1}{2b}\right)^3 + \left(y+\frac{c_1}{2b}\right)^3\right] + \\ & + \left(b\,c_2 c_3 + b\,c_5 - \frac{1}{2}c_1^2 c_3\right)\left[\left(x+\frac{c_1}{2b}\right)^2 - \left(y+\frac{c_1}{2b}\right)^2\right] + \\ & + \left(b\,c_2 c_4 + b\,c_6 - \frac{1}{2}c_1^2 c_4\right)\left[\left(x+\frac{c_1}{2b}\right) - \left(y+\frac{c_1}{2b}\right)\right].\end{aligned}$$

On a donc, en introduisant des nouvelles constantes k, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,

$$\begin{aligned}\xi &= a_0(x+k)^4 + a_1(x+k)^3 + a_2(x+k)^2 + a_3(x+k) + a_4,\\ \eta &= a_0(y+k)^4 - a_1(y+k)^3 + a_2(y+k)^2 - a_3(y+k) + a_4.\end{aligned} \tag{77}$$

Les inégalités (75) donnent évidemment

$$|a_0| + |a_4| > 0. \tag{78}$$

De (19) et (73) on déduit sans peine que

$$F^{-1} = b^2 (x + y + 2k)^2. \tag{79}$$

29. Comme au N° 13, nous devons de nouveau distinguer cinq cas suivant la manière dont se comporte la forme biquadratique (37). Désignons par 2·11, 2·12, 2·13, 2·14, 2·15 les cas analogues aux cas 1·11, ..., 1·15 là considérés. Ici encore, la forme (37) ne peut s'évanouir identiquement d'après (78).

30. Dans le cas 2·11 les équations (15) et (77) donnent

$$\left.\begin{aligned} x + k &= \frac{A_1 p(u + v - u_0 - v_0) + A_2}{A_3 p(u + v - u_0 - v_0) + A_4}, \\ -(y + k) &= \frac{A_1 p(u - v - u_0 + v_0) + A_2}{A_3 p(u - v - u_0 + v_0) + A_4} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

où p désigne la fonction elliptique de Weierstrass à periodes arbitraires; $A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Ensuite on déduit de (15) que

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{2}} &= (A_1 A_4 - A_2 A_3) \frac{p'(u + v - u_0 - v_0)}{[A_3 p(u + v - u_0 - v_0) + A_4]^2}, \\ \eta^{\frac{1}{2}} &= -(A_1 A_4 - A_2 A_3) \frac{p'(u - v - u_0 + v_0)}{[A_3 p(u - v - u_0 + v_0) + A_4]^2}. \end{aligned}$$

Si l'on considère pour un moment v comme une constante, on voit de (79) et (80) que F est une fonction elliptique de u ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles comme la fonction

$$\begin{aligned} &[p(2\,.\,\overline{u - u_0}) - p(2\,.\,\overline{v - v_0})] \times \\ &\times \frac{[A_3 p(u + v - u_0 - v_0) + A_4]^2\,[A_3 p(u - v - u_0 + v_0) + A_4]^2}{p'(u + v - u_0 - v_0)\,p'(u - v - u_0 + v_0)}. \end{aligned} \tag{*}$$

Donc le rapport entre F et (*) ne dépend pas de u ni, par raison de symmétrie, de v de sorte que, A étant une constante,

$$U - V = F\,\xi^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} = A\,[p(2\,.\,\overline{u - u_0}) - p(2\,.\,\overline{v - v_0})].$$

Par conséquent le résultat définitif dans le cas 2·11 est donné par les formules (40) si l'on y pose $A_1 A_4 - A_2 A_3 = 0$.

31. Dans le cas 2·12 (v. N° 29) les équations (15) et (77) donnent

$$\left.\begin{aligned} x + k &= \frac{A_1 \cos(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0}) + A_2}{A_3 \cos(h\,.\,\overline{u + v - u_0 - v_0}) + A_4}, \\ -(y + k) &= \frac{A_1 \cos(h\,.\,\overline{u - v - u_0 + v_0}) + A_2}{A_3 \cos(h\,.\,\overline{u - v - u_0 + v_0}) + A_4}, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

où $h, A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $h \neq 0$, $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Le cas $A_3 = 0$ est exclu moyennant (78). Ensuite on déduit de (15) que

$$\xi^{\frac{1}{2}} = -h(A_1 A_4 - A_2 A_3)\frac{\sin(h.\overline{u+v-u_0-v_0})}{[A_3\cos(h.\overline{u+v-u_0-v_0})+A_4]^2},$$
$$\eta^{\frac{1}{2}} = h(A_1 A_4 - A_2 A_3)\frac{\sin(h.\overline{u-v-u_0+v_0})}{[A_3\cos(h.\overline{u-v-u_0+v_0})+A_4]^2}.$$

En considérant v comme une constante, on voit de (79) et (81) que F est une fonction rationnelle de e^{ihu} dont les zéros et les pôles sont les mêmes comme pour la fonction

$$\frac{[A_3\cos(h.\overline{u+v-u_0-v_0})+A_4]^2\,[A_3\cos(h.\overline{u-v-u_0+v_0})+A_4]^2}{\sin^2(h.\overline{u-u_0})\sin^2(h.\overline{v-v_0})}. \qquad (*)$$

Il en résulte que le rapport ϱ entre F et (*) a la forme $r.e^{inhu}$, où les quantités r, n dépendent pas de u. Or en remplaçant u par $2u_0 - u$ on voit aisément que $n = 0$ de manière que ϱ ne dépend pas de u ni, par raison de symmétrie, de v de sorte que, A étant une constante,

$$U - V = F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A[\cot g^2(h.\overline{u-u_0}) - \cot g^2(h.\overline{v-v_0})].$$

Par conséquent le résultat définitif dans le cas 2·12 est donné par les formules (43) si l'on y pose $A_1 A_4 - A_2 A_3 = 0$; le cas $A_3 = 0$ est exclu.

32. Dans le cas 2·13 (v. N° 29) les équations (15) et (77) donnent, si l'on tient compte de ce qu'il est permis d'échanger u avec v,

$$\begin{aligned} x + k &= \frac{A_1 e^{h(u+v-u_0-v_0)} + A_2}{A_3 e^{h(u+v-u_0-v_0)} + A_4}, \\ -(y+k) &= \frac{A_1 e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_2}{A_3 e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_4}, \end{aligned} \qquad (82)$$

où $h, A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $h \neq 0$, $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Les deux cas $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ sont exclus moyennant (78). Ensuite on déduit de (15) que

$$\xi^{\frac{1}{2}} = h(A_1 A_4 - A_2 A_3)\frac{e^{h(u+v-u_0-v_0)}}{[A_3 e^{h(u+v-u_0-v_0)} + A_4]^2},$$
$$\eta^{\frac{1}{2}} = -h(A_1 A_4 - A_2 A_3)\frac{e^{h(u-v-u_0+v_0)}}{[A_3 e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_4]^2}.$$

Par la considération des pôles et des zéros on déduit de (79) et (82) qu'il existe deux constantes m et n telles que F ne diffère que par un facteur numérique de

$$[A_3 e^{h(u+v-u_0-v_0)} + A_4]^2\,[A_3 e^{h(u-v-u_0+v_0)} + A_4]^2\,[e^{2h(v-v_0)} - 1]^{-2}\,e^{h(mu+nv)}.$$

En remplaçant u par $2u_0 - u$, on voit que $m = -2$; en remplaçant

v par $2v_0 - v$, on voit que $n = 2$. Donc, A étant une constante,

$$U - V = F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = -A\left[e^{h(v-v_0)} - e^{-h(v-v_0)}\right]^{-2}.$$

Par conséquent, le résultat définitif dans le cas 2·13 est donné par les formules (46) si l'on y pose $A_1 A_4 - A_2 A_3 = 0$; les cas $A_1 A_2 A_3 A_4 = 0$ est exclu.

33. Dans le cas 2·14 (v. N° 29) les équations (15) et (77) donnent

$$\begin{aligned} x + k &= \frac{A_1(u+v-u_0-v_0)^2 + A_2}{A_3(u+v-u_0-v_0)^2 + A_4}, \\ -(y+k) &= \frac{A_1(u-v-u_0+v_0)^2 + A_2}{A_3(u-v-u_0+v_0)^2 + A_4}, \end{aligned} \tag{83}$$

où $A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Les cas $A_3 = 0$ est exclu moyennant (78). Ensuite on déduit de (15) que

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{2}} &= 2(A_1 A_4 - A_2 A_3)\frac{u+v-u_0-v_0}{[A_3(u+v-u_0-v_0)^2 + A_4]^2}, \\ \eta^{\frac{1}{2}} &= -2(A_1 A_4 - A_2 A_3)\frac{u-v-u_0+v_0}{[A_3(u-v-u_0+v_0)^2 + A_4]^2}. \end{aligned}$$

Par la considération des pôles et des zéros on déduit de (79) et (83) que F ne diffère que par un facteur numérique de la fonction

$$[A_3(u+v-u_0-v_0)^2 + A_4]^2\,[A_3(u-v-u_0+v_0)^2 + A_4]^2\,(u-u_0)^{-2}(v-v_0)^{-2}.$$

Donc, A étant une constante,

$$\begin{aligned} U - V &= F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = \\ &= -A(u+v-u_0-v_0)(u-v-u_0+v_0)(u-u_0)^{-2}(v-v_0)^{-2}. \end{aligned}$$

Par conséquent le résultat définitif dans le cas 2·14 est donné par les formules (49) si l'on y pose $A_1 A_4 - A_2 A_3 = 0$; le cas $A_1 A_3 = 0$ est exclu.

34. Dans le cas 2·15 (v. N° 29) les équations (15) et (77) donnent, si l'on tient compte de ce qu'il est permis d'échanger u avec v,

$$\begin{aligned} x + k &= \frac{A_1(u+v-u_0-v_0) + A_2}{A_3(u+v-u_0-v_0) + A_4}, \\ -(y+k) &= \frac{A_1(u-v-u_0+v_0) + A_2}{A_3(u-v-u_0+v_0) + A_4} \end{aligned} \tag{84}$$

où $A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$. Le cas $A_3 = 0$ est exclu moyennant (78). Ensuite on déduit de (15) que

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{2}} &= (A_1 A_4 - A_2 A_3)[A_3(u+v-u_0-v_0) + A_4]^{-2}, \\ \eta^{\frac{1}{2}} &= -(A_1 A_4 - A_2 A_3)[A_3(u-v-u_0+v_0) + A_4]^{-2}. \end{aligned}$$

Par la considération des pôles et des zéros on déduit de (79) et (84) que F ne diffère que par un facteur numérique de

$$[A_3(u+v-u_0-v_0)+A_4]^2\,[A_3(u-v-u_0+v_0)+A_4]^2\,(v-v_0)^{-2}.$$

Donc, A étant une constante

$$U-V=F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}=-A\,(v-v_0)^{-2}.$$

Par conséquent le résultat définitif dans le cas 2·15 est donné par les formules (52) si l'on y pose $A_1A_4-A_2A_3=0$; le cas $A_1A_3=0$ est exclu.

35. Passons au cas 2·2 (v. N° 27). De (17) et (76) on déduit actuellement, en introduisant des nouvelles constantes,

$$\xi=a_0x^2+a_1x+a_2,\quad \eta=a_0y^2+b_1y+b_2. \tag{85}$$

L'inégalité (14) prend donc la forme

$$4\,a_0a_2-a_1^2\neq 4\,a_0b_2-b_1^2. \tag{86}$$

D'après (19) et (26), F est actuellement une constante.

36. Nous distinguerons cinq cas. Cas 2·21: $a_0\neq 0$, $4\,a_0a_2-a_1^2\neq 0$, $4\,a_0b_2-b_1^2\neq 0$; cas 2·22: $a_0\neq 0$, $4\,a_0a_2-a_1^2\neq 0$, $4\,a_2b_2-b_1^2\neq 0$; cas 2·23: $a_0=0$, $a_1b_1\neq 0$; cas 2·24: $a_0=0$, $a_1\neq 0$, $b_1=0$, $b_2\neq 0$; cas 2·25: $a_0=0$, $a_1\neq 0$, $b_1=0$, $b_2=0$. Les autres cas se réduisent aux précédents en changeant le signe de v ou sont exclus moyennant (86). Remarquons tout de suite que le cas 2·25 est impossible car $\eta\neq 0$ d'après (12_2).

37. Dans le cas 2·21 on obtient des équations (15) et (85)

$$x=A_1\sin(h\,.\,\overline{u+v-u_0-v_0})+A_2,$$
$$y=A_3\sin(h\,.\,\overline{u-v-u_0-v_0})+A_4,$$

où h, A_1, A_2, A_3, A_4 sont des constantes telles que $hA_1A_3\neq 0$. Le cas $A_1^2=A_3^2$ est exclu moyennant (86). Ensuite on obtient de (15)

$$\xi^{\frac{1}{2}}=hA_1\cos(h\,.\,\overline{u+v-u_0-v_0}),$$
$$\eta^{\frac{1}{2}}=hA_3\cos(h\,.\,\overline{u-v-u_0+v_0}).$$

F étant une constante, il en résulte

$$U-V=F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}=A\,[\cos(2\,h\,.\,\overline{u-u_0})+\cos(2\,h\,.\,\overline{v-v_0})]:$$

Donc le résultat définitif dans le cas 2·21 est donné par les formules (60) si l'on y pose $A_1=0$; les deux cas $A_2A_3=0$, $A_2^2=A_3^2$ sont à exclure.

38. Dans le cas 2·22 (v. N° 36) on obtient des équations (15) et (85), si l'on tient compte de ce qu'il est permis d'échanger u avec v,

$$x=A_1\left[e^{h(u+v-u_0-v_0)}+e^{-h(u+v-u_0-v_0)}\right]+A_2,\quad y=e^{h(u-v-u_0+v_0)}+A_3,$$

où $h, A_1, A_2, A_3, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $h\neq 0$, $A_1\neq 0$.

Ensuite on obtient de (15)

$$\xi^{\frac{1}{2}} = h A_1 \left[e^{h(u+v-u_0-v_0)} - e^{-h(u+v-u_0-v_0)}\right], \quad \eta^{\frac{1}{2}} = h\, e^{h(u-v-u_0+v_0)}$$

d'où

$$U - V = F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A\left[e^{2h(u-u_0)} - e^{-2h(v-v_0)}\right].$$

Donc le résultat définitif dans le cas 2·22 est donné par les formules (63) si l'on y pose $A_1 = 0$; les cas $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ sont à exclure.

39. Dans le cas 2·23 (v. N° 36) on obtient des équations (15) et (85)

$$x = A_1(u + v - u_0 - v_0)^2 + A_2, \quad y = A_3(u - v - u_0 + v_0)^2 + A_4,$$

où $A_1, A_2, A_3, A_4, u_0, v_0$ sont des constantes telles que $A_1 A_3 = 0$. Le cas $A_1^2 = A_3^2$ est exclu moyennant (86). Ensuite on obtient de (15)

$$\xi^{\frac{1}{2}} = 2 A_1(u + v - u_0 - v_0), \quad \eta^{\frac{1}{2}} = 2 A_3(u - v - u_0 + v_0),$$

d'où

$$U - V = F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A\left[(u - u_0)^2 - (v - v_0)^2\right].$$

Donc le résultat définitif dans le cas 2·23 est donné par les formules (69) si l'on y pose $A_1 = 0$; les trois cas $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_1^2 = A_3^2$ sont exclus.

40. Dans le cas 2·24 (v. N° 36) on obtient des équations (15) et (85)

$$x = A_1(u + v - u_0 - v_0)^2 + A_2, \quad y = A_3(u - v - u_0 + v_0),$$

où A_1, A_2, A_3, u_0, v_0 sont des constantes telles que $A_1 A_3 \neq 0$. Ensuite on déduit de (15)

$$\xi^{\frac{1}{2}} = 2 A_1(u + v - u_0 - v_0), \quad \eta^{\frac{1}{2}} = A_3,$$

d'où

$$U - V = F\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} = A(u + v - u_0 - v_0).$$

Donc le résultat définitif dans le cas 2·24 est donné par les formules (72) si l'on y pose $A_1 = 0$; le cas $A_2 A_3 = 0$ est exclu.

41. En résumé, *les quantités β, γ, L, M de M. Fubini relatives à une surface non réglée qui possède précisément ∞^1 réseaux R dont un à invariants égaux sont données par les formules* (2) et (5); *les quantités φ, ψ, U, V qui y apparaissent sont données dans les différents cas par les formules ci-après:*

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{a p^2(u+v) + b p(u+v) + c}{p'(u+v)}, \\ \psi &= -\frac{a p^2(u-v) + b p(u-v) + c}{p'(u+v)}, \\ U &= A p(2u) + B, \quad V = A p(2v) + B) \end{aligned} \tag{I}$$

où p désigne la fonction elliptique de Weierstrass à périodes arbitraires;

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{a\cos^2(u+v) + b\cos(u+v) + c}{\sin(u+v)}, \\ \psi &= -\frac{a\cos^2(u-v) + b\cos(u-v) + c}{\sin(u-v)}, \\ U &= A\operatorname{cotg}^2 u + B, \quad V = A\operatorname{cotg}^2 v + B; \end{aligned} \tag{II}$$

$$\varphi = ae^{u+v} + b + ce^{-(u+v)},\ \psi = -ae^{u-v} - b - ce^{v-u}, \quad U = B,\ V = A(e^v - e^{-v})^{-2} + B; \tag{III}$$

$$\varphi = a(u+v)^2 + b + c(u+v)^{-2},\ \psi = -a(u-v)^2 - b - c(u-v)^{-2}, \quad U = Au^{-2} + B,\ V = Av^{-2} + B; \tag{IV}$$

$$\varphi = a(u+v) + b + c(u+v)^{-1},\ \psi = a(u-v) + b + c(u-v)^{-1}, \quad U = B,\ V = Av^{-2} + B; \tag{V}$$

$$\varphi = a\operatorname{tg}(u+v) + b\cos^{-1}(u+v),\ \psi = a\operatorname{tg}(u-v) + c\cos^{-1}(u-v), \quad U = A\cos 2u + B,\ V = -A\cos 2v + B; \tag{VI}$$

$$[e^{u+v} - e^{-(u+v)}]\varphi = a[e^{u+v} + e^{-(u+v)} + b,\ \psi = a + be^{v-u}, \quad U = Ae^{2u} + B,\ V = Ae^{-2v} + B; \tag{VII}$$

$$\varphi = a + e^{-(u+v)},\ \psi = a + e^{v-u},\ U = Ae^{2u} + B,\ V = B; \tag{VIII}$$

$$\varphi = a + b(u+v)^{-1},\ \psi = a + c(u-v)^{-1}, \quad U = Au^2 + B,\ V = -Av^2 + B; \tag{IX}$$

$$\varphi = a(u+v) + b(u+v)^{-1}\ \psi = 2a(u-v) + c, \quad U = Au + B,\ V = -Av + B. \tag{X}$$

Les a, b, c, A, B sont des constantes dont les trois premières sont soumises à certaines inégalités qui ont été indiquées au cours de la discussion.

SECONDE PARTIE.

42. *Condition analytique pour un réseau de M. Jonas.* Un réseau de M. Jonas sur une surface S est isotherme-conjugué*; on peut donc choisir les paramètres asymptotiques u, v de sorte que son équation ait la forme (1). Nous avons déjà rappelé que la condition pour que (1) soit effectivement un réseau de M. Jonas est donnée par $\beta_u = \gamma_v$. Nous allons rechercher tous les réseaux de M. Jonas sur une surface S donnée. Le plus général réseau isothermeconjugué est

$$U^{-\frac{1}{2}}\,du^2 = V^{-\frac{1}{2}}\,dv^2 \tag{87}$$

avec $U = U(u)$, $V = V(v)$, $UV \neq 0$. Introduisons des nouveaux paramètres asymptotiques

$$u_1 = \int U^{-\frac{1}{4}}\,du, \quad u_2 = \int V^{-\frac{1}{4}}\,dv.$$

L'élément linéaire projectif de S prend alors la forme

$$(\beta U^{\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{4}}\,du_1{}^3 + \gamma U^{-\frac{1}{4}} V^{\frac{1}{2}}\,dv_1{}^3) : 2\,du_1\,dv_1$$

* G. P. D. § 17 B.

et l'équation (87) devient $du_1^2 = dv_1^2$; on en conclut par un calcul facile que le réseau (87) est un réseau de M. Jonas si

$$U'\beta - V'\gamma + 2(U\beta_u - V\gamma_v) = 0. \tag{88}$$

43. *Les réseaux de M. Jonas sur une surface donnée.* Nous exclurons le cas élémentaire $\beta\gamma = 0$ d'une surface réglée. En introduisant une inconnue auxiliaire, nous pouvons remplacer l'équation (88) par le système

$$U_u = -2\frac{\beta_u}{\beta}U + \frac{2}{\beta}f, \quad U_v = 0, \quad V_u = 0, \quad V_v = -2\frac{\gamma_v}{\gamma}V + \frac{2}{\gamma}f.$$

Les conditions d'intégrabilité en sont

$$f_u = \gamma(\log\gamma)_{uv}V + (\log\gamma)_u f, \quad f_v = \beta(\log\beta)_{uv}U + (\log\beta)_v f \tag{*}$$

et la condition d'intégrabilité de (*) est

$$\beta^2\gamma U\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u\,\partial v}\right) - \beta\gamma^2 V\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2\log\gamma}{\partial u\,\partial v}\right) + 3f\frac{\partial^2\log(\beta:\gamma)}{\partial u\,\partial v} = 0. \tag{89}$$

On reconnait déjà que quatre cas sont possibles: 1° S ne contient aucun réseau de M. Jonas; 2° S contient précisément deux réseaux de M. Jonas; 3° S contient ∞^1 réseaux de M. Jonas; 4° S contient ∞^2 réseaux de M. Jonas. Le dernier cas se présente si et seulement si l'équation (89) est une identité, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial^2\log(\beta:\gamma)}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2\log\beta\gamma}{\partial u\,\partial v} + K\beta\gamma = 0,$$

où K est une constante. Or ces conditions caractérisent* les surfaces qui admettent ∞^3 déformations projectives ou, ce qui est la même chose, qui possèdent ∞^2 réseaux R. Nous les nommerons les *surfaces de M. Cartan.*

44. *Réseaux R sur les surfaces de M. Cartan.* Un tableau de quantités fondamentales d'une surface de M. Cartan se trouve dans G. P. D. § 69 G; dans ce tableau, $\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv$, $\varphi_3 = \beta\gamma(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3)$. D'après G. P. D. § 68 A, les réseaux R sur ces surfaces sont $\beta\chi_2\,du^2 - \gamma\chi_1\,dv^2 = 0$, où $\chi_1 = \bar\tau_1 - \tau_1$, $\chi_2 = \bar\tau_2 - \tau_2$; les τ_1, τ_2 sont indiquées dans le tableau et les $\bar\tau_1$, $\bar\tau_2$ s'en obtiennent en changeant les valeurs des constantes là désignées par e, f_1, f_2 (dans le cas $K = 0$) ou par A, B, C (pour $K \neq 0$). Donc: 1° Dans le cas $K = 0$, on a

$$\beta = U_0^{-\frac{1}{2}}V_0^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = U_0^{\frac{1}{2}}V_0^{-\frac{1}{2}}; \tag{90}$$

$$U_0 = au^3 + b_1u^2 + c_1u + d_1, \quad V_0 = av^3 + b_2v^2 + c_2v + d_2, \tag{91}$$

où $a, b_1, \ldots, d_2$ sont des constantes. Les réseaux R sont

$$(Au + B)V_0\,du^2 - (Av + C)U_0\,dv^2 = 0, \tag{92}$$

* Intr. § 29, p. 86.

A, B, C étant des constantes. 2° Dans le $K \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\beta &= 2^{\frac{1}{2}} |K|^{-\frac{1}{2}} (u-v)^{-1} U_0^{-\frac{1}{2}} V_0^{\frac{1}{2}},\\ \gamma &= \omega\, 2^{\frac{1}{2}} |K|^{-\frac{1}{2}} (u-v)^{-1} U_0^{\frac{1}{2}} V_0^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{93}$$

où $\omega = \pm 1 = \operatorname{sgn} K$ et les U_0, V_0 sont pour $K = -2$ des fonctions arbitraires respectivement de u et de v, tandis que pour $K \neq -2$

$$\begin{aligned} U_0 &= a\,u^6 + b\,u^5 + c\,u^4 + d\,u^3 + e\,u^2 + f\,u + g,\\ -\omega\, V_0 &= a\,v^6 + b\,v^5 + c\,v^4 + d\,v^3 + e\,v^2 + f\,v + g.\end{aligned} \tag{94}$$

Les réseaux R sont

$$(A\,u^2 + B\,u + C)\, V_0\, d\,u^2 + \omega\,(A\,v^2 + B\,v + C)\, U_0\, d\,v^2 = 0, \tag{95}$$

A, B, C étant des constantes.

45. *Réseaux de M. Jonas sur les surfaces de M. Cartan.* Ceci étant rappelé, nous allons rechercher les réseaux de M. Jonas sur les surfaces envisagées. Soit d'abord $K = 0$. Après la substitution (90), l'équation (88) peut se transformer facilement à la forme $(U : U_0)' = (V : V_0)'$. Les réseaux de M. Jonas cherchés sont donc d'après (87)

$$(A_1\, v + C_1)\, V_0\, d\,u^4 - (A_1\, u + B_1)\, U_0\, d\,v^4 = 0, \tag{96}$$

A_1, B_1, C_1 étant des constantes. Soit ensuite $K \neq 0$. L'équation (88), où on remplace les β, γ par leurs valeurs (93), peut être amenée à la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left[\frac{U}{U_0\,(u-v)} + \omega\,\frac{V}{V_0\,(u-v)}\right] = 0,$$

d'où

$$U : U_0 + \omega\, V : V_0 = (u-v)\, F; \quad F = F\,(u+v). \tag{*}$$

Moyennant l'opération $\dfrac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}$ on en déduit que $F'' = 0$, d'où $F = A_1\,(u+v) - B_1$. En substituant cette valeur de F dans l'équation (*) on trouve sans peine que les réseaux de M. Jonas cherchés sont [v. (87)]

$$(A_1 v^2 + B_1 v + C_1)\, \omega\, V_0\, d\,v^4 + (A_1 u^2 + B_1 u + C_1)\, U_0\, d\,u^4 = 0. \tag{97}$$

46. *Réseaux R à invariants égaux sur les surfaces de M. Cartan.* Nous allons compléter les résultats de la première partie (v. N° 3) en déterminant tous les réseaux R à invariants égaux ($=$ réseaux R de M. Jonas) situés sur une surface de M. Cartan. Soit d'abord $K = 0$. On doit comparer les équations (92) et (96) ce qui donne la condition

$$U_0 = h\,(A_1\, u + B_1)\,(A\, u + B)^2, \quad V_0 = h\,(A_1\, v + C_1)\,(A\, v + C)^2.$$

Il en résulte aisément que notre problème n'admet des solutions que dans les quatre cas suivants: 1° U_0, V_0 sont des polynomes cubiques ayant chacun une racine multiple, soit $U_0 = a\,(u - r_1)^2\,(u - s_1)$, $V_0 = a$

$(v - r_2)^2 (v - s_2)$. Il existe *un* réseau R à invariants égaux

$$(v - r_2)(v - s_2)\, d u^2 = (u - r_1)(u - s_1)\, d v^2.$$

2° U_0 et V_0 sont des polynomes quadratiques ayant chacun une racine double, soit $U_0 = b_1 (u - r_1)^2$, $V_0 = b_2 (v - r_2)^2$. Il existe *un* réseau R à invariants égaux

$$b_2 (v - r_2)\, d u^2 = b_1 (u - r_1)\, d v^2.$$

3° U_0 et V_0 sont des polynomes linéaires, donc $U_0 = c_1 u + d_1$, $V_0 = c_2 v + d_2$. Il existe *deux* réseaux R à invariants égaux

$$\sqrt{c_1}\,(c_2 v + d_2)\, d u^2 = \pm \sqrt{c_2}\,(c_1 u + d_1)\, d v^2.$$

4° $U_0 = d_1$ et $V_0 = d_2$ sont des constantes; il existe ∞^1 réseaux R à invariants égaux $d u^2 : d v^2 = \text{const.}$

Passons au cas $K \neq 0$. La comparaison de (95) et (97) donne la condition

$$U_0 = h (A u^2 + B u + C)^2 (A_1 u^2 + B_1 u + C_1),$$
$$-\omega V_0 = h (A v^2 + B v + C)^2 (A_1 v^2 + B_1 v + C_1).$$

Il en résulte en premier lieu que dans les cas où notre problème admet une solution les U_0, V_0 ont toujours (aussi pour $K = -2$) la forme (94). Avant d'aller plus loin, remarquons * que les paramètres u, v dans nos formules ne sont déterminés qu'à une substitution

$$\bar{u} = \frac{a_1 u + a_2}{a_3 u + a_4}, \quad \bar{v} = \frac{a_1 v + a_2}{a_3 v + a_4}$$

près. Il en résulte qu'il suffit de considérer les onze cas ci après où le symbole $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ a cette signification: a_0 est le degré du polynome U_0, a_1 est le nombre de ses racines simples, a_2 le nombre des racines doubles etc: 1° $\{5, 5\}$, 2° $\{4, 4\}$, 3° $\{4, 2, 1\}$, 4° $\{4, 0, 2\}$, 5° $\{3, 3\}$, 6° $\{3, 1, 1\}$, 7° $\{3, 0, 0, 1\}$, 8° $\{2, 2\}$, 9° $\{2, 0, 1\}$, 10° $\{1, 1\}$, 11° $\{0\}$. On voit tout de suite que dans les cas 1°, 2°, 5° aucune solution n'existe. Dans le cas 3° on peut poser $U_0 = c (u - r_1)^2 (u - r_2)(u - r_3)$; il existe *un* réseau R à invariants égaux: $(v - r_1)(v - r_2)(v - r_3)\, d u^2 = (u - r_1)(u - r_2)(u - r_3)\, d v^2$. Dans le cas 4° on peut poser $U_0 = c (u - r_1)^2 (u - r_2)^2$; il existe *trois* réseaux R à invariants égaux

$$\frac{d u^2}{(u - r_1)(u - r_2)} = \frac{d v^2}{(v - r_1)(v - r_2)}; \quad \frac{d u^2}{(u - r_1)^2 (u - r_2)} =$$
$$= \frac{d v^2}{(v - r_1)^2 (v - r_2)}; \quad \frac{d u^2}{(u - r_1)(u - r_2)^2} = \frac{d v^2}{(v - r_1)(v - r_2)^2}.$$

Dans le cas 6° on peut poser $U_0 = d (u - r_1)^2 (u - r_2)$; il existe *un* ré-

* G. P. D. § 69 F.

seau R à invariants égaux: $(v-r_1)(v-r_2)\,du^2=(u-r_1)(u-r_2)\,dv^2$. Dans le cas 7° on peut poser $U_0=d(u-r)^3$; il existe *un* réseau R à invariants égaux: $(v-r)^2\,du^2=(u-r)^2\,dv^2$. Dans le cas 8° on peut poser $U_0=e(u-r_1)(u-r_2)$; il existe *un* réseau R à invariants égaux: $(v-r_1)(v-r_2)\,du^2=(u-r_1)(u-r_2)\,dv^2$. Dans le cas 9° on peut poser $U_0-e(u-r)^2$; il existe *deux* réseaux R à invariants égaux

$$(v-r)\,du^2=(u-r)\,dv^2,\quad (v-r)^2\,du^2=(u-r)^2\,dv^2.$$

Dans le cas 10° on a $U_0=fu+g$; il existe *un* réseau R a invariants égaux: $(fv+g)\,du^2=(fu+g)\,dv^2$. Dans le cas 11° on a $U_0=g$; il existe *un* réseau R à invariants égaux: $du^2=dv^2$.

47. *Surfaces qui possèdent ∞^1 réseaux de M. Jonas.* La détermination *complète* de ces surfaces me semble difficile; or on peut résoudre aisément le cas particulier où l'on suppose qu'un de ces réseaux soit R; on peut alors choisir les u, v de manière que ce réseau distingué soit (1). On a alors les équations (2). En substituant les valeurs (2) dans l'équation (88) on obtient

$$(\varphi+\psi)\,U'-(\varphi-\psi)\,V'+2(\varphi'+\psi')(U-V)=0. \tag{98}$$

Il s'agit de trouver les valeurs de φ et ψ telles que l'équation (98) possède une solution telle que $U-V\neq 0$. Or ce problème a été résolu dans la première partie car l'équation (98) ne diffère de (6) que par le signe de ψ. Particulièrement intéressant est le cas des surfaces qui possèdent une famille ∞^1 de réseaux R et une famille ∞^1 de réseaux de M. Jonas, les deux familles ayant un réseau commun. D'après les résultats de la première partie, la recherche de ces surfaces peut être aisément effectuée ce que je laisse au lecteur.

48. Quant aux surfaces qui n'admettent que deux réseaux de M. Jonas, on reconnait aisément par les méthodes de M. Cartan qu'elles dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument.

A ce but, introduisons le repère normal de M. Cartan*. La surface S est donc donnée comme lieu du point A déterminé par le système complètement intégrable

$$\begin{aligned} dA&=\omega_{00}A+\omega_1A_1+\omega_2A_2,\\ dA_1&=\omega_{10}A+\omega_{11}A_1+\omega_{12}A_2+\omega_{13}A_3,\\ dA_2&=\omega_{20}A+\omega_{21}A_1+\omega_{22}A_2+\omega_{23}A_3,\\ dA_3&=\omega_{30}A+\omega_{31}A_1+\omega_{32}A_2+\omega_{33}A_3\end{aligned} \tag{99}$$

dont les coefficients ω_{rs} sont liés par le système de Pfaff

$$\begin{aligned}&\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{12}+\omega_{33}=0,\ \ \omega_3=0,\ \ \omega_{13}=\omega_2,\ \ \omega_{23}=\omega_1,\ \ \omega_{12}=\omega_1,\\ &\omega_{21}=\omega_2,\ \ \omega_{31}=\omega_{20},\ \ \omega_{32}=\omega_{10},\ \ \omega_{11}-\omega_{00}=2a\omega_1+b\omega_2,\\ &\omega_{22}-\omega_{00}=a\omega_1+2b\omega_2,\ \ \omega_{33}-\omega_{00}=3a\omega_1+3b\omega_2,\\ &\omega_{10}=\lambda\omega_1+\mu\omega_2,\ \ \omega_{20}=\nu\omega_1+\varrho\omega_2,\ \ \omega_{30}=\varrho\omega_1+\lambda\omega_2;\end{aligned} \tag{100}$$

---

* Intr. § 81.

les conditions d'intégrabilité du système (100) sont

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1,\ da + (1 - ab - \tfrac{4}{3}\mu - \tfrac{2}{3}\nu)\,\omega_2] = 0,\\
&[\omega_2,\ db + (1 - ab - \tfrac{2}{3}\mu - \tfrac{4}{3}\nu)\,\omega_1] = 0,\\
&[\omega_1 d\nu] + [\omega_2 d\varrho] + (2a\varrho - 3b\nu)\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 d\varrho] + [\omega_2 d\lambda] + 4(a\lambda - b\varrho)\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 d\lambda] + [\omega_2 d\mu] + (3a\mu - 2b\lambda)\,[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Les dérivées extérieures de formes de Pfaff ω_1, ω_2 sont

$$\omega'_1 = b\,[\omega_1\omega_2], \quad \omega'_2 = -a\,[\omega_1\omega_2]. \tag{102}$$

Le réseau de M. Jonas soit

$$u\,\omega_1{}^2 - v\,\omega_2{}^2 = 0. \tag{103}$$

Pour que (103) soit effectivement un réseau de M. Jonas, on doit exprimer: 1° que le réseau est isotherme conjugué; 2° que les invariants tangentiels* du réseau sont égaux. La première condition signifie qu'on peut choisir les deux quantités u, v** de manière que les formes de Pfaff $\sqrt{u}\,.\,\omega_1$, $\sqrt{v}\,.\,\omega_2$ soient des différentielles exactes. Ceci donne, d'après (101), que l' on a

$$du = u_1\omega_1 + 2ub\,\omega_2, \quad dv = 2va\,\omega_1 + v_2\omega_2. \tag{104}$$

La condition 2° peut*** s'exprimer en disant que la droite $[B_1 B_2]$ qui joint les deux transformés de Laplace du réseau engendre une congruence harmonique à la surface S. Or on a

$$B_1 = \sqrt{v}\,.\,A_1 + \sqrt{u}\,.\,A_2 + \lambda A$$

où λ doit être déterminé de la condition que le point dB appartient à la droite $[AB]$ si l'on différentie dans la direction $\sqrt{u}\,.\,\omega_1 + \sqrt{v}\,.\,\omega_2 = 0$. Or d'après (99) on trouve

$$
\begin{aligned}
dB = &\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{\sqrt{v}} + \sqrt{v}\,\omega_{11} + \sqrt{u}\,\omega_{21} + \lambda\,\omega_1\right) A_1 + \\
&+ \left(\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}} + \sqrt{v}\,\omega_{12} + \sqrt{u}\,\omega_{22} + \lambda\,\omega_2\right) A_2 + \\
&+ (\sqrt{v}\,\omega_{13} + \sqrt{u}\,\omega_{23})\,A_3 + (\ldots)\,A
\end{aligned}
$$

ce qui devient selon (100) et (104)

$$
\begin{aligned}
dB = &\left[\left(\frac{3}{2}a\sqrt{v} + \lambda\right)\omega_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{v_2}{\sqrt{v}} - \frac{1}{2}b\sqrt{v} + \sqrt{u}\right)\omega_2\right] A_1 + \\
&+ \left[\left(\frac{1}{2}\frac{u_1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2}a\sqrt{u} + \sqrt{v}\right)\omega_1 + \left(\frac{3}{2}b\sqrt{u} + \lambda\right)\omega_2\right] A_2 + \\
&+ (\sqrt{u}\,\omega_1 + \sqrt{v}\,\omega_2)\,A_3 + (\ldots)\,A.
\end{aligned}
$$

---

* ou ponctuels; cela revient au même d'après la condition 1°; v. G. P. D. § 17 B.

** qui ne sont déterminées qu'à un facteur commun près.

*** G. P. D., § 30 F.

On doit écrire que les coefficients de A_1 et A_2 dans dB deviennent proportionnels à $\sqrt{v}$, $\sqrt{u}$ si l'on pose $\omega_1:\omega_2 = -\sqrt{v}:\sqrt{u}$ ce qui donne

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{v}} + \frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{u}} - b\sqrt{u} - a\sqrt{v} + \frac{1}{4}u_1\frac{\sqrt{v}}{u} + \frac{1}{4}v_2\frac{\sqrt{u}}{v},$$

d'où

$$4uvB_1 = 4uv^{\frac{3}{2}}A_1 + 4u^{\frac{3}{2}}vA_2 +$$
$$+ (u_1v^{\frac{3}{2}} + v_2u^{\frac{3}{2}} + 2u^2v^{\frac{1}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}v^2 - 4auv^{\frac{3}{2}} - 4bu^{\frac{3}{2}}v)A.$$

L'expression de B_2 se déduit de celle de B_1 en changeant le signe de $\sqrt{v}$. Par suite la droite $[B_1B_2]$ coïncide avec $[C_1C_2]$ où

$$C_1 = 4A_1 + \left(\frac{u_1}{u} - 4a + \frac{2u}{v}\right)A,$$

$$C_2 = 4A_2 + \left(\frac{v_2}{v} - 4b + \frac{2v}{u}\right)A.$$

Nous devons écrire que la congruence $[C_1C_2]$ est harmonique à S. Or ceci est exprimé par le fait qu'il existe une fonction ϱ telle que la droite $[C_1C_2]$ coïncide avec la droite engendrée par le point $d\,(\varrho A)$ si l'on varie la rapport $\omega_1:\omega_2$)*; autrement dit, la fonction ϱ doit être telle que

$$d(\varrho A) = \tfrac{1}{4}\varrho(\omega_1C_1 + \omega_2C_2),$$

ce qui donne que la forme de Pfaff

$$\left(\frac{u_1}{u} + 2a + 2\frac{u}{v}\right)\omega_1 + \left(\frac{v_2}{v} + 2b + 2\frac{v}{u}\right)\omega_2 \tag{105}$$

doit être une différentielle exacte. Posons

$$du_1 = u_{11}\,\omega_1 + u_{12}\,\omega_2,\quad dv_2 = v_{21}\,\omega_1 + v_{22}\,\omega_2. \tag{106}$$

D'après $(101_{1,2})$ on peut poser

$$\begin{aligned} da &= a_1\,\omega_1 + (ab - 1 + \tfrac{4}{3}\mu + \tfrac{2}{3}\nu)\,\omega_2,\\ db &= (ab - 1 + \tfrac{2}{3}\mu + \tfrac{4}{3}\nu)\,\omega_1 + b_2\,\omega_2. \end{aligned} \tag{107}$$

En différentiant extérieurement les équations (104), on obtient d'après (102), (106) et (107)

$$\begin{aligned} u_{12} &= 3bu_1 + \tfrac{2}{3}(2\mu + 4\nu - 3)\,u,\\ v_{21} &= 3av_2 + \tfrac{2}{3}(4\mu + 2\nu - 3)\,v. \end{aligned} \tag{108}$$

La condition pour que (105) soit une différentielle exacte est d'après (102), (104), (106), (107) et (108)

$$(u_1 - au)\,v^3 = (v_2 - bv)\,u^3.$$

On peut donc poser

$$\frac{v}{u^2}(u_1 - au) = \frac{u}{v^2}(v_2 - bv) = w. \tag{109}$$

* G. P. D. § 25 A ou bien Intr. § 31.

Les équations (104) prennent alors la forme

$$\begin{aligned} du &= \left(au + \frac{u^2 w}{v}\right) \omega_1 + 2 bu \omega_2, \\ dv &= 2 av \omega_1 + \left(bv + \frac{v^2 w}{u}\right) \omega_2. \end{aligned} \tag{110}$$

En différentiant les équations (109) et en tenant compte de (104), (107) et (108) on obtient

$$dw = (w^2 + 2\mu - 1) \frac{u}{v} \omega_1 + (w^2 + 2\nu - 1) \frac{v}{u} \omega_2. \tag{111}$$

La recherche des réseaux de M. Jonas sur les surfaces non réglées revient donc* à l'intégration du système de Pfaff composé des équations (100), (110) et (111). Il y apparaissent, outre les quinze variables dont dépendent les formes de Pfaff ω_{rs} d'un repère général, autres neuf variables $a, b, \lambda, \mu, \nu, \varrho, u, v, w$. Il s'agit des solutions à deux dimensions de ce système qui laissent indépendantes les formes ω_1, ω_2; en outre, pour les solutions qui nous intéressent, on a $u\,v \neq 0$. Or les conditions d'intégrabilité de notre système de Pfaff sont données par les équations (101) et par l'équation

$$\frac{u}{v} [\omega_1 \, d\mu] + \frac{v}{u} [\omega_2 \, d\nu] - 3(\mu - \nu) w [\omega_1 \omega_2] = 0.$$

Ces équations ont la forme considerée à l'Intr., § 74 (9), pourvu qu'on y remplace Ω_1. Ω_2 par ω_1, ω_2 et les τ_s par da, db, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, $d\varrho$. Le déterminant D [Intr., § 74, (11)] est

$$\omega_1 \omega_2 (u^2 \omega_1{}^4 - v^2 \omega_2{}^4).$$

Pour les solutions qui nous intéressent, le déterminant D est différent de zéro. Donc *les réseaux de M. Jonas dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument.* Les *caractéristiques* (v. Intr. § 74 à la fin) de notre système de Pfaff sont les asymptotiques et les deux réseaux de M. Jonas.

---

* Cfr. Intr., § 83.