Eduard Čech

Dimense dokonale normálních prostorů

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (13) 42 (1932), 22 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501002

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XLII ČÍSLO 13.

Dimense dokonale normálních prostorů.

Podává
Eduard Čech.

Předloženo dne 5. února 1932.

Menger a Urysohn dokázali hlavní věty teorie dimense pro *kompaktní* prostory. Později především Hurewicz rozšířil teorii na obecnější *separabilní* prostory.*) Hlavní duvod, proč některé základní věty o dimensi platí pro separabilní prostory, je podle mého mínění v následující Hurewiczově větě: *Je-li A uzavřená část nejvýš n-rozměrného separabilního prostoru R, pak existují libovolně malá okolí množství A v prostoru R s nejvýš* $(n-1)$*-rozměrnou hranicí.* To mne vedlo k modifikaci definice dimense: beru totiž vyslovenou větu za rekurentní definici dimense. V separabilních prostorech tedy nový pojem dimense splývá s dosavadním. Užitečnost nové definice vyplývá z toho, že, jak v následujícím ukazuji, tři hlavní věty teorie dimense, totiž věta o dimensi části, věta součtová a věta o pokrytí (Zerlegungssatz) ve smyslu nové definice platí o mnohem obecnějších prostorech, které nazývám dokonale normální a které jsou obecnější než prostory metrické.

Abych učinil věc co nejpřístupnější českým čtenářům, předeslal jsem vlastnímu výkladu odvození všech (většinou známých) vět z elementární topologie, kterých v dalším užívám.

Hlavní výsledky tohoto článku byly (bez dukazu) uveřejněny v poznámce *Sur la théorie de la dimension* (C. R., nov. 1931).

I. Pomocné věty.[1])

1. Nechť R je dané množství. Nechť $\mathfrak{F}$ je nějaký systém částí množství R, zvolený tak, že platí následující čtyři axiomy. Pak množství R

*) Historické odkazy najdou se v Mengerově knize *Dimensionstheorie*, 1928.

[1]) Některé jednoduché a známé věci vyslovuji zde bez důkazu. Začátečník najde tyto důkazy v úvodní části I. mého článku *Množství ireducibilně souvislá mezi n body* (Časopis pro pěst. mat. a fys., 1932).

nazývá se *topologický prostor*, jeho prvky nazývají se *body* a ty jeho části, které náležejí do systému $\mathfrak{F}$, nazývají se *v R uzavřené*. Ony čtyři axiomy jsou:

1·1. Prázdné množství 0 a celý prostor R jsou v R uzavřená množství.

1·2. Je-li x libovolný bod z R, pak jednobodové množství (x) je v R uzavřené.

1·3. Součet $\sum_{i=1}^{n} A_i$ *konečného* počtu v R uzavřených množství je v R uzavřený.

1·4. Průřez *libovolného* (třeba i nekonečného) počtu v R uzavřených množství je v R uzavřený.

2. Množství $A \subset R$ nazývá se *v R otevřené*, když a jen když $R - A$ je v R uzavřené. Tedy:

2·1. 0 a R jsou v R otevřená množství.

2·2. Pro každý bod x z R množství $R - (x)$ je v R otevřené.

2·3. Průřez $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *konečného* počtu v R otevřených množství A_i je v R otevřený.

2·4. Součet *libovolného* počtu v R otevřených množství je v R otevřený.

3. Je-li S libovolná část topologického prostoru R, pak v S uzavřené (v S otevřené) množství definujeme jako průřez S s libovolným v R uzavřeným (v R otevřeným) množstvím. Podle této definice také S je topologický prostor.

3·1. Když $A \subset S \subset R$, když A jest uzavřené (otevřené) v S, když S jest uzavřené (otevřené) v R, pak A jest uzavřené (otevřené) v R.

4. Je-li $A \subset R$, pak ze všech v R uzavřených množství obsahujících A jedno je nejmenší; nazýváme je *uzavřený obal* množství A a značíme je $\overline{A}$.

4·1. Pro každé $A \subset R$ jest $\overline{A}$ uzavřené v R.

4·2. Pro každé $A \subset R$ jest $A \subset \overline{A} \subset R$.

4·3. Je-li $A \subset F \subset R$ a je-li F uzavřené v R, pak $\overline{A} \subset F$.

4·4. Je-li $A \subset B \subset R$, jest $\overline{A} \subset \overline{B}$.

4·5. Je-li $A_i \subset R$ pro $1 \leq i \leqq m$ (m konečné), jest $\overline{\sum_{1}^{m} A_i} = \sum_{1}^{m} \overline{A_i}$.

4·6. Je-li $A \subset R$, jest A tehdy a jen tehdy v R uzavřené, když $A = \overline{A}$.

5. Nechť $A \subset S \subset R$. Pak uzavřený obal množství A v prostoru S jest $\overline{A}\,S$. Tedy A jest uzavřené v S, když a jen když $A = \overline{A}\,S$.

6. Množství $A, B \subset R$ nazývají se *oddělená*,[2]) když 1° $A\,B = 0$; 2° obě množství A, B jsou uzavřená[3]) v $A + B$. Tato podmínka závisí pouze na prostoru $A + B$, nikoli na širším prostoru R, do kterého prostor $A + B$ je vnořen.

---

[2]) Ve článku citovaném sub [1]) bylo v témž smyslu užito rčení: součet A + B má oddělené sčítance.

[3]) Slovo *uzavřená* smí se zde nahraditi slovem *otevřená*.

6·1. Jsou-li A_i, B_j oddělená pro $1 \leqq i < h$, $1 < j < k$ (h, k konečná), také $\sum_{i=1}^{h} A_i$, $\sum_{j=1}^{k} B_j$ jsou oddělená.

6·2. Jsou-li A, B oddělená a je-li $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, také A_1, B_1 jsou oddělená.

7·1. Množství $A, B \subset R$ jsou uzavřená v $A + B$, když a jen když $A\overline{B} + \overline{A}B = AB$. *Dukaz.* 1°. Nechť A, B jsou uzavřená v $A + B$. Podle **5** jest $A = (A + B)\overline{A} = A\overline{A} + \overline{A}B = A + \overline{A}B$, tedy $\overline{A}B \subset A$, tedy $\overline{A}B \subset AB$; z téhož duvodu $A\overline{B} \subset AB$. Tedy $A\overline{B} + \overline{A}B \subset AB$, takže podle **4·2** $A\overline{B} + \overline{A}B = AB$. 2°. Nechť $A\overline{B} + \overline{A}B = AB$. Pak $\overline{A}B \subset AB \subset A$; také $\overline{A}A \subset A$; tedy $\overline{A}(A + B) \subset A$, takže $\overline{A}(A + B) = A$ podle **4·2**. Tedy A jest uzavřené v $A + B$ podle **5**; z téhož duvodu B jest uzavřené v $A + B$.

7·2. Množství $A, B \subset R$ jsou oddělená, když a jen když $A\overline{B} = \overline{A}B = 0$. *Dukaz.* 1°. Nechť $A\,B$ jsou oddělená; pak jest $AB = 0$ a množství A, B jsou uzavřená v $A + B$, tedy podle **7·1** $A\overline{B} + \overline{A}B = 0$, t. j. $A\overline{B} = \overline{A}B = 0$. 2°. Nechť $A\overline{B} = \overline{A}B = 0$. Podle **4·2** $AB = 0$; tedy podle **7·1** A, B jsou uzavřená v $A + B$.

8. Nechť množství U jest otevřené v topologickém prostoru R. Množství $\overline{U} - U$ nazývá se *hranice* množství U v prostoru R; budeme je značiti $H_R(U)$.

8·1. $U \,.\, H_R(U) = 0$.

8·2. $U + H_R(U) = \overline{U}$.

8·3. $H_R(U)$ jest uzavřené v R. *Dukaz.* $H_R(U) = \overline{U} \,.\, (R - U)$; $\overline{U}$ $(R - U)$ je v R uzavřené podle **4·1** (podle **3**); tedy podle **1·4**.

9·1. Nechť pro $1 < i \leqq m$ (m konečné) U_i jsou otevřená v R. Pak[4])

$$H_R\left(\sum_{i=1}^{m} U_i\right) \subset \sum_{i=1}^{m} H_R(U_i).$$

Důkaz. Levá strana má smysl, neboť $U = \sum_{i=1}^{m} U_i$ jest v R otevřené podle **2·4**. Je-li $H = H_R(U)$, jest $H = \overline{U} - U \subset \overline{U}$; tedy podle **4·5** $H \subset \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_i$. Avšak $U_i \subset U$ a $UH = 0$ podle **8·1**; tedy $U_i H = 0$, takže $H \subset \sum_{i=1}^{m} (\overline{U}_i - U_i) = \sum_{i=1}^{m} H_R(U_i)$.

9·2. Nechť U, V jsou otevřená v topologickém prostoru R. Nechť $W = U - \overline{V}$. Pak W jest otevřené v R a[5])

$$H_R(W) \subset H_R(U) + H_R(V).$$

Dukaz. $R - \overline{V}$ jest v R otevřené podle **4·1**, tedy také $W = U(R - \overline{V})$ podle **2·3** je v R otevřené. Podle **4·2** jest $R - \overline{V} \subset R - V$, tedy $W \subset R - V$,

[4]) V. K. Menger, *Dimensionstheorie*, str. 36, Additionssatz für Begrenzungen offener Mengen.

[5]) L. cit. sub. [4]), str. 36.

takže $\overline{W} \subset R - V$ podle **4·3**. Ježto $W \subset U$, podle **4·4** $\overline{W} \subset \overline{U}$. Jest $\overline{V} \times \times H_R(W) \subset \overline{V}.\overline{W} \subset \overline{V}(R-V) = H_R(V)$; $H_R(W) - \overline{V} \subset \overline{W} - \overline{V} \subset \overline{U} - \overline{V}$; tedy podle **8·1** $H_R(W) - \overline{V} \subset \overline{U} - \overline{V} - (U - \overline{V}) \subset \overline{U} - U = H_R(U)$; avšak $\overline{V}.H_R(W) + [H_R(W) - \overline{V}] = H_R(W)$, takže $H_R(W) \subset H_R(U) + + H_R(V)$.

10. Nechť pro $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ množství Q_ν, V_ν jsou otevřená v topologickém prostoru R. Nechť

$$S = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q_\nu}. \tag{1}$$

Nechť $T \subset S$; nechť

$$T \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu. \tag{2}$$

Nechť pro $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ jest

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1}, \quad V_\nu \subset Q_\nu. \tag{3}$$

Pak jest[6])

$$H_R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu\right) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(V_\nu) + M, \tag{4}$$

$$M = S \,.\, H_R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu\right); \quad M \subset S - T. \tag{5}$$

Dukaz. Označme H levou stranu relace (4). Podle (2) a **8·1** $TH = 0$, tedy $M = SH \subset S - T$. Zvolme bod p v $H - S$; stačí ukázati, že $(p) \subset H_R(V_\nu)$ při vhodném ν. Ježto $(p) \subset R - S$, podle (1) existuje index k takový, že $(p) \subset R - \overline{Q_k}$. Podle (3) pro $\nu > k$ jest $V_\nu \subset Q_k$, tedy podle **4·4**.

$$\overline{\sum_{\nu=k+1}^{\infty} V_\nu} \subset \overline{Q_k}, \text{ tedy } (p) \subset R - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} V_\nu.$$

Avšak podle **4·5**

$$(p) \subset H \subset \overline{\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu} = \overline{V_1} + \ldots + \overline{V_k} + \overline{\sum_{\nu=k+1}^{\infty} V_\nu} - \sum_{\nu=1}^{k} V_\nu + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} V_\nu,$$

tedy $(p) \subset \sum_{\nu=1}^{k} \overline{V_\nu}$, takže při vhodném ν jest $(p) \subset \overline{V_\nu}$. Podle **8·1** jest $(p) \subset$

$$H \subset R - \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu \subset R - V_\nu; \text{ tedy } (p) \subset \overline{V_\nu} - V_\nu = H_R(V_\nu).$$

11. Nechť $S \subset R$; nechť U jest otevřené v R. Pak

$$H_S(SU) \subset S \,.\, H_R(U).$$

Dukaz. SU jest (v. **3**) otevřené v S, takže levá strana má smysl. Podle **5** a podle definice hranice

$$H_S(SU) = S \,.\, \overline{SU} - SU \subset S \,.\, \overline{SU}.$$

Avšak podle **4·4** $SU \subset \overline{U}$, tedy

$$H_S(SU) \subset S\overline{U} - SU = S(\overline{U} - U) = S \,.\, H_R(U).$$

12. Topologický prostor R nazývá se *normální*,[7]) když má násle-

---

[6]) L. c. sub [4]), str. 37, Verallgemeinerter Additionssatz für Begrenzungen offener Mengen. Mengerova věta je nepodstatně odlišná od věty v textu.

[7]) V. P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen*, Math. Annalen, sv. 94, str. 265

dující vlastnost: Jsou-li A, B uzavřená v R a je-li $A\,B = 0$, existují v R otevřená U, V taková, že $U \supset A, V \supset B, U\,V = 0$.

12·1. Nechť R je normální prostor. Nechť A jest uzavřené v R; nechť U jest otevřené v R; nechť $A \subset U$. Pak existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Důkaz. Množství $A, R - U$ jsou v R uzavřená a jest $A\,(R - U) = 0$. Ježto R je normální, existují v R otevřená V, W taková, že $A \subset V, R - U \subset W, V\,W = 0$. Podle **4·2** $V \subset \overline{V}$. Ježto $V\,W = 0$, jest $V \subset R - W$; ježto $R - W$ jest v R uzavřené, podle **4·3** $\overline{V} \subset R - W$; avšak $R - U \subset W$, tedy $R - W \subset U$, takže $\overline{V} \subset U$.

13. Topologický prostor R nazývá se *úplně normální*,[8]) když má následující vlastnost: Jsou-li $A, B \subset R$ oddělená množství, existují v R otevřená U, V taková, že $U \supset A, V \supset B, U\,V = 0$.

13·1. Úplně normální prostor je normální.[9]) *Důkaz*. Jsou-li A, B uzavřená v R a je-li $A\,B = 0$, jsou A, B oddělená množství.

13·2. Nechť R jest úplně normální prostor; nechť $S \subset R$. Pak S jest úplně normální prostor.[10]) *Důkaz*. Nechť $A, B \subset S$ jsou oddělená množství. Pak existují v R otevřená U, V taková, že $U \supset A, V \supset B, U\,V = 0$. Množství $S\,U, S\,V$ jsou otevřená v S a jest $S\,U \supset A, S\,V \supset B, S\,U \,.\, S\,V = 0$.

13·3. Nechť R jest úplně normální prostor; nechť $S \subset R$. Nechť U_0 jest otevřené v S; nechť U jest otevřené v R; nechť $U_0 \subset U$. Pak existuje v R otevřené V takové, že

$$V \subset U,\; S\,V = U_0,\; S \,.\, H_R(V) = H_S(U_0).^{11})$$

Důkaz. Množství $U_0, S - \overline{U}_0$ jsou otevřená v S a jest $U_0\,(S - \overline{U}_0) = 0$; tedy $U_0, S - \overline{U}_0$ jsou oddělená množství. Ježto prostor R jest úplně normální, existují v R otevřená T, W taková, že $T \supset U_0, W \supset S - \overline{U}_0, T\,W = 0$. Ježto U_0 jest otevřené v S, existuje v R otevřené Q takové, že $U_0 = S\,Q$. Položme $V = Q\,T\,U$. Podle **2·3** V je v R otevřené. Ježto $U_0 \subset U, U_0 \subset T, U_0 = S\,Q$, jest $U_0 = S\,V$. Množství T, W jsou otevřená v R a jest $T\,W = 0$; tedy T, W jsou oddělená. Ježto $V \subset T, S - \overline{U}_0 \subset W$, podle **6·2** $V, S - \overline{U}_0$ jsou oddělená množství, takže podle **7·2** $\overline{V}\,(S - \overline{U}_0) = 0$, tedy $S\,\overline{V} \subset S\,\overline{U}_0$, takže, ježto $U_0 = S\,V$, jest $S\,\overline{V} - S\,V \subset S\,\overline{U}_0 - U_0$. Avšak $S\,\overline{V} - S\,V = S\,(\overline{V} - V) = S \,.\, H_R(V)$ a podle **5** $S\,\overline{U}_0 - U_0 = H_S(U_0)$. Tedy $S \,.\, H_R(V) \subset H_S(U_0)$. Avšak podle **11** $S \,.\, H_R(V) \supset H_S(U_0)$, takže $S \times H_R(V) = H_S(U_0)$.

14. Topologický prostor R nazveme *dokonale normální*,[12]) když má následující dvě vlastnosti: (α) R je normální; (β) je-li U otevřené v R, existují v R uzavřená F_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ taková, že $U = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$. Vlastnost

[8]) L. c. sub [7]), str. 265.
[9]) L. c. sub [7]), str. 265.
[10]) L. c. sub [7]), str. 284.
[11]) L. c. sub [4]), str. 36, Satz von den Relativbegrenzungen.

(β) dá se (v. **2**) vysloviti také takto: (β′) je-li F uzavřené v R, existují v R otevřená U_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) taková, že $F = \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$.

14·1. Dokonale normální prostor R jest úplně normální.[13])

Důkaz. Nechť $A, B \subset R$ jsou oddělená množství. Položme

$$P = \overline{A} - \overline{B},\ Q = \overline{B} - \overline{A}. \tag{1}$$

Podle **4·1** a **4·3** $\overline{P} \subset \overline{A}$, $\overline{Q} \subset \overline{B}$, tedy

$$P\overline{Q} = \overline{P}\,Q = 0. \tag{2}$$

Podle **4·2** $A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$; podle **7·2** $A\,\overline{B} = \overline{A}\,B = 0$, tedy

$$A \subset P,\ B \subset Q. \tag{3}$$

Ježto $R - \overline{B}$ jest otevřené v dokonale normálním R, existují v R uzavřená E_ν taková, že $R - \overline{B} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$. Klademe-li $F_\nu = \overline{A}\,.\,E_\nu$, jsou (**4·1** a **1·4**) F_ν uzavřená v R a jest

$$P = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu. \tag{4}$$

Stejně vidíme, že existují v R uzavřená Φ_ν taková, že

$$Q = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu. \tag{5}$$

V dalším užijeme opětovně normálnosti prostoru R. Množství F_1 jest uzavřené v R; množství $R - \overline{Q}$ jest otevřené v R; podle (2) a (4) jest $F_1 \subset R - \overline{Q}$. Tedy podle **12·1** existuje v R otevřené U_1 takové, že $F_1 \subset U_1$, $\overline{U}_1\,\overline{Q} = 0$. Množství Φ_1 jest uzavřené v R; množství $R - (\overline{U}_1 + \overline{P})$ jest (v. **1·3** a **3**) otevřené v R; podle (2), (5) a ježto $\overline{U}_1\,\overline{Q} = 0$, jest $\Phi_1 \subset R - (\overline{U}_1 + \overline{P})$. Tedy podle **12·1** existuje v R otevřené V_1 takové, že $\Phi_1 \subset V_1$, $\overline{V}_1\,(\overline{U}_1 + \overline{P}) = 0$. Předpokládejme obecně, že při určitém $n \geq 1$ byla sestrojena[14]) v R otevřená $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ taková, že

$$F_1 \subset U_1, \ldots, F_n \subset U_n,\ \Phi_1 \subset V_1, \ldots, \Phi_n \subset V_n, \tag{6_n}$$

$$\overline{U}_\nu\,\overline{Q} = \overline{V}_\nu\,\overline{P} = 0 \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq n, \tag{7_n}$$

$$\overline{U}_\mu\,.\,\overline{V}_\nu = 0 \text{ pro } 1 \leqq \mu \leqq n,\ 1 \leqq \nu \leqq n. \tag{8_n}$$

Množství F_{n+1} jest uzavřené v R; množství $R - \left(\sum_{\nu=1}^{n} \overline{V}_\nu + \overline{Q}\right)$ jest otevřené v R; podle (2), (4) a (7_n) jest $F_{n+1} \subset R - \left(\sum_{\nu=1}^{n} \overline{V}_\nu + \overline{Q}\right)$; tedy podle **12·1** existuje v R otevřené U_{n+1} takové, že $F_{n+1} \subset U_{n+1}$, $\overline{U}_{n+1}\,.\left(\sum_{\nu=1}^{n} \overline{V}_\nu + \overline{Q}\right) = 0$.

[12]) Tento pojem se vyskytuje (beze zvláštního označení) l. c. sub [7]), str. 286, pozn. pod čarou [41]). T. zv. *metrické* prostory (v. na př. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, kap. VI.) jsou dokonale normální (l. c., str. 117, III. a str. 163, důkaz věty XVIII).

[13]) L. c. sub [7]), str. 286, pozn. pod čarou [41]).

[14]) Pro $n = 1$ bylo to právě provedeno.

Množství Φ_{n+1} jest uzavřené v R; množství $R - \left(\sum_{\nu=1}^{n+1} \overline{U}_\nu + \overline{P}\right)$ jest otevřené v R; podle (2), (5) a (7_n) a ježto $\overline{U}_{n+1}\,\overline{Q} = 0$, jest $\Phi_{n+1} \subset R - \left(\sum_{\nu=1}^{n+1} \overline{U}_\nu + \overline{P}\right)$; tedy podle **12·1** existuje v R otevřené V_{n+1} takové, že

$$\Phi_{n+1} \subset V_{n+1}, \quad \overline{V}_{n+1} \,.\, \left(\sum_{\nu=1}^{n+1} \overline{U}_\nu + \overline{P}\right) = 0.$$

Tedy množství U_{n+1}, V_{n+1} mají vlastnosti (6_{n+1}), (7_{n+1}), (8_{n+1}). Tedy lze sestrojiti rekurentně posloupnosti U_ν, V_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) v R otevřených množství tak, že

$$F_\nu \subset U_\nu, \ \Phi_\nu \subset V_\nu \text{ pro } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6_∞}$$

$$\overline{U_\mu} \,.\, \overline{V_\nu} = 0 \text{ pro } \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{8_∞}$$

Položme

$$U = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu, \quad V = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu.$$

Podle **2·4** množství U, V jsou otevřená v R; podle (3), (4), (5), (6_∞) jest $A \subset U$, $B \subset V$; podle (8_∞) jest $U V = 0$.

14·2. Nechť R je dokonale normální prostor; nechť $S \subset R$. Pak S je dokonale normální. *Dukaz.* 1[0] R jest úplně normální podle **14·1**; tedy S jest úplně normální podle **13·2**; tedy S je normální podle **13·1**. 2[0] Nechť Q jest otevřené v S, takže existuje v R otevřené U takové, že $Q = S\,U$; podle **14** (β) existují v R uzavřená F_ν taková, že $U = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$. Množství $\Phi_\nu = S F_\nu$ jsou uzavřená v S a jest $Q = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu$.

14·3. Nechť R jest dokonale normální prostor; nechť S jest uzavřené v R. Pak existují v R otevřená Q_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) taková, že

$$S = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q}_\nu; \quad Q_{\nu+1} \subset Q_\nu. \tag{1}$$

Dukaz. Podle **14** (β') existují v R otevřená U_ν taková, že $S = \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. Podle **12·1** existují v R otevřená V_ν taková, že $S \subset V_\nu \subset \overline{V}_\nu \subset U_\nu$. Nechť $Q_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} V_i$ pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, takže podle **2·3** množství Q_ν jsou otevřená v R a $Q_{\nu+1} \subset Q_\nu$. Podle **4·2** a **4·4** jest $S \subset Q_\nu \subset \overline{Q}_\nu \subset U_\nu$, tedy

$$S \subset \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu \subset \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q}_\nu \subset \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu = S,$$

z čehož následuje (1).

II. Definice dimense.

15. Nechť R je topologický prostor; pravíme, že R je (-1)-*rozměrný* (nebo *nejvýš* (-1)-*rozměrný*) a píšeme $\dim R = -1$ (nebo $\dim R \leq -1$), když a jen když $R = 0$. Nechť při určitém $n = 0, 1, 2, \ldots$ byly již definovány nejvýš $(n-1)$-rozměrné topologické prostory. Nechť R je topologický prostor a nechť A jest uzavřené v R. Pravíme, že prostor R je *nejvýš n-rozměrný nad* A a píšeme $\dim_A R \leqq n$, když každému v R otevřenému $U \supset A$ lze přiřaditi v R otevřené V tak, že $A \subset V \subset U$ a že množství $H_R(V)$ je nejvýš $(n - 1)$-rozměrné. Pravíme, že prostor R je *nejvýš n-rozměrný* a píšeme $\dim R < n$, když $\dim_A R < n$ pro každé v R uzavřené A. Pravíme, že R jest *n-rozměrný* (event. *nad* A) a píšeme $\dim R = n$ ($\dim_A R = n$), když sice $\dim R \leqq n$ ($\dim_A R < n$), nikoli však $\dim R \leqq n - 1$ ($\dim_A R < n - 1$).

16·1. Nechť $A \subset S \subset R$. Nechť S jest uzavřené v R a nechť A jest uzavřené v S (tedy také v R podle **3·1**). Nechť $\dim_A R < n$. Pak $\dim_A S < n$.

16·2. Nechť $S \subset R$. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť $\dim R < n$. Pak $\dim S \leq n$.

Dukazy. Věta **16·2** je důsledkem věty **16·1** a je zřejmá pro $n = -1$. Tedy stačí odvoditi **16·1** pro dimensi n za předpokladu, že **16·2** platí pro dimensi $n - 1$. Nechť (za předpokladů věty **16·1**) $U_0 \supset A$ jest otevřené v S. Pak existuje v R otevřené U takové, že $U_0 = S\,U$, tedy $A \subset U$. Ježto $\dim_A R \leqq n$, existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset U$ a že $\dim H_R(V) < \leqq n - 1$. Položme $V_0 = S\,V$. Pak V_0 jest otevřené v S a $A \subset V_0 \subset U_0$. Mimo to podle **11** $H_S(V_0) \subset H_R(V)$ a množství $H_S(V_0)$ podle **8·3** jest uzavřené v S, tedy podle **3·1** také v R, tudíž i v $H_R(V)$. Ježto podle předpokladu **16·2** platí pro dimensi $n - 1$, jest $\dim H_S(V_0) \leq n - 1$. Tedy $\dim_A S \leqq n$.

17·1. Nechť $A \subset S \subset R$. Nechť S jest uzavřené v R; nechť A jest uzavřené v S (a podle **3·1** také v R). Nechť ke každému v R otevřenému $U \supset A$ existuje v R otevřené V tak, že $A \subset V \subset U$, $\dim S\,.\,H_R(V) \leqq n - 1$. Pak $\dim_A S \leqq n$.

Dukaz. Nechť $U_0 \supset A$ jest otevřené v S. Pak existuje v R otevřené U takové, že $U_0 = S\,U$. Tedy existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset U$, $\dim S\,H_R(V) \leqq n - 1$. Položme $V_0 = S\,V$. Pak V_0 jest otevřené v S, $A \subset V_0 \subset U_0$. Podle **11** $H_S(V_0) \subset S\,.\,H_R(V)$. Množství $H_S(V_0)$ podle **8·3** jest uzavřené v S, tedy podle **3·1** i v R, tudíž i v $S\,.\,H_R(V)$. Ježto $\dim S\,.\,H_R(V) \leqq n - 1$, podle **16·2** $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$. Tedy $\dim_A S \leqq n$.

17·2. Nechť R jest úplně normální prostor. Nechť $A \subset S \subset R$. Nechť S jest uzavřené v R; nechť A jest uzavřené v S (a podle **3·1** i v R). Nechť $\dim_A S \leqq n$. Nechť $U \supset A$ jest otevřené v R. Pak existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset U$, $\dim S\,.\,H_R(V) \leqq n - 1$.

Důkaz. Množství $U_0 = S\,U$ jest otevřené v S a $U_0 \supset A$. Ježto $\dim_A S \leqq n$, existuje v S otevřené V_0 takové, že $A \subset V_0 \subset U_0 \subset U$, $\dim H_S(V_0) \leq n - 1$. Podle **13·3** existuje v R otevřené V takové, že $V \subset U$, $S\,V = V_0$ (tedy $V \supset A$), $S\,.\,H_R(V) = H_S(V_0)$, tedy $\dim S\,.\,H_R(V) \leqq n - 1$.

18. Nechť R je topologický prostor. Nechť A, B jsou uzavřená v R; nechť $C \subset R$; nechť $A\,B = A\,C = B\,C = 0$. Nechť $R - C = P + Q$; P, Q oddělená; $P \supset A$; $Q \supset B$. Pak pravíme, že C *odděluje* A *od* B *v* R.

18·1. Nechť A, B jsou uzavřená v normálním prostoru R; nechť

$A\,B = 0$. Nechť $\dim_A R \leqq n$. Pak existuje v R uzavřené C takové, že $\dim C \leqq n - 1$ a že C odděluje A od B v R.

Důkaz. Množství $R - B$ jest otevřené v R a jest $A \subset R - B$. Podle **12·1** existuje v R otevřené U takové, že $A \subset U \subset \overline{U} \subset R - B$. Ježto $\dim_A R \leqq n$, existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. Položme $C = H_R(V)$. Pak $\dim C \leqq n - 1$ a podle **8·3** C jest uzavřené v R. Podle **8·1**, ježto $A \subset V$, jest $A\,C = 0$. Podle **4·4** a **8·2** $\overline{V} = V + C \subset \overline{U} \subset R - B$, tedy $B\,C = 0$. Mimo to $R - C = V + (R - \overline{V})$; $V \supset A$; $R - \overline{V} \supset B$. Množství V. $R - \overline{V}$ jsou v R otevřená a $V\,(R - \overline{V}) = 0$. Tedy V, $R - \overline{V}$ jsou oddělená, takže C odděluje A od B v R.

18·2. Nechť A jest uzavřené v normálním prostoru R. Nechť každému v R uzavřenému B takovému, že $A\,B = 0$, lze přiřaditi v R uzavřené C tak, že $\dim C \leqq n - 1$ a že C odděluje A od B v R. Pak $\dim_A R \leqq n$.

Důkaz. Nechť $U \supset A$ jest otevřené v R. Pak $B = R - U$ jest uzavřené v R a jest $A\,B = 0$. Tedy existuje v R uzavřené C a oddělená P, Q tak, že $\dim C \leqq n - 1$; $R - C = P + Q$; $P \supset A$, $Q \supset B$. Ježto P, Q jsou oddělená, jest: předně $P\,Q = 0$, tedy $P\,B = 0$, t. j. $P \subset U$; za druhé P jest otevřené v $P + Q$, t. j. v $R - C$, tedy podle **3·1** i v R; za třetí podle **7·2** $\overline{P}\,Q = 0$, tedy $\overline{P} \subset P + C$, takže $H_R(P) \subset C$, takže podle **8·3** a **16·2** $\dim H_R(P) \leqq n - 1$. Tedy každému v R otevřenému $U \supset A$ lze přiřaditi v R otevřené P tak, že $A \subset P \subset U$, $\dim H_R(P) \leqq n - 1$, takže $\dim_A R \leqq n$.

18·3. Nechť R jest úplně normální prostor. Nechť $A, B, C \subset R$; nechť C odděluje A od B v R. Pak existuje v R uzavřené $C^* \subset C$, které odděluje A od B v R.

Dukaz. Jest $R - C = P + Q$, kde P, Q jsou oddělená množství a $P \supset A$, $Q \supset B$. Ježto R jest úplně normální, existují v R otevřená U, V taková, že $U \supset P$, $V \supset Q$, $U\,V = 0$; tedy U, V jsou oddělená. Stačí položiti $C^* = R - (U + V)$.

18·4. Nechť A jest uzavřené v úplně normálním prostoru R. Nechť každému v R uzavřenému $B \subset R$ takovému, že $A\,B = 0$, lze přiřaditi $C \subset R$ tak, že $\dim C \leqq n - 1$ a že C odděluje A od B v R. Pak $\dim_A R \leqq n$.

Dukaz. Podle **13·1**, **16·2**, **18·2** a **18·3**.

III. Součtová věta.

19. Nechť R je dokonale normální prostor. Nechť množství S_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) jsou uzavřená v R a nejvýš n-rozměrná. Pak $\dim \sum_{i=1}^{\infty} S_i \leqq n$.

Tato součtová věta je triviální pro dimensi $n = -1$. Smíme tedy postupovati takto: při dukaze vět odstavce **20** užijeme součtové věty pro dimensi $n - 1$, načež v odstavci **21** provedeme dukaz součtové věty pro dimensi n opírajíce se jednak opět o součtovou větu pro dimensi $n - 1$, jednak o větu **20·3**.

20·1. Nechť R je dokonale normální prostor. Nechť S jest uzavřené v R; nechť A, B^* jsou uzavřená v S. Nechť existuje v S uzavřené C^* takové, že dim $C^* \leqq n - 1$ a že C^* odděluje A od B^* v S. Pro každé v R uzavřené F takové, že $SF = 0$, nechť $\dim_F R \leqq n$. Nechť B jest uzavřené v R; nechť $SB = B^*$. Pak existuje v R uzavřené C takové, že dim $C \leqq n - 1$ a že C odděluje A od B v R.

Dukaz. Ježto C^* odděluje A od B^* v S, existují oddělená množství P, Q taková, že $P \supset A$, $Q \supset B^*$, $S - C^* = P + Q$. Ježto P, Q jsou oddělená, jest: předně $PQ = 0$, tedy $PB^* = 0$, takže $PB = 0$, neboť $P \subset S$, $B^* = SB$; za druhé P jest otevřené v $P + Q = S - C^*$, tedy podle **3·1** i v S; za třetí podle **7·2** $\overline{P}Q = 0$ a podle **4·3** $\overline{P} \subset S$, tedy $\overline{P} \subset P + C^*$, $\overline{P}B = 0$. Položme $H = H_S(P) = \overline{P} - P$, takže $H \subset C^* \subset S$, $HB = 0$ a podle **16·2** dim $H \leqq n - 1$. H jest uzavřené v S, tedy v R podle **3·1**. Ježto $\overline{P}, B$ jsou uzavřená množství v normálním prostoru R a ježto $\overline{P} \,.\, B = 0$, existují v R otevřená U, T taková, že $U \supset \overline{P}$, $T \supset B$, $UT = 0$. Ježto U, T jsou otevřená v R a $UT = 0$, jsou U, T oddělená množství, tedy $\overline{U}T = 0$ podle **7·2**. Ježto $P \subset U$, $H = H_S(P)$, podle **13·3** a **14·1** existuje v R otevřené V takové, že $P = SV$, $V \subset U$, $S \,.\, K = H$, kde $K = H_R(V)$. Ježto $A \subset P \subset V \subset U$, $UT = 0$, $T \supset B$, jest $A \subset V$, $BV = 0$. Ježto $K \subset \overline{V} \subset \overline{U}$ (podle **4·4**) a ježto $\overline{U}T = 0$, $T \supset B$, jest $BK = 0$. Podle **8·3** K jest uzavřené v R, takže podle **14·3** existují v R otevřená Q_ν taková, že

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1}, \quad K = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q}_\nu.$$

Ježto $R - S$ jest otevřené v dokonale normálním prostoru R, existují v R uzavřená Φ_ν taková, že $R - S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu$. Klademe-li $F_\nu = K\Phi_\nu$, jsou F_ν uzavřená v R a jest

$$K - S = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu.$$

Ježto $F_\nu \subset K \subset R - B$, podle **12·1** existují v R otevřená Z_ν taková, že

$$F_\nu \subset Z_\nu \subset \overline{Z}_\nu \subset R - B.$$

Ježto $F_\nu \subset K - S$, jest $SF_\nu = 0$, tedy $\dim_{F_\nu} R \leqq n$. Avšak $F_\nu \subset Q_\nu Z_\nu$, takže existují v R otevřená W_ν taková, že

$$F_\nu \subset W_\nu \subset Q_\nu Z_\nu, \quad \dim H_R(W_\nu) \leqq n - 1.$$

Tedy $K - S \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu$, takže podle **10**, ježto $SK = H$,

$$H_R\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\Big) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + H.$$

Položme

$$X = V + \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu$$

a $C = H_R(X)$, takže podle **9·1**

$$C \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + H. \qquad (*)$$

Avšak množství H a $H_R(W_\nu)$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) jsou uzavřená v R a nejvýš $(n-1)$-rozměrná; ježto předpokládáme správnost součtové věty pro dimensi $n-1$, množství na pravo ve (*) je nejvýš $(n-1)$-rozměrné, takže podle **16·2** $\dim C \leqq n-1$, neboť C podle **8·3** jest uzavřené v R. Ježto $C = H_R(X)$, jest $R - C = X + (R - \overline{X})$. Množství $X, R - \overline{X}$ jsou otevřená v R a jest $X(R - \overline{X}) = 0$; tedy množství $X, R - \overline{X}$ jsou oddělená. Mimo to $A \subset V \subset X$. Dále jest $BV = 0$, $W_\nu \subset Z_\nu \subset R - B$, tedy $XB = 0$; konečně $H \subset K$, $BK = 0$, $H_R(W_\nu) \subset \overline{W}_\nu \subset \overline{Z}_\nu \subset R - B$, takže podle (*) také $CB = 0$, tedy $\overline{X}B = 0$, t. j. $B \subset R - \overline{X}$. Tedy v R uzavřené nejvýš $(n-1)$-rozměrné množství C odděluje A od B v R.

20·2. Nechť R je dokonale normální prostor. Nechť S jest uzavřené v R; nechť T je libovolná část R. Nechť A jest uzavřené v S. Nechť $\dim_A S \leqq n$; nechť $\dim T \leqq n$. Pak $\dim_A (S + T) \leqq n$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že $R = S + T$ (v. **14·2**). Nechť F jest uzavřené v R a nechť $SF = 0$, tedy $F \subset R - S \subset T$; nechť $U \supset F$ jest otevřené v R. Podle **12·1** existuje v R otevřené Z takové, že $F \subset Z \subset \overline{Z} \subset R - S \subset T$. Ježto $F \subset ZU \subset T$, ježto ZU jest otevřené v R, tedy v T a ježto $\dim T \leqq n$, existuje v T otevřené $V \subset ZU$, $V \supset F$ takové, že $\dim H_T(V) \leqq n - 1$. Ježto $V \subset Z \subset R - S \subset T$, V jest otevřené v $R - S$, tedy podle **3·1** také v R. Ježto $V \subset Z$, jest $\overline{V} \subset \overline{Z} \subset T$, takže $H_T(V) = \overline{V} - V = H_R(V)$. Tedy, když F jest uzavřené v R a když $SF = 0$, lze každému v R otevřenému $U \supset F$ přiřaditi v R otevřené V tak, že $F \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$; to znamená, že $\dim_F R \leqq n$. Ježto $\dim_A S \leqq n$, podle **18·1** (v. též **14·2**) každému v S uzavřenému B^* takovému, že $AB^* = 0$, lze přiřaditi v S uzavřené C^* tak, že $\dim C^* \leqq n - 1$ a že C odděluje A od B^* v S. Je-li nyní B libovolně dané v R uzavřené množství takové, že $AB = 0$, vidíme ze **20·1**, kladouce $B^* = SB$, že existuje v R uzavřené C takové, že $\dim C \leqq n - 1$ a že C odděluje A od B v R. Podle **18·2** je tedy $\dim_A R = \dim_A (S + T) \leqq n$.

20·3. Nechť R je dokonale normální prostor. Nechť S, T jsou uzavřená v R. Nechť $\dim S \leqq n$, $\dim T \leqq n$. Pak jest $\dim (S + T) \leqq n$.

Dukaz. Opět můžeme předpokládati, že $R = S + T$. Nechť A jest uzavřené v R; nechť $U \supset A$ jest otevřené v R; máme dokázati, že existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. Ježto AS jest uzavřené v S, ježto $\dim_{AS} S \leqq n$, $\dim T \leqq n$, podle **20·2** jest (jelikož $R = S + T$) $\dim_{AS} R \leqq n$. Tedy existuje v R otevřené V_1 takové, že $AS \subset V_1 \subset U$, $\dim H_R(V_1) \leqq n - 1$. Z duvodu symetrie existuje v R otevřené V_2 takové, že $AT \subset V_2 \subset U$, $\dim H_R(V_2) \leqq n - 1$. Položme $V = V_1 + V_2$. Pak V jest otevřené v R, $A = AS + AT \subset V \subset U$ a podle **9·1** jest

$$H_R(V) \subset H_R(V_1) + H_R(V_2). \qquad (*)$$

Nyní věta **20·3** je zřejmě zvláštním případem součtové věty; jelikož předpokládáme, že součtová věta platí pro dimensi $n-1$, také věta **20·3** platí pro dimensi $n-1$, takže podle **8·3** pravá strana relace (*) je nejvýš $(n-1)$-rozměrné množství. Tedy podle **16·2** $\dim H_R(V) \leqq n-1$.

21·1. Přistupme k důkazu součtové věty pro dimensi n. Množství $\sum_{i=1}^{k} S_i$ jsou podle **1·3** uzavřená v R; ze **20·3** vychází rekurentně $\dim \sum_{i=1}^{k} S_i \leqq n$; konečně $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k}^{\infty} \sum_{k=1}^{k} \sum_{i=1} S_i$. Tedy můžeme při dukaze množství S_k nahraditi množstvími $\sum_{i=1} S_i$; jinak řečeno, smíme předpokládati, že

$$S_k \subset S_{k+1} \text{ pro } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Bez újmy na obecnosti mužeme také předpokládati (v. **14·2**), že

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = R. \tag{2}$$

Zvolme v R uzavřené A a v R otevřené $Z \supset A$. Máme sestrojiti v R otevřené U_ω tak, aby bylo $A \subset U_\omega \subset Z$, $\dim H_R(U_\omega) \leqq n-1$. Podle **12·1** sestrojíme nejprve rekurentně v R otevřená Z_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ tak, že

$$A \subset Z_r \subset Z;\ Z_r \subset Z_{r+1} \text{ pro } r = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

21·2. Náš nejbližší cíl bude konstrukce v R otevřených U_r, V_r, T_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ takových, že pro $r - 1, 2, 3, \ldots$ jsou splněny následující relace (a_r) až (j_r):

$$\begin{aligned}
& A\,S_r \subset U_r \subset Z_r, && (a_r)\\
& U_{r-1} \subset U_r, && (b_r)\\
& \dim S_r\,.\,H_R(U_r) \leqq n-1, && (c_r)\\
& U_r - U_{r-1} \subset V_{r-1}, && (d_r)\\
& H_R(U_r) - S_{r-1} \subset V_{r-1}, && (e_r)\\
& H_R(U_{r-1}) - S_{r-1} \subset V_{r-1}, && (f_r)\\
& A \subset V_{r-1}, && (g_r)\\
& S_{r-1} - U_{r-1} \subset T_{r-1}, && (h_r)\\
& T_{r-2} \subset T_{r-1}, && (i_r)\\
& T_{r-1}\,V_{r-1} = 0. && (j_r)
\end{aligned}$$

Při tom

$$U_0 = 0,\ V_0 = R,\ S_0 = 0,\ T_0 = 0,\ T_{-1} = 0. \tag{4}$$

Tato konstrukce bude provedena ve **21·3—21·5**. Ve **21·3** sestrojíme v R otevřené U_1 tak, že bude platiti (a_1)—(j_1). Na to ve **21·4** za předpokladu, že při určitém k $(= 1, 2, 3, \ldots)$ byla již sestrojena v R otevřená U_r, V_s, T_s $(1 \leqq r \leqq k,\ 1 \leqq s \leqq k-1)$ tak, že platí (a_r) až (j_r) pro $1 \leqq r \leqq k$, sestrojíme v R otevřená V_k, T_k tak, že bude platiti (f_{k+1}) až (j_{k+1}). Konečně ve **21·5** za předpokladu, že při určitém k $(= 1, 2, 3, \ldots)$ byla již sestrojena v R otevřená U_r, V_r, T_r $(1 \leqq r \leqq k)$ tak, že platí (a_r) až (e_r), (f_s) až $(j_s$ pro $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k+1$, sestrojíme v R otevřené U_{k+1} tak, že bude platiti (a_{k+1}) až (e_{k+1}). Tím bude konstrukce dokončena.

21·3. Ježto $A\,S_1$ jest uzavřené v S_1, ježto $\dim S_1 \leqq n$ a ježto Z_1 jest otevřené v R a podle (3) jest $A\,S_1 \subset Z_1$, následuje ze **14·1** a **17·2**, že existuje v R otevřené U_1 takové, že $A\,S_1 \subset U_1 \subset Z_1$, $\dim S_1 \,.\, H_R(U_1) \leqq n - 1$. S ohledem na (4) vychází, že vlastnosti (a_1) až (j_1) jsou splněny.

21·4. Nechť při daném k $(= 1, 2, 3, \ldots)$ byla sestrojena v R otevřená U_r, V_s, T_s $(1 \leqq r \leqq k,\ 1 \leqq s \leqq k - 1)$ tak, že platí (a_r) až (j_r) pro $1 \leqq r \leqq k$. Ukažme nejprve, že každá z dvojic

$$A,\ S_k - U_k; \qquad (\alpha_k)$$
$$H_R(U_k) - S_k,\ S_k - \overline{U}_k; \qquad (\beta_k)$$
$$A,\ T_{k-1}; \qquad (\gamma_k)$$
$$H_R(U_k) - S_k,\ T_{k-1} \qquad (\delta_k)$$

skládá se ze dvou oddělených množství. Množství $S_k - U_k = S_k\,(R - U_k)$ jest v R uzavřené podle **1·4** a podle **4·2** jest $S_k - U_k \supset S_k - \overline{U}_k$; tedy podle **4·2**, **4·3**, **4·6** a (a_k)

$$\overline{A}\,(S_k - \overline{U}_k) = A\,(S_k - \overline{U}_k) \subset A\,.\,\overline{S_k - \overline{U}_k} \subset A\,(S_k - U_k) =$$
$$= A\,S_k - U_k = 0,$$

takže množství (α_k) jsou oddělená podle **7·2**. Dále jest podle **4·3**

$$\overline{H_R(U_k - S_k}\,.\,(S_k - \overline{U}_k) \subset H_R(U_k)\,(S_k - \overline{U_k}) \subset \overline{U}_k\,(S_k - \overline{U_k}) - 0,$$
$$(H_R(U_k) - S_k)\,.\,\overline{S_k - \overline{U}_k} \subset (H_R(U_k) - S_k)\,.\,S_k = 0,$$

takže množství (β_k) jsou oddělená. Množství V_{k-1}, T_{k-1} jsou otevřená v R, takže podle (j_k) jsou oddělená. Tedy podle **6·2** a (g_k) množství (γ_k) jsou oddělená, a ježto $H_R(U_k) - S_k \subset H_R(U_k) - S_{k-1}$ podle (1) [v případě $k = 1$ podle (4)], podle **6·2** a (e_k) také množství (δ_k) jsou oddělená. Podle **6·1** tedy množství

$$A + [H_R(U_k) - S_k],\ (S_k - \overline{U}_k) + T_{k\ 1}$$

jsou oddělená, takže podle **14·1** existují v R otevřená V_k a T_k taková, že platí (f_{k+1}) až (j_{k+1}).

21·5. Nechť při daném k $(= 1, 2, 3, \ldots)$ byla sestrojena v R otevřená U_r, V_r, T_r $(1 < r \leq k)$ tak, že platí (a_r) až (e_r), (f_s) až (j_s) pro $1 \leq r \leq k$, $1 \leqq s \leqq k + 1$. Podle **14·3** existují v R otevřená Q_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ taková, že

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1} \text{ pro } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (5)$$

$$[A + H_R(U_k)]\,.\,S_{k+1} = \prod_{\nu\ 1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu\ 1}^{\infty} \overline{Q_\nu}\,. \qquad (6)$$

Ježto S_k jest uzavřené v dokonale normálním R, existují v R uzavřená Φ_ν $(\nu - 1, 2, 3, \ldots)$ taková, že $R - S_k = \sum_{\nu\ 1}^{\infty} \Phi_\nu$. Klademe-li $F_\nu -$ $= [A + H_R(U_k)]\,.\,S_{k+1}\,\Phi_\nu$, jsou F_ν uzavřená v R a jest

$$[A + H_R(U_k)]\,.\,S_{k+1} - S_k = \sum_{\nu\ 1}^{\infty} F_\nu\,. \qquad (7)$$

Podle (7) $F_\nu \subset A + [H_R(U_k) - S_k]$, takže podle (f_{k+1}) a (g_{k+1}) jest $F_\nu \subset V_k$. Tedy podle **12·1** existují v R otevřená P_ν taková, že

$$P_\nu \subset V_k \qquad (8)$$

a že $F_\nu \subset P_\nu$. Podle (6) a (7) jest $F_\nu \subset Q_\nu$. Podle (3) jest $A \subset \overline{Z_k} \subset Z_{k+1}$; podle ($a_k$) jest $H_R(U_k) \subset \overline{U_k} \subset \overline{Z_k}$; podle (7) jest $F_\nu \subset A + H_R(U_k)$; tedy $F_\nu \subset Z_{k+1}$. Podle (7) jest $F_\nu \subset R - S_k$. Tedy celkem $F_\nu \subset P_\nu Q_\nu Z_{k+1} (R - S_k)$. Pravá strana jest otevřená v R; F_ν jest podle (7) uzavřené v S_{k+1}; S_{k+1} jest uzavřené v R a nejvýš n-rozměrné; tedy podle **14·1** a **17·2** existují v R otevřená W_ν taková, že

$$F_\nu \subset W_\nu \text{ pro } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

$$W_\nu \subset P_\nu Q_\nu Z_{k+1} - S_k \text{ pro } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

$$\dim S_{k+1} . H_R(W_\nu) < n - 1 \text{ pro } \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Podle (5), (6), (7), (9) a (10) předpoklady věty **10** jsou splněny, když místo S, T, Q_ν, V_ν dáme (6), (7), Q_ν, W_ν. Tedy

$$H_R\left(\sum_{\nu\,1}^{\infty} W_\nu\right) \subset \sum_{\nu\,1}^{\infty} H_R(W_\nu) + S_k . [A + H_R(U_k)]. \tag{12}$$

Položme

$$U_{k+1} = U_k + \sum_{\nu\,1}^{\infty} W_\nu, \tag{13}$$

takže podle **2·4** U_{k+1} jest otevřené v R.

Podle (a_k) jest $A\,S_k \subset U_k$; podle (7) a (9) jest $A\,S_{k+1} - S_k \subset \sum_{\nu\,1}^{\infty} W_\nu$; tedy podle (13) jest $A\,S_{k+1} \subset U_{k+1}$; podle ($a_k$) jest $U_k \subset Z_k$; podle (3) jest $Z_k \subset Z_{k+1}$; podle (10) jest $W_\nu \subset Z_{k+1}$; tedy podle (13) jest $U_{k+1} \subset Z_{k+1}$; tedy podmínka (a_{k+1}) je splněna. Podle (13) platí (b_{k+1}). Podle **8·1** a (13) jest $U_k \times \times H_R(U_{k+1}) = 0$; podle ($a_k$) jest $A\,S_k \subset U_k$; tedy $A\,S_k . H_R(U_{k+1}) = 0$, takže podle (12), (13) a **9·1** jest

$$H_R(U_{k+1}) \subset H_R(U_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu). \tag{14}$$

Podle (7), (9), (13) a **8·1** jest $H_R(U_{k+1}) . [S_{k+1} . H_R(U_k) - S_k] = 0$, takže podle (14)

$$S_{k+1} . H_R(U_{k+1}) \subset S_k . H_R(U_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{k+1} . H_R(W_\nu). \tag{15}$$

Jelikož předpokládáme platnost součtové věty pro dimensi $n - 1$, z (c_k), (11) a (15) podle **16·2** následuje (c_{k+1}). Podle (8) a (10) $W_\nu \subset V_k$, takže podle (13) platí (d_{k+1}). Podle (8) a (10) $H_R(W_\nu) \subset \overline{W_\nu} \subset \overline{P_\nu} \subset V_k$; podle ($f_{k+1}$) $H_R(U_k) - S_k \subset V_k$; tedy podle (14) platí (e_{k+1}).

21·6. Konstrukce v R otevřených U_r, V_r, T_r takových, že pro $r = 1, 2, 3, \ldots$ platí (a_r) až (j_r) je dokončena. Přistupme k vlastnímu cíli, totiž (v. **21·1**) ke konstrukci v R otevřeného U_ω takového, že

$$A \subset U_\omega \subset Z, \tag{16}$$

$$\dim H_R(U_\omega) \leqq n - 1. \tag{17}$$

Položme

$$U_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} U_r,$$

takže U_ω podle **2·4** jest otevřené v R. Podle (3) a (a_r) jest $U_\omega \subset Z$; podle

(2) a (a_r) jest $A \subset U_\omega$; tedy podmínka (16) je splněna. Zvolme $k = 1, 2, 3, \dots$ Podle (b_r) a (d_r) jest

$$U_\omega \subset U_k + \sum_{r=k}^{\infty} V_r. \tag{18}$$

Podle (i_r) a (j_r) pro $r \geq k$ jest $V_r T_k = 0$; tedy $T_k \,.\, \sum_{r=k}^{\infty} V_r = 0$; ježto množství T_k a $\sum_{r=k}^{\infty} V_r$ jsou otevřená v R, následuje, že jsou oddělená, takže podle **7·2**

$$T_k \,.\, \overline{\sum_{r=k}^{\infty} V_r} = 0.$$

Avšak podle (18), **4·4** a **4·5** jest

$$H_R(U_\omega) \subset \overline{U}_\omega \subset \overline{U}_k + \overline{\sum_{r=k}^{\infty} V_r},$$

takže

$$T_k \,.\, H_R(U_\omega) \subset \overline{U}_k.$$

Tedy podle (h_{k+1}) $(S_k - \overline{U}_k)\, H_R(U_\omega) \subset \overline{U}_k$, t. j. $(S_k - \overline{U}_k)\, H_R(U_\omega) = 0$, tedy $S_k \,.\, H_R(U_\omega) \subset \overline{U}_k$. Avšak $U_k \subset U_\omega \subset R - H_R(U_\omega)$; $\overline{U}_k - U_k = H_R(U_k)$; tedy $S_k \,.\, H_R(U_\omega) \subset S_k \,.\, H_R(U_k)$. Tedy podle (2)

$$H_R(U_\omega) \subset \sum_{k=1}^{\infty} S_k \,.\, H_R(U_k). \tag{19}$$

Jelikož předpokládáme platnost součtové věty pro dimensi $n - 1$, z (19) a (c_r) podle **16·2** následuje (17).

IV. **Důsledky součtové věty.**

22. Nechť R je dokonale normální prostor; nechť $\dim R \leqq n$. Nechť A je libovolná část R. Nechť $U \supset A$ jest otevřené v R. Pak existuje v R otevřené V takové, že

$$A \subset V \subset U,\ H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2,$$

$$\dim \Phi_1 \leqq n - 1,\ \Phi_2 = \overline{A} \,.\, H_R(V) = (\overline{A} - A) \,.\, H_R(V).$$

Dukaz. Ježto U jest otevřené v dokonale normálním R, existují v R uzavřená E_ν taková, že $U = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$. Klademe-li $F_\nu = \overline{A} \,.\, E_\nu$, jsou F_ν uzavřená v R a jest

$$\overline{A} \,.\, U = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu. \tag{1}$$

Podle **14·3** existují v R otevřená Q_ν taková, že

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1}, \tag{2}$$

$$\overline{A} = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q}_\nu. \tag{3}$$

Podle (1) a (3) jest $F_\nu \subset U Q_\nu$; ježto $\dim R \leqq n$, existují v R otevřená W_ν taková, že

$$F_\nu \subset W_\nu \subset U Q_\nu, \tag{4}$$

$$\dim H_R(W_\nu) \leqq n - 1. \tag{5}$$

Podle **10** jest
$$H_R\Big(\sum_{\nu\;1}^{\infty} W_\nu\Big) \subset \sum_{\nu\;1}^{\infty} H_R(W_\nu) + (\overline{A} - U). \tag{6}$$
Položme
$$V = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\,; \quad \Phi_1 = H_R(V) \,.\, \sum_{\nu\;1}^{\infty} H_R(W_\nu), \quad \Phi_2 = \overline{A} \,.\, H_R(V).$$
Pak V jest otevřené v R; ježto $A \subset U$, podle (1) a (4) jest $A \subset \overline{A} \,.\, U \subset V$; tedy $A \,.\, H_R(V) = 0$, takže $\Phi_2 = (\overline{A} - A) \,.\, H_R(V)$; podle (6) jest $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$; podle (5), **19** a **16·2** jest dim $\Phi_1 \leqq n - 1$.

23. Nechť R je dokonale normální prostor; nechť dim $R \leqq n$. Nechť S je libovolná část R. Pak dim $S \leqq n$.

Dukaz. Pro $n = -1$ triviální; nechť tedy věta platí pro dimensi $n - 1$. Nechť A jest uzavřené v S; nechť $U_0 \supset A$ jest otevřené v S, takže existuje v R otevřené U takové, že $U_0 = S\,U$, tedy $U \supset A$. Podle **22** existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset U$, $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$, dim $\Phi_1 \leqq n - 1$, $\Phi_2 \subset \overline{A} - A$. Klademe-li $V_0 = S\,V$, jest V_0 otevřené v S a $A \subset V_0 \subset U_0$. Podle **5** jest $A = S\,\overline{A}$, tedy $S\,(\overline{A} - A) - 0$, tedy $S\,\Phi_2 = 0$, tedy $S \,.\, H_R(V) \subset \Phi_1$, takže $H_S(V_0) \subset \Phi_1$ podle **11**. Tedy podle indukčního předpokladu a podle **14·2** dim $H_S(V_0) \leqq n - 1$. Tedy dim $S \leqq n$.

24·1. Nechť R je dokonale normální prostor; nechť dim $R \leq n$. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť U_0 jest otevřené v S; nechť $U \supset U_0$ jest otevřené v R. Nechť dim $H_S(U_0) < n - 1$. Pak existuje v R otevřené V takové, že $U_0 \subset V \subset U$, $S\,V = U_0$, $S \,.\, H_R(V) \quad H_S(U_0)$, dim $H_R(V) <$ $\leqq n - 1$.

Dukaz. Podle **13·3** a **14·1** existuje v R otevřené W takové, že $S\,W - U_0$, $U_0 \subset W \subset U$, $S \,.\, H_R(W) = H_S(U_0)$. Podle věty **22**, do které za A, U dosadíme U_0, W, existuje v R otevřené V takové, že $U_0 \subset V \subset W \subset U$, tedy $S\,V = U_0$, $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$, dim $\Phi_1 \leqq n - 1$, $\Phi_2 = \overline{U}_0 \,.\, H_R(V) = (\overline{U}_0 - U_0) \,.\, H_R(V)$. Tedy Φ_2 jest uzavřené v R. Jest $H_R(V) \subset \overline{V} \subset \overline{W}$; ježto $S\,W = U_0 \subset V \subset R - H_R(V)$, jest $S \,.\, H_R(V) \subset S\,\overline{W} - S\,W = S\,(\overline{W} - W) = S \,.\, H_R(W) = H_S(U_0)$; ježto $U_0 = S\,V$, podle **11** je také $H_S(U_0) \subset S \,.\, H_R(V)$. Tedy $S \,.\, H_R(V) - H_S(U_0)$. Podle **4·3** jest $\overline{U}_0 \subset S$, tedy podle **5** $H_S(U_0) = S \,.\, \overline{U}_0 - U_0 - \overline{U}_0 - U_0$, takže $\Phi_2 - (\overline{U}_0 - U_0)\,H_R(V) = H_S(U_0)$, tedy dim $\Phi_2 \leq n - 1$. Avšak Φ_2 jest uzavřené v R; ježto R je dokonale normální, existují v R uzavřená F_ν taková, že $R - \Phi_2 = \sum_{\nu\;1}^{\infty} F_\nu$; tedy $H_R(V) = \Phi_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \,.\, H_R(V)$. Ježto $F_\nu \,.\, H_R(V) \subset H_R(V) - \Phi_2 \subset \Phi_1$, podle **23** (nebo také podle **16·2**) dim $F_\nu \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$. Ježto také dim $\Phi_2 \leqq n - 1$, podle součtové věty dim $H_R(V) \leqq n - 1$.

24·2. Nechť R je dokonale normální prostor. Nechť $S_1, S_2, \ldots,$ S_k jsou uzavřená v R. Nechť $R \quad S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k$. Nechť U_0 jest otevřené v S_k. Nechť $U \supset U_0$ jest otevřené v R. Nechť dim $S_\nu < n_\nu$ pro $1 \leqq \nu < k$. Nechť dim $H_{S_k}(U_0) \leqq n_k - 1$. Pak existuje v R otevřené V takové, že $U_0 \subset V \subset U$, $S_k \,.\, V - U_0$, $S_k \,.\, H_R(V) = H_{S_k}(U_0)$, dim $S_\nu \,.\, H_R(V) \leq n_\nu - 1$ pro $1 \leq \nu \leq k$.

Důkaz. Pro $k = 1$ zřejmé. Nechť tedy věta platí pro $k - 1$. Tedy (v. **14·2**) existuje v S_2 otevřené V_0 takové, že $U_0 \subset V_0 \subset S_2 U$, $S_k . V_0 = U_0$, $S_k . H_{S_2}(V_0) = H_{S_k}(U_0)$, dim $S_\nu . H_{S_2}(V_0) \leqq n_\nu - 1$ pro $2 \leqq \nu \leqq k$. Podle věty **24·1**, do které za n, S, U_0, U dosadíme n_1, S_2, V_0, U, existuje v R otevřené V takové, že $U_0 \subset V_0 \subset V \subset U$, $S_2 V = V_0$, tedy $S_k V = U_0$, $S_2 . H_R(V) = H_{S_2}(V_0)$, dim $H_R(V) \leqq n_1 - 1$. Ježto $S_k \subset S_2$, jest $S_k . H_R(V) = S_k . H_{S_2}(V_0) = H_{S_k}(U_0)$. Ježto $S_1 = R$, relace dim $S_\nu . H_R(V) \leqq n_\nu - 1$ platí pro $\nu = 1$. Pro $2 \leq \nu < k$ jest $S_\nu \subset S_2$, tedy $S_\nu . H_R(V) = S_\nu . H_{S_2}(V_0)$, takže opět dim $S_\nu . H_R(V) < n_\nu - 1$.

V. Věta o pokrytí.

25·1. Nechť R je normální prostor. Nechť $U_1, \dots, U_m$ jsou otevřená v R; nechť $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Pak existuje v R otevřené V_1 takové, že $\overline{V_1} \subset U_1$ a že $V_1 + \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu = R$.

Dukaz.[15]) Množství $R - \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu$ jest uzavřené v R a je částí U_1. Tedy podle **12·1** existuje v R otevřené V_1 takové, že

$$R - \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1;$$

zřejmě $V_1 + \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu = R$.

25·2. Nechť R je normální prostor. Nechť $U_1, \dots, U_m$ jsou otevřená v R; nechť $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Pak existují v R otevřená $V_1, \dots, V_m$ taková, že $\overline{V_1} \subset U_1, \dots, \overline{V_m} \subset U_m$, $\sum_{\nu=1}^{m} V_\nu = R$.

Dukaz.[15]) Podle **25·1** určíme v R otevřené V_1 tak, že $\overline{V_1} \subset U_1$, $V_1 + U_2 + \dots + U_m = R$. Opět podle **25·1** určíme v R otevřené V_2 tak, že $\overline{V_2} \subset U_2$, $V_1 + V_2 + U_3 + \dots + U_m = R$; atd.

25·3. Nechť R je dokonale normální prostor; nechť dim $R \leqq n$. Nechť $U_1, \dots, U_m$ jsou otevřená v R; nechť $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Pak existují v R otevřená $V_1, \dots, V_m$ taková, že: $\overline{V_\nu} \subset U_\nu$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$; $\sum_{\nu=1}^{m} \overline{V_\nu} = R$; $V_\mu . V_\nu = 0$ pro $1 \leqq \mu < \nu \leqq m$; dim $H_R(V_\nu) \leqq n - 1$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$.

Dukaz. Podle **25·2** a **4·1** existují v R uzavřená $F_1, \dots, F_m$ taková, že $F_\nu \subset U_\nu$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$, $\sum_{\nu=1}^{m} F_\nu = R$. Podle **12·1** existují v R otevřená $W_1, \dots, W_m$ taková, že $F_\nu \subset W_\nu \subset \overline{W_\nu} \subset U_\nu$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$. Ježto dim $R \leqq n$, existují v R otevřená $Z_1, \dots, Z_m$ taková, že $F_\nu \subset Z_\nu \subset W_\nu$, dim

[15]) L. c. sub [4]), str. 159 160 (Bemerkung).

$H_R(Z_\nu) \leqq n - 1$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$. Položme $V_1 = Z_1$ a pro $2 \leqq \nu \leqq m$ $V_\nu = Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu}$. Množství V_ν jsou otevřená v R podle **1·3** a **2·3**, neboť $V_\nu = Z_\nu \left(R - \sum_{1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu}\right)$. Podle **4·4** jest $\overline{V_\nu} \subset \overline{Z_\nu} \subset \overline{W_\nu} \subset U_\nu$. Je-li p libovolný bod z R, existují indexy ν takové, že $(p) \subset F_\nu \subset Z_\nu \subset \overline{Z_\nu}$. Nechť tedy ν je *nejmenší* index takový, že $(p) \subset \overline{Z_\nu}$. Je-li $\nu = 1$, jest $(p) \subset \overline{Z_1} = \overline{V_1}$. Je-li $\nu > 1$, jest $V_\nu = Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu}$, tedy

$$Z_\nu \subset V_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu},\quad \overline{Z_\nu} \subset \overline{V_\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu}.$$

Ježto $(p) \subset \overline{Z_\nu} - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu}$, jest $(p) \subset \overline{V_\nu}$. Tedy $\sum_{\nu=1}^{m} \overline{V_\nu} = R$. Pro $1 \leqq \mu < \nu \leqq m$ jest $V_\nu \subset R - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu} \subset R - \overline{Z_\mu} \subset R - \overline{V_\mu} \subset R - V_\mu$, tedy $V_\mu V_\nu = 0$. Ježto $V_1 = Z_1$, jest dim $H_R(V_1) < n - 1$. Pro $2 \leqq \nu \leqq m$ jest podle **4·4**

$$V_\nu - Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu} - Z_\nu - \overline{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} Z_\mu},$$

tedy podle **9·2**

$$H_R(V_\nu) \subset H_R(Z_\nu) + H_R\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1} Z_\mu\right),$$

takže podle **9·1**

$$H_R(V_\nu) \subset \sum_{\mu=1}^{\nu} H_R(Z_\mu);$$

tedy podle **16·2** (nebo **23**) a podle součtové věty opět dim $H_R(V_\nu) \leqq n - 1$.

26. Nechť R je dokonale normální prostor; nechť dim $R \leqq n$. Nechť $U_1, \ldots, U_m$ jsou otevřená v R; nechť $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Pak existují v R otevřená V_i $(1 \leqq i \leqq (n+1)m)$ o těchto vlastnostech:

1⁰ $\overline{V_i} \subset U_\nu$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n+1)(\nu-1) + 1 \leqq i \leqq (n+1)\nu$;

2⁰ $\sum_{i=1}^{(n+1)m} \overline{V_i} = R$;

3⁰ $V_i \,.\, V_j = 0$ pro $1 \leqq i < j \leqq (n+1)m$;

4⁰ dim $H_R(V_i) \leqq n - 1$ pro $1 \leqq i \leqq (n+1)m$;

5⁰ je-li $2 \leqq r \leqq n + 2$ a je-li $i_1, i_2, \ldots, i_r$ jakákoli kombinace (bez opakování) indexu $1, 2, \ldots, (n+1)m$, jest dim $\prod_{s=1}^{r} \overline{V_{i_s}} \leqq n - r + 1$.

Dukaz. Když $k = 1$, lze podle **25·3** sestrojiti v R otevřená $V_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq km$ taková, že

(a_k) $\overline{V_i^{(k)}} \subset U_\nu$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$, $k(\nu - 1) + 1 < i \leqq k\nu$;

(b_k) $\sum_{i=1}^{km} \overline{V_i^{(k)}} - R$;

(c_k) $V_i^{(k)} \,.\, V_j^{(k)} = 0$ pro $1 \leqq i < j < km$;

(d_k) dim $H_R(V_i^{(k)}) \leqq n - 1$ pro $1 \leqq i \leqq km$;

(e_k) je-li $2 \leqq r \leqq k + 1$ a je-li $i_1, i_2, \ldots, i_r$ jakákoli kombinace

indexů 1, 2, . . . , $k\,m$, jest $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)} \leqq n - r + 1$.[16])
Máme dokázati, že to lze i pro $k = n + 2$. Nechť tedy při určitém k ($1 \leqq k \leqq n + 1$) byla již sestrojena v R otevřená $V_i^{(k)}$ ($1 \leqq i \leqq k\,m$) tak, že platí (a_k) až (e_k); máme sestrojiti v R otevřená $V_i^{(k+1)}$ ($1 \leqq i \leqq (k + 1)\,m$) tak, aby platilo ($a_{k+1}$) až ($e_{k+1}$).

26·1. Pro $1 \leqq r \leqq k$ nechť S_r znamená množství všech těch bodu p prostoru R, pro něž $(p) \subset V_i^{(k)}$ pro nejméně r ruzných indexů i ($1 \leqq i \leqq k\,m$). Podle (b_k) jest $S_1 \quad R$. Zřejmě $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k$. Pro $2 \leqq r \leqq k$ jest

$$S_r - \Sigma \prod_{s\ 1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)},$$

kde $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ probíhá kombinace indexu 1, 2, . . . , $k\,m$, takže podle **1·3** a **1·4** S_r jsou uzavřená v R a podle (e_k) s ohledem na součtovou větu $\dim S_r \leqq n - r + 1$, což ovšem platí i pro $r = 1$. Množství $S_k \,.\, U_\nu$ ($1 \leqq \nu \leqq m$) jsou otevřená v S_k a jest $\sum_{\nu\ 1}^{m} S_k \,.\, U_\nu = S_k$. Tedy podle **14·2** a **25·3** existují v S_k otevřená T_ν ($1 \leqq \nu \leqq m$) taková, že[17])

$$\overline{T}_\nu \subset U_\nu \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{m} \overline{T}_\nu - S_k; \tag{2}$$

$$T_\mu \,.\, T_\nu = 0 \text{ pro } 1 \leqq \mu < \nu \leqq m; \tag{3}$$

$$\dim H_{S_k}(T_\nu) \leqq n - k \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m. \tag{4}$$

26·2. Sestrojíme nyní v R otevřená W_ν ($1 \leqq \nu \leqq m$) s následujícími vlastnostmi:

$$\overline{W_\nu} \subset U_\nu \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{α_ν}$$

$$S_k \,.\, W_\nu = T_\nu \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{β_ν}$$

$$S_k \,.\, H_R(W_\nu) = H_{S_k}(T_\nu) \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{γ_ν}$$

$$\dim S_r \,.\, H_R(W_\nu) \leqq n - r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k,\ 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{δ_ν}$$

$$\overline{W_\mu} \,.\, W_\nu = 0 \text{ pro } 1 \leqq \mu < \nu \leqq m; \tag{ε_ν}$$

$$\overline{W_\mu} \,.\, \overline{W_\nu} \subset S_k \text{ pro } 1 \leqq \mu < \nu \leqq m. \tag{ζ}$$

Podmínky (ε_1) a (ζ_1) ovšem odpadnou. Podle (1) a **12·1** sestrojíme nejprve v R otevřená Z_ν tak, že

$$T_\nu \subset Z_\nu \subset \overline{Z}_\nu \subset U_\nu \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m. \tag{5}$$

Podle **26·1** jsou splněny předpoklady věty **24·2**, když do ní za U_0, U, n_r ($1 \leqq r \leqq k$) dosadíme $T_1, Z_1, n - r$. Tedy existuje v R otevřené W_1 splňující podmínky (α_1) až (ζ_1). Předpokládejme tedy, že při určitém ν ($2 \leqq \nu \leqq m$) byla již sestrojena v R otevřená množství $W_1, \ldots, W_{\nu-1}$ tak, že pro $1 \leqq \mu$

[16]) Pro $k \quad 1$ jest $r \quad 2$, tedy $\prod_{s=1}^{r} V_{i_s}^{(1)} - V_{i_1}^{(1)} \,.\, \overline{V}_{i_2}^{(1)} \subset H_R(V_{i_1})$, neboť podle ($c_1$), ježto $V_{i_1}^{(1)}$, $V_{i_2}^{(1)}$ jsou otevřená v R, jsou to oddělená množství, takže podle **7·2** jest $V_{i_1}^{(1)} \,.\, \overline{V}_{i_2}^{(1)} - 0$. Tedy $\dim \prod_{s=1}^{r} V_{i_s}^{(1)} \leqq n \quad r + 1 - n \quad 1$ podle **16·2** a (d_1).

[17]) Ježto S_k jest uzavřené v R, podle **4·3** jest $\overline{T_\nu} \subset S_k$, takže (v. **5**) uzavřený obal T_ν v prostoru S_k jest $\overline{T_\nu}$.

$< \nu$ jsou splněny podmínky (α_μ) až (ζ_μ). Máme sestrojiti v R otevřené W_ν tak, aby byly splněny podmínky (α_ν) až (ζ_ν). Pro $1 \leqq \mu < \nu$ jest

$$(\overline{W}_\mu - S_k)\, \overline{T}_\nu \subset (\overline{W}_\mu - S_k)\,.\, S_k = 0,$$
$$\overline{\overline{W}_\mu - S_k}\,.\,T_\nu \subset \overline{W}_\mu\,.\,S_k T_\nu \subset \overline{T}_\mu\,.\,T_\nu$$

podle (β_μ), (γ_μ) a **8·2**. Avšak T_μ, T_ν jsou otevřená v S_k, tedy podle (3) oddělená, takže podle **7·2** $\overline{T}_\mu\,.\,T_\nu = 0$. Tedy podle **7·2** množství $\overline{W}_\mu - S_k, T_\nu$ jsou oddělená, takže podle **6·1** také množství $\sum\limits_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{W}_\mu - S_k, T_\nu$ jsou oddělená; tedy podle **14·1** existují v R otevřená P_ν, Q_ν taková, že

$$P_\nu \supset \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{W}_\mu - S_k,\; Q_\nu \supset T_\nu\,,\, P_\nu\, Q_\nu = 0. \tag{6}$$

Užijme nyní věty **24·2**, do které za $U_0, U, n, (1 \leq r \leqq k)$ dosadíme

$$T_\nu\,,\, Z_\nu\; Q_\nu\,,\; n - r.$$

Nalézáme, že existuje v R otevřené W_ν takové, že platí

$$T_\nu \subset W_\nu \subset Z_\nu\, Q_\nu \tag{7}$$

jakož i (β_ν), (γ_ν), (δ_ν). Podle (7) $\overline{W}_\nu \subset \overline{Z}_\nu$, takže podle (5) platí (α_ν). Ježto P_ν, Q_ν jsou otevřená v R, podle (6) jsou oddělená, takže podle **7·2** jest $P_\nu \overline{Q}_\nu = 0$, tedy pro $1 \leq \mu < \nu$ $\overline{W}_\mu \overline{Q}_\nu \subset S_k$. Podle (7) je však $\overline{W}_\nu \subset \overline{Q}_\nu$, takže platí (ζ_ν). Tedy pro $1 \leqq \mu < \nu$ jest $\overline{W}_\mu\,.\,W_\nu = [W_\mu + H_R\,(W_\mu\,]\,.\,W_\nu \subset S_k$, tedy podle (β_μ), (γ_μ) a (β_ν) $\overline{W}_\mu\,.\,W_\nu = [S_k\, W_\mu + S_k H_R\,(W_\mu)] \times \times\, S_k\, W_\nu = [T_\mu + H_{S_k}(T_\mu)]\, T_\nu = \overline{T}_\mu T_\nu = 0$ podle (3) a **7·2**; tedy také (ε_ν) je splněno.

26·3. Položme nyní

$$V^{(k+1)}_{i+r} = V^{(k)}_i - \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu \quad \text{pro } 0 \leqq r \leqq m-1, \qquad rk+1 \leqq i \leqq (r+1)\,k, \tag{8}$$

$$V^{(k+1)}_{r(k+1)} = W_\nu \quad \text{pro } 1 \leq \nu < m, \tag{9}$$

takže množství $V_i^{(k+1)}$ $(1 \leqq i < (k+1)\, m)$ jsou otevřená v R. Podle (a_k) a (α_ν) platí (a_{k+1}). Podle (8) jest pro $0 \leqq r \leqq m-1$, $rk+1 \leqq i \leqq (r+1)\,k$: $V_i^{(k)} \subset V^{(k+1)}_{i+r} + \sum\limits_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu$, tedy $\overline{V}_i^{(k)} \subset \overline{V}^{(k+1)}_{i+r} + \sum\limits_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu$, tedy podle (9) $\sum\limits_{i=1}^{km} \overline{V}_i^{(k)} \subset \sum\limits_{i=1}^{(k+1)m} \overline{V}_i^{(k+1)} \subset R$, takže podle (b_k) platí (b_{k+1}). Podle (8), (9), (c_k) a (ε_ν) platí (c_{k+1}). Podle **9·1** a **9·2** je pro $0 \leqq r \leqq m-1$, $rk+1 \leqq i \leqq (r+1)\,k$,

$$H_R\left(V^{(k+1)}_{i+r}\right) \subset H_R\left(V_i^{(k)}\right) + \sum_{\nu=1}^{m} H_R\,(W_\nu),$$

tedy podle (δ_ν), (d_k), **16·2** a **20·3** platí (d_{k+1}).

26·4. Zbývá dokázati (e_{k+1}). Nechť tedy $2 \leqq r \leqq k+1$ a nechť $j_1, j_2, \ldots, j_r$ je nějaká kombinace indexu $1\; 2 \ldots, (k+1)\, m$. Nechť

$$Q - \prod_{s=1}^{r} V^{(k+1)}_{j_s}\,.$$

Máme dokázati, že $\dim Q \leqq n - r + 1$. Jest rozeznávati čtyři případy.

Předně: Aspoň dvě z r množství $V_{i_s}^{(k+1)}$ jsou dána vzorcem (9), třeba

$$V_{j_1}^{(k+1)} = W_\mu,\ V_{j_2}^{(k+1)} = W_\nu,$$

kde $\mu, \nu = 1, 2, \dots m$; $\mu < \nu$. Pak jest $Q \subset \overline{W}_\mu . \overline{W}_\nu$, tedy $Q \subset S_k$ podle (ζ_ν). Mimo to $W_\mu . \overline{W}_\nu = 0$ podle (ε_ν), takže $Q \subset H_R(W)$. Tedy podle **16·2** a (δ_ν) dim $Q \leqq n - k$, takže dim $Q \leqq n - r + 1$. neboť $r \leqq k + 1$.

Za druhé: Jediné z r množství $V_{i_s}^{(k+1)}$ je dáno vzorcem (9), takže existuje index ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ a kombinace $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}$ indexu $1, 2, \dots k\,m$ tak, že

$$Q = \overline{W}_\nu . \overline{\prod_{s=1}^{r-1} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} \subset \overline{W}_\nu . \prod_{s=1}^{r-1} \overline{V}_{i_s}^{(k)} \subset \overline{W}_\nu . S_{k-1}.$$

Množství W_ν, $V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu$ jsou otevřená v R a jejich průřez je prázdný; tedy jsou oddělená, takže podle **7·2** $W_\nu . \overline{\prod_{s=1}^{r-1} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} = 0$, tedy $Q \subset S_{r-1} . H_R(W_\nu)$, takže dim $Q \leqq n - r + 1$ podle **16·2** a (δ_ν).

Za třetí: $2 \leqq r \leqq k$ a všecka množství $V_{i_s}^{(k+1)}$ jsou dána vzorcem (8), takže existuje kombinace $i_1, i_2, \dots i_r$ indexů $1, 2, \dots k\,m$ taková, že

$$Q = \overline{\prod_{s=1}^{r} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} \subset \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)},$$

tedy dim $Q \leqq n - r + 1$ podle **16·2** a (e_k).

Za čtvrté: Jako v předešlém případě s tím rozdílem, že $r = k + 1$. Jest $Q \subset S_k$ podle definice S_k, tedy $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu$ podle (2) a (β_ν). Avšak $\left(V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu\right) . W_\nu = 0$, tedy $\overline{V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} . W_\nu = 0$ podle **7·2**, takže $Q . W_\nu = 0$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$. Tedy $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} (\overline{W}_\nu - W_\nu)$, $Q \subset S_k$, takže $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} S_k . H_R(W_\nu)$, tedy podle **16·2** a (δ_ν) jest dim $Q \leqq n - k = n - r + 1$.

27. Nechť R je dokonale normální prostor. Nechť S jest uzavřené v R; nechť dim $S \leqq n$. Nechť $U_1, \dots, U_m$ jsou otevřená v R. Nechť $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu \supset S$. Pak existují v R otevřená V_i $(1 \leqq i \leqq (n + 1)\,m)$ o těchto vlastnostech:

1⁰ $\overline{V}_i \subset U_\nu$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n + 1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n + 1)\,\nu$;

2⁰ $\sum_{i=1}^{(n+1)m} V_i \supset S$;

3⁰ $V_i . V_j = 0$ pro $1 < i < j \leqq (n + 1)\,m$;

4⁰ dim $S . H_R(V_i) \leqq n - 1$ pro $1 \leqq i \leqq (n + 1)\,m$;

5⁰ je-li $2 \leqq r \leqq n + 2$ a je-li $i_1, i_2, \dots, i_r$ jakákoli kombinace (bez opakování) indexu $1, 2, \dots, (n + 1)\,m$, jest $\prod_{s=1}^{r} V_{i_s} \subset S$, dim $\prod_{s=1}^{r} V_{i_s} \leqq n - r + 1$.

Důkaz. Podle **26** a **14·2** existují v S otevřená T_i $(1 \leqq i \leqq (n+1)\,m)$ o těchto vlastnostech:

6⁰ $\overline{T_i} \subset U_\nu$ pro $1 < \nu \leqq m$, $(n+1)(\nu-1)+1 \leq i \leqq (n+1)\,\nu$.

7⁰ $\sum\limits_{i=1}^{(n+1)m} \overline{T_i} = S$;

8⁰ $T_i \, . \, T_j = 0$ pro $1 < i < j \leqq (n+1)\,m$;

9⁰ $\dim H_S(T_i) \leqq n-1$ pro $1 < i \leqq (n+1)\,m$;

10⁰ je-li $2 \leqq r < n+2$ a je-li $i_1\, i_2, \ldots, i_r$ jakákoli kombinace (bez opakování) indexu $1, 2, \ldots, (n+1)\,m$, jest $\dim \prod\limits_{s=1}^{r} \overline{T_{i_s}} \leqq n-r+1$.

Podle 6⁰ a **12·1** existují v R otevřená Z_i taková, že

$$\overline{T_i} \subset Z_i \subset \overline{Z_i} \subset U_\nu \text{ pro } 1 < \nu \leqq m,\ (n+1)(\nu-1)+1 \leqq i \leqq (n+1)\,\nu.$$

Zřejmě stačí sestrojiti v R otevřená V_i $(1 \leqq i < (n+1)\,m)$ tak, aby bylo

$$T_i \subset V_i \subset Z_i, T_i = S\,V_i \text{ pro } (1 \leq i < (n+1)\,m) \qquad (a_i)$$

$$V_i \, . \, V_j = 0 \text{ pro } 1 \leq j < i < (n+1)\,m, \qquad (b_i)$$

$$S \, . \, H_R(V_i) = H_S(T_i) \text{ pro } 1 \leqq i \leqq (n+1)\,m, \qquad (c_i)$$

$$\overline{V_i} \, . \, \overline{V_j} = \overline{T_i} \, . \, \overline{T_j} \text{ pro } 1 \leqq j < i < (n+1)\,m. \qquad (d_i)$$

Podle **13·3** a **14·1** existuje v R otevřené V_1 splňující podmínky (a_1) a (c_1); podmínky (b_1) a (d_1) ovšem odpadnou. Nechť tedy při určitém i $(2 \leqq i \leqq$ $\leqq (n+1)\,m)$ byla již sestrojena v R otevřená V_j $(1 < j < i)$ tak, že pro $1 \leqq j < i$ platí (a_j) až (d_j). Máme sestrojiti v R otevřené V_i tak, aby platilo (a_i) až (d_i). Pro $1 \leqq j < i$ jest

$$(\overline{V_j} - S)\,\overline{T_i} \subset (R - S) \, . \, S = 0,$$

$$\overline{V_j - S} \, . \, T_i \subset \overline{V_j} \, . \, S \, . \, T_i = [S\,V_j + S\,H_R(V_j)]\,T_i = [T_j + H_S(T_j)]\,T_i = \overline{T_j}\,T_i,$$

což je prázdné podle 8⁰ a **7·2**. Tedy podle **7·2** množství $\overline{V_j} - S, T_i$ jsou oddělená, takže podle **6·1** také množství $\sum\limits_{j=1}^{i-1} \overline{V_j} - S, T_i$ jsou oddělená; tedy podle **14·1** existují v R otevřená $P_i\, Q_i$ taková, že

$$P_i \supset \sum_{j=1}^{i-1} \overline{V_j} - S,\ Q_i \supset T_i,\ P_i\,Q_i = 0.$$

Podle **7·2** jest $P_i\,Q_i = 0$. Podle **13·3** a **14·1** existuje v R otevřené V_i takové, že

$$T_i \subset V_i \subset Z_i\,Q_i,\ T_i = S\,V_i,\ H_S(T_i) - S \, . \, H_R(V_i).$$

Vlastnosti (a_i) a (c_i) jsou zřejmé; ježto

$$V_i \subset Q_i,\ V_j \subset S - P_i \text{ pro } 1 < j < i,$$

jest $\overline{V_i} \, . \, \overline{V_j} \subset P_i\,\overline{Q_i} + S$ tedy $\overline{V_i}\,\overline{V_j} \subset S$. Tedy $V_i\,V_j \subset S$ t. j. $V_i\,V_j =$ $= S\,V_i \, . \, S\,V_j = T_i\,T_j = 0$, t. j. platí (b_i). Dále $S \, . \, \overline{V_i} = S \, . \, [V_i +$ $+ H_R(V_i)] = T_i + H_S(T_i) = \overline{T_i}$; ježto $\overline{V_i} \, . \, \overline{V_j} \subset S$, jest $\overline{V_i}\,\overline{V_j} =$ $= S\,\overline{V_i} \, . \, S\,\overline{V_j} = \overline{T_i} \, . \, \overline{T_j}$, takže také (d_i) je splněno.